

हिन्दीमिति-ग्रन्थमाला—५१

यांत्रिकी

लेखक

आनान्द गोमरफेल्ड

म्यूनिख विश्वविद्यालय

अनुवादक

जगद्विहारो सेठ, इ० ए० एम० (अव)

हिन्दी समिति

सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश

प्रथम संस्करण

१९६२

मूल्य

ग्यारह रुपये

[Translated into Hindi from Martin O.
Stern's English translation of the
fourth German Edition]

मुद्रक

पं० पृथ्वीनाथ भागवत,

भागवत भूषण प्रेस, गायघाट, वाराणसी

प्रकाशकीय

यह पुस्तक उन व्याख्यानो का संग्रह है जो श्री आर्नाल्ड मोमरफेन्ट द्वारा म्यूनिख विश्वविद्यालय में उच्चश्रेणी के विद्यार्थियों के सामने दिये गये थे। प्रशिक्षण मयन्थी ३०-४० वर्ष के अनुभव तथा गवेषणाओं का सार इन भाषणों में आ गया है। विषय का अध्यापन समाप्त हो जाने के बाद ये व्याख्यान मप्ताह में चार घंटे दिये जाने थे और दो घंटे प्रति मप्ताह विद्यार्थियों द्वारा प्रस्तुत की गयी समस्याओं पर विचार करने तथा उनके समाधान के मुद्दाय देने में बिताये जाते थे। इसी में छात्रों पर इनका बड़ा प्रभाव पड़ता था। समस्त व्याख्यानमाला छ भागों में प्रकाशित हुई थी। प्रस्तुत पुस्तक इसके प्रथम भाग का अनुवाद है। गणितीय सैद्धान्तिक भौतिकी के अध्ययन-अध्यापन में रुचि लेने वालों के लिए तथा क्वाण्टम सिद्धान्त के विकास की भूमिका के रूप में इसकी उपयोगिता समझ कर ही हिन्दी समिति द्वारा इसका प्रकाशन किया जा रहा है।

हिन्दी समिति ग्रंथमाला का यह ५१ वाँ पुष्प है। इसके अनुवादक श्री जगद् बिहारी सेठ ३० वर्ष तक पहले भौतिकी के प्राध्यापक और फिर प्रिंसिपल के रूप में राजकीय शिक्षा विभाग में कार्य करने के बाद अवसर ग्रहण कर चुके हैं। आप छात्रा-वस्था से ही हिन्दी के प्रेमी रहे हैं। यह अनुवाद आपके अनुभव और हिन्दी के प्रति इस बिशिष्ट अनुराग का ही परिणाम है।

लीलाधर शर्मा 'पर्वतीय'

सचिव, हिन्दी समिति।

हिन्दी अनुवादक का निवेदन:

थो सोमरफेल्ड की व्याख्यान माला में छः ग्रंथ हैं जिनके नाम उन्ही की, घयास्थान दी हुई, भूमिका में मिलेंगे। इनमें के प्रथम चार तथा पष्ठ ग्रंथ ही वे पूर्णतया लिख पाये थे जो उनके जीवन-काल में प्रकाशित हो सके थे। पाँचवें ग्रंथ की रचना वे अभी कर ही रहे थे कि उनकी मृत्यु हो गयी। परंतु मृत्यु के पहले वे उसको पूरा करने का कार्य उपयुक्त सुयोग्य विद्वानों को सौंप सके थे और परामर्श दे सके थे कि पुस्तक किस प्रकार समाप्त की जाय। अतएव पाँचवाँ ग्रंथ भी उन्ही का कहलाता है। निस्मदेह, मूल ग्रंथ जर्मन भाषा में है। उनका अंग्रेजी अनुवाद अमेरिका, न्यूयार्क के एकेडेमिक प्रेस इनकारपो. प्रकाशकों ने प्रकाशित किया। विभिन्न ग्रंथों के अंग्रेजी अनुवाद विभिन्न उपयुक्त विद्वानों से कराये गये और वे विभिन्न वर्षों में प्रकाशित हुए थे।

प्रस्तुत ग्रंथ व्याख्यानमाला की प्रथम पुस्तक यात्रिकी, का हिंदी भाषांतर है। मूल ग्रंथ १९४३ में प्रकाशित हुआ था और १९४४ में ही उसका द्वितीय संस्करण निकल गया था। अंग्रेजी अनुवाद ग्रंथ के चतुर्थ संस्करण का हुआ तथा वह १९५२ में प्रकाशित हुआ और १९५६ में उसका पुनर्मुद्रण हुआ। प्रस्तुत ग्रंथ इसी पुनर्मुद्रण से अनूदित है। अनुवाद करने आदि की अनुमति अमेरिकन प्रकाशकों ने सहर्ष प्रदान की। तदर्थ उनका यहाँ सर्वप्रथम धन्यवाद करना उचित ही है।

अनुवाद जहाँ तक हो सका अक्षरशः किया गया है। अंग्रेजी भाषांतर में दी हुई पादटिप्पणियाँ, तारक चिह्न, त्रिशूल चिह्न आदि द्वारा सूचित की गयी है। कहीं-कहीं हिन्दी अनुवादक ने कुछ अन्य टिप्पणियाँ देना भी उचित समझा है। इनमें 'अनुवादक' शब्द जोड़ दिया गया है। वर्तमान संक्रमण युग में यह भी उचित ही जान पड़ा कि पारिभाषिक शब्दावली हिन्दी-अंग्रेजी में ही न हो, वरन् अंग्रेजी-हिन्दी में भी दी जाय। गणितीय पदपुंज, संकेताक्षर, समीकरण आदि अंग्रेजी में ही दिये गये हैं।

अनुवादक

विषय-सूची

प्राक्कथन	१३
भूमिका	१९
उपोद्घात	२३
प्रथम अध्याय—कण की यांत्रिकी	... १
<p>(१) न्यूटन के स्वयंतध्य १</p> <p>(२) आकाश, काल और अभिदेश पद्धतियाँ १०</p> <p>(३) संहति-विन्दु की ऋजुरेखीय गति; २१</p> <p>(४) घर अर्थात् परिवर्तनशील संहतियाँ; ३७</p> <p>(५) समतल में और आकाश में अकेले संहति-विन्दु की चलगतिकी तथा स्थैतिकी; ४२</p> <p>(६) स्वतन्त्रतापूर्वक चलते हुए संहति-विन्दु का गति-विज्ञान (चलगतिकी); केपलर समस्या; स्थितिज ऊर्जा की धारणा; ५२</p>	
द्वितीय अध्याय—निकायों की यांत्रिकी; आभासी कर्म का सिद्धान्त;	
दालाँवेर का सिद्धान्त	... ६४
<p>(७) यांत्रिकी निकाय की स्वतन्त्रता-संख्याएँ तथा आभासी विस्थापन; पूर्ण-पदीय और अपूर्ण-पदीय नियंत्रण; ६४</p> <p>(८) आभासी कर्म का सिद्धान्त; ६८</p> <p>(९) आभासी कर्म सिद्धान्त के उदाहरण; ७२</p> <p>(१०) दालाँवेर का सिद्धान्त; ७९</p> <p>(११) अति सरल प्रदर्शनों में दालाँवेर-सिद्धान्त का अनुप्रयोग; ८४</p> <p>(१२) प्रथम प्रकार के लाग्रान्ज-समीकरण; ९०</p> <p>(१३) सवेग के तथा कोणीय सवेग के समीकरण; ९४</p> <p>(१४) घर्षण के नियम; १०९</p>	
तृतीय अध्याय—दोलक समस्याएँ	... ११७
<p>(१५) सरल लोलक; ११७</p> <p>(१६) यौगिक लोलक; १२२</p>	

- (१७) वृत्त जातीय लोलक; १२६
- (१८) गोलीय लोलक; १२९
- (१९) विविध प्रकार के दोलन—स्वतंत्र और प्रणोदित, अवमंदित तथा अनवमंदित दोलन; १३५
- (२०) सहानुभूति-जनित दोलन; १४२
- (२१) युगल लोलक, १४९

चतुर्थ अध्याय—दृढ़ पिंड

... १५८

- (२२) दृढ़ पिंडों की फलगतिकी; १५८
- (२३) दृढ़ पिंडों की स्थैतिकी; १६७
- (२४) दृढ़ पिंड के रैखिक तथा कोणीय संवेग। रैखिक और कोणीय वेग से उनका संबंध; १७४
- (२५) दृढ़ पिंड का गतिविज्ञान, उसकी गतियों के रूपों का सर्वेक्षण; १७८
- (२६) गूलर के समीकरण बलों के अनघीन लट्टू की मात्रात्मक विवृति; १८५
- (२७) नाचते हुए लट्टू के सिद्धान्त सम्बन्धी प्रदर्शक-निदर्शन-प्रयोग; २०१

पञ्चम अध्याय—सापेक्ष गति

... २१८

- (२८) विशेष स्थिति में कोरिओलिस बल का व्युत्पत्तिपादन; २१८
- (२९) सापेक्षगति के व्यापक अवकल समीकरण बृन्द; २२२
- (३०) घूर्णन युक्त पृथिवी पर स्वतंत्र पतन; घूर्ण-संस्थापीय पक्षों की प्रकृति; २२४
- (३१) फूकों का लोलक; २३०
- (३२) त्रिपिंड समस्या की लाग्रंजीय स्थिति; २३४

षष्ठ अध्याय—यांत्रिकी के समाकल परिणामन सम्बन्धी सिद्धान्त तथा व्यापकी कृत निर्देशांकों के लिए लाग्रंज के समीकरण

... २४३

- (३३) हैमिल्टन के सिद्धान्त; २४३
- (३४) व्यापकीकृत निर्देशांकों के लिए लाग्रंज समीकरण; २४९
- (३५) लाग्रंज समीकरणों के उपयोग-प्रदर्शक उदाहरण; २५९
- (३६) लाग्रंज समीकरणों का एक अन्य व्युत्पादन; २७०
- (३७) लघुतम क्रिया का सिद्धान्त; २७६

सप्तम अध्याय—यांत्रिकी के अवकल परिणमन संबंधी सिद्धान्त	... २८५
(३८) गाउस कृत लघुतम नियंत्रण का सिद्धान्त; २८५	
(३९) हर्जंजुत लघुतम वक्रता सिद्धान्त; २८८	
(४०) भू-रेखाओं संबंधी विषयान्तरण; २९१	
अष्टम अध्याय—हैमिल्टन का सिद्धान्त	... २९५
(४१) हैमिल्टन के समीकरण; २९५	
(४२) राउय के समीकरण और चक्रीय निकाय गण; ३०३	
(४३) अपूर्णपदीय वेग-परामितियों के अवकल समीकरण वृन्द; ३०८	
(४४) हैमिल्टन-याकोबी समीकरण; ३११	
(४५) हैमिल्टन-याकोबी समीकरण के लिए याकोबी का नियम; ३१७	
(४६) केपलर समस्या की चिरसम्मत तथा क्वाटम सैद्धान्तिक विवृति; ३२०	
समस्याएँ	... ३२६
प्रथम अध्याय संबंधी ३२६	
द्वितीय अध्याय संबंधी ३३३	
तृतीय अध्याय संबंधी ३३६	
चतुर्थ अध्याय संबंधी ३४०	
पंचम अध्याय संबंधी ३४१	
षष्ठ अध्याय संबंधी ३४४	
प्रश्नों के हल करने के लिए संकेत	३४८-३८३
पारिभाषिक शब्दावली	... ३८५

प्राक्कथन

(धी पी० पी० एवाल्ड द्वारा लिखित)

सैद्धांतिक भौतिकी के प्रस्तुत अध्यापन ग्रंथों के रचयिता, श्री अर्नाल्ड सोमरफेल्ड उन विशिष्ट विद्वानों में थे जिनके द्वारा, १९१० से १९३० तक के दो दशकों में ही, भौतिक-विज्ञान-जगत् में भारी परिवर्तन हो गया। सोमरफेल्ड के प्रेरणापूर्ण और अथक प्रयासों के बिना परमाणु के क्वांटम सिद्धान्त का न तो उतना प्रचंड विकास होता और न उमका उतना विस्तृत प्रचार ही होता जितना कि हुआ। म्यूनिख में स्थित सोमरफेल्ड का 'सैद्धांतिक भौतिक इंस्टिट्यूट' ऐसी सस्या हो गया जहाँ में परमाणु-सिद्धांत के जर्मन तथा विदेशी, नयीन एवं प्रौढ, विद्यार्थियों के गवेषणा-पत्रों की धारा बह निकली। उनका मुप्रसिद्ध ग्रंथ "एटम्बाउ अंड स्पेक्ट्राल्लिनीएन"^१ (परमाणु-रचना तथा वर्णक्रम-रेखाएँ) और उसके थोड़े ही दिन बाद प्रकाशित उन्ही की लिखी पुस्तक, "वेलनमेकॅनिक"^२ (तरंग-यांत्रिकी) बहुकाल पर्यंत इस भौतिक विषय के एकमात्र पूर्ण और प्रामाणिक ग्रंथ रहे। उसके बाद के एक के बाद एक निकले सस्करणों ने ही नील्स बोर^३ के प्रारम्भिक शोधपत्रों के बाद शीघ्रतापूर्वक विकसित परमाणु-सिद्धांत की हृदयंगामी बातों को संसार के सामने प्रकट किया।

अपने प्रशिक्षण एवं पूर्वकालिक गवेषणाओं, दोनों के ही कारण सोमरफेल्ड उच्च-कोटीय भौतिकी की गणितीय विधियों में पूर्ण निपुणता प्राप्त कर चुके थे। अतएव क्वांटम भौतिकी की नव-जात विधियों में, शीघ्र ही, विशेषतया १९२६ में श्राडिजेर^४ की तरंग-यांत्रिकी के आविर्भाव के उपरांत वे पूर्ण पंडित बन गये। और इसलिए, तथा इसलिए भी कि उन्हें चिरप्रतिष्ठित सिद्धांत के रचिकारक सौंदर्य में स्वयं बड़ा आनन्द आता था, यह स्वाभाविक ही था कि सोमरफेल्ड अपने शिष्यों को भी चिरप्रतिष्ठित विधियों की 'सम्यक्' प्रशिक्षा देते। गणितीय अनुष्ठान, उसका भौतिक भाष्य, तथा उसका प्रायोगिक प्रत्यक्षीकरण, इन सबके बीच की अनुरूपता के उभड़े हुए से चित्र सोमरफेल्ड के व्याख्यानो में खिंच जाते थे, जो उनके शिष्यों पर बड़ा प्रभाव डालते थे।

1. "Atombau und Spektrallinien", 2. "Wellenmechanik"
3. Niels Bohr, 4. Schrodinger,

जिस समय सोमरफेल्ड ने अपने अध्यापन-व्याख्यान पुस्तकाकार प्रकाशनाय लिपि-बद्ध किये, उस समय उनकी अवस्था सत्तर वर्ष से भी अधिक थी और चालीस वर्ष पर्यंत अध्यापन करके वे कार्यावकाश प्राप्त कर चुके थे। दो कारणों से उन्होंने ऐसा करना अपना कर्तव्य समझा—एक तो यह कि उस संकटकाल में उन शोधों का संरक्षण हो सके जिन्होंने भौतिकी को सफलता की पराकाष्ठा तक पहुँचाया था; दूसरा यह कि नूतन युग के भौतिकी-विद्यार्थियों के लिए उच्चकोटीय समस्याओं के ढाँचे पर बनाये हुए गणितीय विश्लेषण की बहुमूल्य उपलब्धियों की रक्षा हो सके। इन उपलब्ध साधनों को निर्दोष बनाने में सोमरफेल्ड ने तभी से काफी हाथ बँटाना प्रारंभ कर दिया था जब, १८९५ में, भौतिकी में स्वेच्छफलनों^१ पर आचार्य (डाक्टर) पदवी प्राप्त करने के लिए उन्होंने अपना निबंध लिखा था। उनके शुरू-शुरू के विद्वत्सापूर्ण शोधों में 'किसी किनारे पर तरंगों के विवर्तन'^२ के कारणों पर यथार्थ प्रमाण को प्रस्तुत करना था। उन्होंने 'रीमान'^३ द्वारा व्यवहृत फलन-वाद^४ की विधियों को आगे बढ़ाया, जिसका परिणाम यह हुआ कि विवर्तन की उक्त समस्या का साधन 'बहु-विमितीय अवकाश में प्रतिबिम्ब' की विधि द्वारा प्राप्त हो गया। इस विषय की विवेचना पाठकों को प्रस्तुत व्याख्यान माला की पाँचवी पुस्तक, 'प्रकाशिकी', में मिलेगी।

गोट्टिजेन^५ के अपने प्रारंभिक काल से लेकर म्यूनिख में ब्वांटेम युग के आरंभ तक, गोट्टिजेन के प्रसिद्ध गणितज्ञ, फेलिक्स क्लाइन^६, के सहयोग से, चार ग्रंथों में समाप्त, घूर्णमान दृढ़पिंडों के बाद^७ पर, सोमरफेल्ड ने अपने प्रामाणिक ग्रंथ, 'थियोरी डेस क्राइसेल्स'^८ की रचना की। इस ग्रंथ में फलनवाद, दीर्घवृत्तीय फलन, चतुर्वर्णयिन^९, क्लाइन-केली के परामिति बृद्ध^{१०}, इत्यादि, जैसे गणितीय विषयों को दृढ़पिंड संबंधी गतिविज्ञान की समस्याएँ हल करने में लगाकर गणित के "शुद्ध" और "अनुप्रयुक्त" अंगों का परस्पर घना संबंध दिखलाने का यत्न किया गया था। १८९९ से १९०५ तक, आखेन के टेक्नीश हाखशूल अध्यापक^{११} की हैसियत में, सोमरफेल्ड ने इंजिनियरी

1. Arbitrary Functions in Physics
2. Construction of a strict solution for the diffraction of a wave by an edge
3. Riemann
4. Theory of Functions
5. "Optics"
6. Gottingen
7. Felix Klein
8. Theory of rotating rigid bodies
9. Theorie des Kreisels
10. Quaternions
11. Klein Caley parameters
12. Technische Hochschule.

की समस्याओं में गहरी दिलचस्पी ली। स्नेहनों का द्रवगति विज्ञान, एक ही शक्तिवाहक तार पर काम करते हुए एकाधिक विद्युज्जनित्रों के बीच की मिथ-क्रिया, रेलगाड़ियों के ब्रेको का काम, तथा अन्य विषयों की समस्याएँ हल करने के लिए एक-जैसी विधियों के संबंध में जो काम लिया गया, उसका महत्त्व चिरकाल तक बना रहेगा। बेतार की तार-प्रणाली का आविर्भाव हो जाने पर, रेडियो-तरंगों के उत्सर्जन और प्रचरण विधियों के संबंध में सोमरफ़ेल्ड और उनके शिष्यों के रचनापत्रों की शृंखला बँध गयी। ये उन गणितीय विधियों के उत्तम उदाहरण हैं जिनमें सोमरफ़ेल्ड पूर्ण पारंगत थे। विशेषतः, इन तरंगों के पृथिवी के चारों ओर विवर्तन की समस्या सम्मिश्र समाकलो^१ संबंधी वाद-विवाद मात्र बना दी गयी, जोकि उसके यथार्थ प्रमाण सिद्ध हुए (देखिए, छठे ग्रंथ का छठा अध्याय)।

जिन सब उपलब्धियों से सोमरफ़ेल्ड ने भौतिक सिद्धांत को संपन्न किया, उनकी पूरी सूची यहाँ देने का अवसर नहीं; केवल इस प्राक्कथन के अंत में दी हुई थोड़ी-सी रचनाओं का नाम दे देना ही यहाँ पर्याप्त होगा। परंतु सोमरफ़ेल्ड कैसे शिक्षक थे तथा प्रस्तुत ग्रंथ में अनूदित उनकी अध्यापन-प्रणाली के व्याख्यानो का कितना गौरव है, इस सम्बन्ध में यहाँ कुछ जिक्र कर देना उचित जान पड़ता है।

सैद्धांतिक-भौतिकी की जो अध्ययन-प्रणालियाँ म्यूनिख में स्थापित की गयीं वे दो प्रकार की थी—व्यापक और विशिष्ट। पहले प्रकार के व्याख्यान हेमत में १३ सप्ताह के और ग्रीष्म में ११ सप्ताह के अध्ययन-काल में चार घंटे (४०-५० मिनट के) प्रति सप्ताह दिये जाते थे। पूरी प्रणाली तीन वर्षों में समाप्त होती थी। इस प्रकार छ व्याख्यान-मालाएँ हुईं जिनसे प्रस्तुत पुस्तकमाला के छ ग्रंथ बनें। जो विद्यार्थी प्रायोगिक भौतिकी की अध्ययन-प्रणाली ले चुके थे उनके लिए प्रणालियाँ विषय-प्रवेश थीं। म्यूनिख में प्रयोगात्मक भौतिकी के निदर्शन पहले तो 'राटजेन'^२ और बाद में 'इब्लू० वीएन'^३ की अध्यक्षता में दिये गये। प्रयोगात्मक भौतिकी में विद्यार्थी को भौतिक-जगत् की घटनाओं का तथ्यपूर्ण दर्शन तथा मुख्यतया गणित-हीन विधियों से उनके मात्रात्मक मान का ज्ञान कराया जाता था। सैद्धांतिक भौतिकी के व्याख्यानो में प्रारंभिक बातें फिर से बतायी जाती थी परंतु अब इस दृष्टिकोण से कि समस्याएँ किस प्रकार गणितीय विधियों से हल की जायँ तथा किस प्रकार ऐसे एकी-कारक सिद्धांत (वाद) का निर्माण किया जाय जो गूढ़ समस्याओं को हल करने में

सफल हो। विभिन्न व्याख्यान-शृंखलाओं में ये बातें बदलती रहती थी और इन व्याख्यानों के उत्तरार्ध में तत्कालीन प्रासंगिक विषय सम्मिलित कर लिये जाते थे, जिस कारण ये व्याख्यान उन उच्चतर विद्यार्थियों के लिए जो पहले भी इस विषय को पढ़ चुके थे और भी चिन्ताकर्षक हो जाते थे। व्याख्यानों के अतिरिक्त दो घंटे प्रति सप्ताह समस्याओं के विचार-आलोचन में लगाये जाते थे।

विशिष्ट पाठ-क्रमों में दो घंटे प्रति सप्ताह व्याख्यान दिये जाते थे। ये उन विषयों पर थे जो व्यापक प्रणालियों में केवल संक्षिप्त रूप में ही समझाये जा सकते थे या जो केवल तात्कालिक जानकारी प्राप्त करने के लिए थे। इस प्रकार के जो व्याख्यान सोमरफेल्ड देते थे वे या तो उन्हीं के अपने पहले के किये हुए कार्यों से संबंध रखते थे या ऐसे विषयों के अंश होते थे जो कुछ दिनों बाद मौलिक रचनाओं के रूप में निकले। लोरेंज^१ रूपान्तर को चतुः विमितीय अवकाश में हुए घूर्णन की भांति मानना (पुस्तक ३, § २७); तरंग प्रकाशिकी से ज्यामितीय प्रकाशिकी में परिवर्तन (पृ० ४, § ३५); विक्षेपक माध्यम में संकेत-वेग पर विचार (पृ० ४, § ३५); आदि इसके कुछ उदाहरण हैं। पहले दिये गये व्याख्यानों के कुछ कम-चिन्ताकर्षक भागों को निकालकर बाद में ये विषय व्यापक पाठ्यक्रमों में सम्मिलित कर लिये गये थे।

व्याख्यान माला के अतिरिक्त विचार-गोष्ठियों और संभाषणों द्वारा भी उच्चतर विषयों की शिक्षा दी जाती थी। इनमें विद्यार्थी को निदिष्ट विषय का पर्यवेक्षण करना पड़ता था और उस पर वक्तृता देनी होती थी, जिनके लिए कई सप्ताहों के कठिन परिश्रमपूर्ण अध्ययन की आवश्यकता होती थी।

विद्यार्थी की दृष्टि से, सोमरफेल्ड के व्याख्यानों के आकर्षण का कारण उनकी सुव्यवस्था थी—यथा, भौतिक दृष्टि से विषय-प्रवेश; उसका गणितीय सुव्यवस्थापन; व्यवहृत गणितीय विधियों का सहज किंतु व्यापक व्यक्तीकरण; और अंत में भौतिक प्रयोगों द्वारा उपलब्ध परिणामों पर सम्यक् विचार-आलोचन। कक्षा के बोर्ड पर उनकी गहरी, स्पष्ट, लिखाई; तथा उनके रेखाचित्र, इन दोनों के द्वारा, क्लास समाप्ति पर, विद्यार्थी व्याख्यान में बतायी हुई सब बातों का स्पष्ट रूप से पर्यवेक्षण कर सकता था। व्याख्यानों का विषय काफी ऊँचा होता था ताकि अच्छे छात्रों को भी वह आकर्षित रखता था। उस युनिवर्सिटी (विद्यापीठ) में जहाँ न तो व्याख्यानादिकों में कोई हाजिरी ही ली जाती थी और न ही विद्यार्थियों के नाम की कोई जाँच-पड़ताल की

जाती थी, व्याख्यानों में इन सब बातों का होना आवश्यक था। अभ्यास के लिए दी हुई समस्याओं के हल करने में यदि कोई कुछ मौलिकता दिगलता था तो चाहे वह नवागत ही क्यों न हो तुरंत सोमरफेल्ड या उनके सहकारी का ध्यान आकर्षित होता था जिसे विद्यार्थी को बड़ा प्रोत्साहन मिलता था।

विद्यार्थी की अवस्था चाहे जो भी हो वास्तविक योग्यता और उत्तम ब्रिटिश तुरंत पहचान लेने की असाधारण शक्ति सोमरफेल्ड में थी। यही कारण था कि 'दिवाई', 'पाउली', 'हाइजेनबर्ग', अपने अध्ययन-काल के प्रारम्भिक वर्षों में ही उन पर अनुरक्त हो गये थे। इस प्रकार के बहुतेरे वैज्ञानिकों में से यहाँ केवल उन तीन के नाम दिये गये हैं जो आज नोबल-पुरस्कार विजेता हैं। परन्तु भीमन अच्छे विद्यार्थी का भी काफी ध्यान रखा जाता था और अपेक्षाकृत कम जटिल समस्याएँ, कम उत्तर-दायित्व की बातें, उसके मुपुर्द की जाती थी ताकि वह भी अपनी योग्यता का उपयोग कर सके। अयोग्य विद्यार्थी स्वयं भाग जाते थे। इस प्रकार सोमरफेल्ड के शिष्यों का एक अपना ही चुना हुआ दल बन जाता था। परन्तु इस दल में सदैव काफी सरया में छात्र होते थे ताकि उसकी एक ऐसी धारा बहती रहती थी कि नवागत विद्यार्थी भी उस ही अपनी-अपनी नौका उसमें छोड़ सकें। आशा है कि सोमरफेल्ड की व्याख्यान माला का यह भापातर इस धारा को दूर-दूर तक फैलावेगा ताकि अन्यान्य विद्वानों को उसमें अपनी-अपनी नौका छोड़ने की तैयारी में सहायता मिले।

सोमरफेल्ड के ग्रंथों पर लिखित कुछ रचनाओं की सूची :—

1. Anon, Current Biographies, 1950, pp. 537-538. (With Portrait),
2. P. Kirkpatrick, Am. J. Physics (1949). 17, 5, 312-316. (Presentation of the Oerstedt Medal to Sommerfeld by the American Association of Physics Teachers.)
3. M. Born, Proc. Roy. Soc., London, A, (1952). (Obituary.)
4. P.P. Ewald, Nature (1951), 168, 364-366. (Obituary Notice.)
5. W. Heisenberg, Naturwissenschaften (1951). 38, 337.
6. M. V. Laue, Naturwissenschaften (1951). 38, 513-518. (A full appraisal of Sommerfeld's work.)

1. Debye, 2. Pauli, 3. Heisenberg,



प्रथम संस्करण की भूमिका

अपने पुराने सिप्यों के प्रोत्साहन तथा प्रकाशकों के बार-बार के आग्रह से मैंने निश्चय किया कि व्यापक अध्यापन-प्रणाली के अतर्गत सैद्धांतिक भौतिकी पर, वस्तीम वर्ष पर्यंत यथा-नियम, म्युनिख युनिवर्सिटी में दिये हुए व्याख्यानों को पुस्तकाकार प्रकाशित करें।

यह एक विषय-प्रवेशक पाठन-क्रम था जो न केवल मुनिवर्सिटी और पालीटेक्निक इंस्टीट्यूट के भौतिकी के उच्चतर विद्यार्थी ही लेते थे किंतु गणित तथा भौतिकी की शिक्षण उपाधि के लिए पढ़ने वाले छात्र, खगोल-विज्ञान के शिक्षार्थी तथा भौतिकीय रसायन शास्त्र के कुछ विद्यार्थी भी व्याख्यानों के समय उपस्थित रहते थे। सभी विद्यार्थी सामान्यतः अपने अपने विद्यालय के तृतीय और चतुर्थ वर्षों के होते थे। व्याख्यान सप्ताह में चार बार दिये जाते थे और प्रश्नों का समाधान करने के लिए प्रति सप्ताह दो घंटों का समय अलग निर्धारित रहता था। नूतन भौतिकी पर जो विशिष्ट पाठन उक्त व्याख्यान-शृंखला के साथ ही साथ चलता था वह प्रस्तुत पुस्तकावली में सम्मिलित नहीं किया गया है। उसमें बतायी बातें मेरे वैज्ञानिक पत्रजातों, सक्षिप्त रचनाओं तथा अन्य ग्रंथों में आ गयी हैं। यद्यपि यह सच है कि क्वांटम-यांत्रिकी सदैव पृष्ठभूमि में विद्यमान रहती है और जहाँ-तहाँ उसका जिक्र भी आया है, फिर भी इन व्याख्यानों का मूल विषय चिरप्रतिष्ठित (क्lassical) भौतिकी है।

इस पुस्तकमाला की पुस्तकों का क्रम वही है जो अध्यापन-प्रणाली का था, अर्थात्;

- (१) यांत्रिकी।^१
- (२) विकृति-योग्य पिंडों की यांत्रिकी।^२
- (३) वैद्युतिक गतिविज्ञान।^३

(४) प्रकाशिकी ।^१

(५) उष्मा-गतिकी तथा सांख्यिकीय यांत्रिकी ।^२

(६) भौतिकी में आशिक अवकल-समीकरण-बृन्द ।^३

यांत्रिकी के व्याख्यान वारी-वारी से एक वर्ष में स्वयं और दूसरे वर्ष गणित-विभाग के मेरे सहकर्मी देते थे । द्रवगतिकी, वैद्युतगतिकी तथा उष्मागतिकी का शिक्षाक्रम भी साथ-साथ चलता था, और वह शिक्षकों द्वारा पढ़ाया जाता था । सदित विश्लेषण के व्याख्यान अलग ही दिये जाते थे और इसलिए मेरे व्याख्यानों में यह विषय नहीं लिया जाता था ।

अपने व्याख्यानों की तरह ही इन पुस्तकों में भी गणितीय प्रारंभिक (यद्यपि भौतिक) बातों पर समय व्यतीत नहीं किया गया है; वरन् सोधे ही, भरसक शीघ्र, भौतिक समस्याओं पर ही पहुँचा गया है । उद्देश्य यह है कि पाठक के सम्मुख उन विस्तृत और विभिन्न बातों का जीवित-जाग्रत सा चित्र प्रस्तुत किया जाय जो यदि भौतिकीय तथा गणितीय उपयुक्त अवस्थाएँ उचित रीति से चुनी जावें तो बाद (सिद्धांत) के अन्तर्गत आती हैं । अतएव यदि यथाक्रम समर्थन तथा स्वयंसिद्ध रचना में कुछ छूट गया हो तो उसकी अधिक चिंता नहीं की गयी है । हर हालत में केवल गणितीय या तक सवधी लंबे-चौड़े अनुसंधानों से मैं अपने व्याख्यानों के श्रोताओं को न तो डराकर भगा देना ही चाहता हूँ और न चित्ताकर्षक भौतिकीय बातों से उनका ध्यान हटा देना चाहता हूँ । मेरा विश्वास है कि व्याख्यानों में यह ढग ठीक सिद्ध हुआ; इसलिए इन पुस्तकों में भी वही रखा गया है । यद्यपि यथाक्रम व्यवस्थापन के विचार से तो प्लांक के व्याख्यान ऐसे हैं जिनमें कोई त्रुटि नहीं है, फिर भी मैं समझता हूँ कि मेरे व्याख्यानों में अधिक विषय आ सके हैं और गणितीय साधनों का अधिक अच्छा उपयोग किया जा सका है । मैं अपने पाठकों का ध्यान प्लांक के अधिक पूर्ण और अधिक पर्याप्त विवरण की ओर विशेषकर उष्मा-गतिकी और सांख्यिकीय यांत्रिकी के सम्बन्ध में प्रसन्नतापूर्वक आकर्षित करता हूँ ।

प्रत्येक पुस्तक के अंत में जो समस्याएँ दी गयी हैं उन्हें मूल-रचना की संपूरक समझना चाहिए । वे विद्यार्थियों से प्राप्त हुई थी और प्रश्नों वाले घटे में क्लास में वे पूछी गयी थी । प्रारंभिक संह्यात्मक समस्याएँ, जिनकी पाठ्य-पुस्तकों और समस्या-

1. Optics 2. Thermodynamics and Statistical Mechanics.
3. Partial Differential Equations in Physics. 4. Plank.

सग्रहों में भरमार होती है, इन पुस्तकों में साधारणतया नही दी गयी है । समस्याओं की संख्या अध्याय के अनुसार दी गयी है । (सेक्शन्स) प्रकरणों की सत्या लगानार दी गयी है परंतु समीकरणों की संख्याएँ प्रत्येक प्रकरण में अलग-अलग प्रारंभ और समाप्त कर दी गयी है । इस प्रकार प्रत्येक पुस्तक में पहले आये हुए समीकरण केवल अपनी और प्रकरण की संख्याओं द्वारा सूचित किये जा सकते हैं । किसी भी सत्या वाले प्रकरण को मुगमतापूर्वक ढूँढ़ लेने के लिए प्रत्येक पृष्ठ के ऊपरी कोने में अध्याय और प्रकरण की संख्याएँ दे दी गयी है ।

अपने अध्यापन-काल के वर्षों की बातों का स्मरण करने में मैं दो विशेष व्यक्तियों का कृतज्ञतापूर्वक नाम निर्देशन करना चाहता हूँ । वे हैं राटजेन और फेलिक्स क्लाइन । राटजेन ने न केवल मुझे एक विशेष अधिकार युक्त कार्य-क्षेत्र में बुलाकर वृत्तिक उत्साह के लिए बाह्य दशाएँ उत्पन्न की, अपितु उन्होंने सदा मेरा साथ दिया और कई वर्षों तक मेरे बढ़ते हुए कार्य का विस्तार और भी बढ़ाया । इसके पहले ही फेलिक्स क्लाइन मेरी गणितीय बुद्धि को ऐसी चित्त-वृत्ति दे चुके थे जो कि अनुप्रयोगों के लिए सबसे अधिक ठीक है । व्याख्यान देने की कला में अपने विशिष्ट नैपुण्य द्वारा उन्होंने मेरे पढ़ाने की विधि को भी परोक्ष रूप से बहुत प्रभावित किया । विशेषतः यह कह देना चाहिए कि प्रस्तुत व्याख्यानों का अंतिम भाग प्रथम बार उस समय घोषित कर दिया गया था जब मैं अभी गार्टिजन में ही शिक्षक था और उस मुनिवर्सिटी के रीमान, डिरीक्लेट, क्लाइन, इन तीन पंडित-वरों के नामों से सूचित होनेवाली गणितीय परंपरा^१ से खूब अनुप्राणित हो चुका था । उस समय मेरा अध्यापन-क्रम उतना विस्तीर्ण न था जितनी कि प्रस्तुत माला की छठी पुस्तक है परंतु उसने श्रोतागणों में बड़ी हलचल पैदा कर दी थी । जब ये पहले के व्याख्यान बाद में फिर से दिये गये तब मेरे शिष्य बहुधा कहा करते थे कि उन व्याख्यानों द्वारा ही हम (शिष्य) ऐसे गणितीय परिणामों का व्यवहार और अनुप्रयोग वास्तव में समझ पाये थे जैसे कि फोरियर की विधि, फलनवाद के अनुप्रयोग, सीमा पर के मान से सम्बन्धित समस्याएँ ।^१

1. Rontgen and Felix Klein,

2. Riemann—Dirichlet—Klein,

3. Fourier Methods, application of the theory of functions, boundary value problems,

अंत में इन ग्रंथों को इस आशा से प्रस्तुत कर रहा हूँ कि ये हमारे इस मनोरम विज्ञान में पाठक की रुचि आकर्षित करेंगे और उमे उतना ही आनन्द प्रदान करेंगे जितना कि उन लोगों को प्राप्त हुआ था जिन्होंने इस अध्यापन-प्रणाली से शिक्षा ग्रहण की और जिसका कि स्वयं मैंने अपने बहु-वर्षीय अध्यापन-काल में अनुभव किया।

म्यूनिख, सितम्बर १९४२

आर्नाल्ड सोमरफ़ेल्ड

उपोद्घात

यांत्रिकी गणितीय भौतिकी की रीढ़ है। पिछली शताब्दी में इस संबंध का प्रत्येक विषय समझाने के लिए यांत्रिकी आधारण तैयार कर लिया जाता था। परन्तु आजकल भौतिकी के लिए वैसी आवश्यकता नहीं रहती। फिर भी हम समझते हैं कि यांत्रिकी के सिद्धांत, जैसे कि सवेग (गतिमात्रा), ऊर्जा और लघुतम क्रिया संबंधी सिद्धांत, भौतिकी की प्रत्येक शाखा के लिए अत्यन्त महत्त्व के हैं।

इस ग्रंथ का नाम "यांत्रिकी" रखा गया है, "बैस्लेपिक यांत्रिकी" नहीं जैसा कि गणितज्ञ करते हैं। इस पिछले नामका उल्लेख १७८८ में लाग्रान्ज^१ के महान् ग्रंथ में हुआ था। उन्होंने मारी को मारी यांत्रिकी को गणितीय समीकरणों की मगत भाषा में रचने का यत्न किया और उन्हें इस बात का गर्व था कि "मेरी मारी रचनाओं में एक भी रेखाचित्र न मिलेगा।" इसके विरुद्ध, हम भरसक दृष्टान्तों और उपमाओं की सहायता लेंगे। इस ग्रंथ में पाठक को सगोल विद्या, भौतिकी, यहाँ तक कि कहीं-कहीं इजिनियरी (निर्माण आदि विद्या) में भी प्राप्त साकार अनुप्रयोग मिलेंगे जो सिद्धांतों को भली-भाँति समझने में सहायक होंगे।

इस पुस्तक का ठीक-ठीक नाम होना चाहिए, "परिमित संख्या की स्वतंत्रता-युक्त निकायों की यांत्रिकी।" तदनुसार द्वितीय, पुस्तक का नाम होता, "अपरिमित संख्या की स्वतंत्रतायुक्त निकायों की यांत्रिकी"। परन्तु (कदाचित्) स्वतंत्रता की संख्याओं का अभिप्राय बहुत स्पष्ट समझ में न आया और उसका स्पष्टीकरण इस पुस्तक के द्वितीय अध्याय के प्रारंभ में ही किया जा सकेगा; अतएव हमें इस पुस्तक के लिए प्रचलित नाम, अर्थात् यांत्रिकी, से ही सतोष करना पड़ेगा। वास्तव में वह ऐसा नाम है जिससे यह समझने में कोई दुविधा न होगी कि इस पुस्तक के अंतर्गत क्या है।

विषयारंभ हम न्यूटन के ग्रंथ "प्राकृतिक ज्ञान में गणितीय सिद्धान्त"^२ में दिये हुए भौतिक विश्लेषण से करेंगे। इससे यह न समझना चाहिए कि न्यूटन के पहले इस

1. Momentum, energy, and least action 2. Lagrange (1788).

3. "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (London, 1687)

विषय के पंडित थे ही नहीं। आर्किमिडीज, गैलिलियो, केप्लर और हाजेन्स^१ आदि पहले के पंडित हैं। परंतु इसमें संदेह नहीं कि न्यूटन ने ही पहले-पहल व्यापक यांत्रिकी की पक्की नींव डाली। आज भी कुछ थोड़े से परिवर्तन और वृद्धि के अतिरिक्त, जो नींव न्यूटन ने रखी थी वही व्यापक यांत्रिकी का स्वाभाविकतम तथा शिक्षा-शास्त्रानुसार सरलतम विषय-प्रवेश है।

सबप्रथम हम एकाकी संहति-बिंदु^२ अर्थात् कण की यांत्रिकी पर विचार करेंगे।

1. Archimedes, Galileo, Kepler and Huygens
2. Mechanics of the single mass point or particle.

प्रथम अध्याय

कण की यांत्रिकी

§ १. न्यूटन के स्वयंतथ्य

गति के नियम स्वयंतथ्यों के रूप में दिये जायेंगे। सारी अनुभूत बातों को धे पयार्थ रूप में संक्षेप में प्रकट कर देते हैं।

प्रथम नियम—यदि कोई बल उसे अपनी दशा बदलने को धियश न करे, तो प्रत्येक द्रव्यात्मक पिंड अपनी प्रस्तुत दशा में ही रहता है, चाहे वह दशा विराम की हो, चाहे श्रुजुरेला में एक समान गति की।*

इस नियम में जो बल की धारणा प्रस्तुत की गयी है, उसका स्पष्टीकरण हम साम्प्रति न करेंगे। यह भी देखिए कि विराम तथा (श्रुजुरेलाय) एक समान गति,

* इसके तथा आगे की बातों के भी संबंध में यहाँ पर निम्नलिखित पुस्तक का उल्लेख कर देते हैं : Ernst Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung (8th ed., F.A., Brockhaus, Leipzig, 1923). जिसके अंग्रेजी अनुवाद का नाम है : The Science of Mechanics (यांत्रिकी का विज्ञान) Open Court Publishing Co., LaSalle, Ill., 1942.

इस उत्तम, विवेचनापूर्ण, इतिहास का यांत्रिकी के सभी विद्यार्थियों को अध्ययन करना चाहिए, विशेषतः इसलिए कि प्रस्तुत पुस्तक में हम यांत्रिकी की धारणाओं को केवल इस प्रकार ही दे सकते हैं कि उनका तुरंत ही व्यवहार किया जा सके; उनका प्रादुर्भाव तथा स्पष्टीकरण कैसे हुआ, इन बातों को बताने का हमें अवसर नहीं मिलेगा। परंतु इससे यह न समझना चाहिए कि हम मात्र के उन प्रत्यक्षवादीय विचारों positivistic philosophy, से सहमत हैं जिनका विकास उन्होंने अपने ग्रंथ के चतुर्थ अध्याय के चतुर्थ प्रकरण में किया है जहाँ उन्होंने आर्थिक सिद्धांत Economy Principle, पर आवश्यकता से अधिक जोर दिया है तथा परमाणु-वाद का खंडन किया है और औपचारिक अविच्छिन्नता-वादों से सहमति प्रकट की है।

दोनों ही दशाएँ एक ही श्रेणी की समझी गयी हैं और पिंड की स्वाभाविक अवस्थाएँ मान ली गयी हैं। यह नियम स्वीकार कर लेता है कि पिंडों में अपनी इन स्वाभाविक दशाओं में ही बने रहने की प्रवृत्ति होती है। इस प्रवृत्ति को पिंड का अवस्थितित्व कहते हैं। यह स्वयंततः बहुधा न्यूटन के प्रथम नियम के बदले गैलिलियो कृत अवस्थितित्व नियम के नाम से पुकारा जाता है। इस बारे में यह कह देना चाहिए कि यद्यपि यह बिल्कुल ठीक है कि (शून्य-प्रायः नति के घ्रातल पर सरकते हुए पिंडों के अपने प्रयोगों के चरम परिणामस्वरूप) गैलिलियो यह नियम न्यूटन से बहुत पहले ही निर्धारित कर चुके थे, तथापि यह न्यूटन को ही विशेषता थी कि उन्होंने इस नियम को अपनी कार्यप्रणाली में सर्वोच्च स्थान दिया। न्यूटन के शब्द, "पिंड" (बॉडी) के स्थान पर किलहाल "कण" या "संहति-विंदु" शब्दों का उपयोग किया जायगा।

प्रथम नियम का गणित की दृष्टि से सूत्रीकरण करने के लिए हम "प्रिसिपिया" में इस नियम से पहले आने वाली प्रथम और द्वितीय परिभाषाओं का उपयोग करेंगे।

द्वितीय परिभाषा—गति की मात्रा ही उसकी माप है और वेग तथा द्रव्य-मात्रा, दोनों ही के संयोग से बनती है।‡

अतएव "गतिमात्रा" हुई दो पदों का गुणनफल; एक तो वेग, जिसका तात्पर्य ज्यामितीयतः प्रकट है; * और दूसरा, "द्रव्य की मात्रा", जिसकी व्याख्या भीतिकतः

1. Inertia

‡ न्यूटन की प्रिसिपिया का एंड्रयू मोट्ट (Andrew Motte) कृत अंग्रेजी अनुवाद—अनुवादक।

न्यूटन का जीवन काल था—२५ दिसंबर १६४२ से २० मार्च १७२७ तक। प्रिसिपिया का प्रथम संस्करण १६८७ में प्रकाशित हुआ था। उसका तीसरा संस्करण १७२५ में निकला था। जैसा कि नाम ही से प्रकट है, प्रिसिपिया उस समय के विद्वानों की भाषा लैटिन में लिखा गया था। अंग्रेजी भाषांतर, इस तृतीय संस्करण का अनुवाद श्रीमॉट द्वारा, १७२९ में प्रकाशित हुआ। इस अंग्रेजी भाषांतर का पुनर्मुद्रण, कैलिफोर्निया युनिवर्सिटी के गणितीय इतिहास के सम्मानित अध्यापक श्री फ्लोरिन काजोरी (Florin Cajori,) के द्वारा संपादित, १७३४ में केम्ब्रिज युनिवर्सिटी प्रेस ने प्रकाशित किया था—

* प्रकट तब जब कि वेग की माप के लिए अभिदेश प्रणाली चुन ली गयी हो।

करती है। न्यूटन इस बात का प्रयत्न प्रथम परिभाषा में यों करते हैं कि द्रव्य की मात्रा अपने घनत्व तथा आयतन के संयोग से निर्धारित की जाती है। परंतु स्पष्ट है कि यह तो परिभाषा की विडम्बना मात्र है क्योंकि स्वयं घनत्व की परिभाषा इसके अतिरिक्त और कोई हो ही नहीं सकती कि वह एक इकाई आयतन में आये हुए द्रव्य की मात्रा है। उसी प्रथम परिभाषा में न्यूटन यह भी कहते हैं कि “द्रव्य - मात्रा” के स्थान में वे “मास” (संहति)¹ शब्द का उपयोग करेंगे। इस बात में हम उनका अनुकरण करेंगे परंतु संहति (एव वल) की भौतिकीय परिभाषा आगे चल कर करेंगे।

इस प्रकार गति की मात्रा संहति और वेग का गुणनफल हो गयी। वेग की भांति गति-मात्रा भी दिशायुक्त राशि हुई, अर्थात् “सदिश”। हम लिखते हैं ‡

$$(1) \quad \text{गतिमात्रा } P = m \times V \text{ संहति} \times \text{वेग}$$

और गति संबंधी प्रथम नियम का सूत्रीकरण इस प्रकार करते हैं कि

$$(2) \quad P = \text{const. नियतांक, वलों की अनुपस्थिति में।}$$

इस प्रकार सूत्रीकृत अवस्थितित्व के नियम को हम अपनी यांत्रिकी में सबसे पहले रखेंगे। वह कई शताब्दियों में हुए विकास का परिणाम है और उतना स्वयं प्रकट नहीं है जितना कि आज दिन हमें जान पड़ता है। उदाहरणतः, दर्शनशास्त्रज्ञ श्री कैंट³, न्यूटन के बहुत दिनों बाद, “सजीव (प्रत्यक्ष) वलों के सच्चे निरूपण पर विचार” शीर्षक १७४७ में लिखित अपनी रचना में कहते हैं कि “दो प्रकार की गतियाँ होती हैं—एक तो वे जो कुछ समय बाद नहीं रहती और दूसरी वे जो जारी रहती हैं।

1. Mass

‡ हम यह मान लेंगे कि पाठक ‘सदिश’ बीजगणित की प्रारंभिक, मौलिक बातें जानते होंगे। परंतु सदिश की क्रियाओं के प्रादुर्भाव और यांत्रिकी (जिसमें तरलों की यांत्रिकी भी सम्मिलित है), इनमें घना संबंध होने के कारण हमें बहुधा यांत्रिकी की धारणाओं के साथ-साथ सदिश की धारणाओं के भी व्यक्तीकरण का अवसर मिलेगा।

संकेतन अर्थात् अंकन-पद्धति के बारे में कह देना चाहिए कि इस पुस्तक में सदिश सर्वथा मोटे अक्षरों द्वारा सूचित किये जायेंगे यथा, कोणीय वेग के लिये W , जहाँ कहीं भी यह (अक्षीय) सदिश की भांति आता है। रेखा चित्रों में सदिशों को सूचित करने के लिए कभी-कभी उनके ऊपर तीर का बिन्दु दे दिया जायेगा।

2. Kant : Thoughts on the True Estimation of Living Forces.

जो गतिर्याँ कॅण्ट के विचारानुसार अपने आप बंद हो जाती हैं, वे आधुनिक—एवं न्यूटन के—मतानुसार धर्षणीय बलों द्वारा कम की जाकर अंत में नष्ट हो जाती हैं।

“गति की मात्रा” यह शब्दपुत्र जरा ठीक नहीं जँचता क्योंकि उससे mV का सदिश-लक्षण प्रत्यक्ष नहीं होता। उसके स्थान में “आवेग” शब्द का व्यवहार अधिक उचित होता क्योंकि उससे उस विशेष मात्रा के किसी विशेष दिशा में लगने वाले धक्के का बोध होता है जोकि किसी दिये हुए mV और विरामशील पिंड को टक्कर से उत्पन्न होता है। परंतु यांत्रिकी में पारिभाषिक शब्द “आवेग” का उपयोग जरा दूसरे ही अर्थ में होता है, इसलिए हमें सदिश P के लिए “गतिमात्रा” या आधुनिक काल का “संवेग” शब्द रखना ही पड़ेगा। अब हम अवस्थितिरेख का नियम, या ‘न्यूटन का गति का प्रथम नियम,’ इन दोनों के स्थान में “संवेग के संरक्षण का नियम” कह सकते हैं।

इसके बाद अब हम न्यूटन के द्वितीय नियम पर विचार करेंगे। गति संबंधी वास्तविक नियम यही है। गति में परिवर्तन, आरोपित बल के समानुपाती है, और जिस ऋजु रेखा में बल आरोपित हो, उसी दिशा में होता है।

“गति में परिवर्तन” से निस्संदेह न्यूटन का अभिप्राय उस परिवर्तन से था जो समय के अंतर से ऊपर परिभाषित संवेग P में होता है, अर्थात् दिष्ट \dot{P} । न्यूटन के सकेतन में \dot{P} के ऊपर के बिंदु से समय संबंधी अवकलन सूचित होता है, अर्थात् $\dot{P} = \frac{dP}{dt}$ यदि बल (अंग्रेजी का फोर्स) F अक्षर द्वारा सूचित किया जाय तो हम द्वितीय नियम इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$(3) \quad \dot{P} = F$$

संवेग P द्वारा सूचित किया गया था। प्रस्तुत नियम दर्शाता है कि कालांतर में संवेग किस प्रकार परिवर्तित होता है और, इसलिए, संक्षेप में उसे “संवेग का नियम” कह सकते हैं।

अभाग्यवश, इस नियम को बहुधा, विशेषकर गणितीय आलेखों में, “न्यूटन का त्वरण संबंधी नियम” कह देते हैं। यह ठीक है कि यदि संहति m नियत समझी जाय तो (3) और (1) का संयोग (3a) से सर्वसम है जहाँ पश्चोक्त है—

$$(3a) \quad m\dot{V} = F \text{ अर्थात् संहति} \times \text{त्वरण} = \text{बल}।$$

परंतु संहति सर्वेदा नियत नहीं रहती। उदाहरणतः आपेक्षिकता-वाद में संहति चर है। यहाँ न्यूटन का सूत्रीकरण (3) ही, भविष्यवाणीवत्, ठीक है। आगे चलकर, चतुर्थ प्रकरण (५४) में, चर संहति के कई उदाहरण दिये जायेंगे। वहाँ (3) और (3a) सूत्रीकरणों के मध्य-संबंध पर “विशेष दृष्टि” डाली जायगी। प्रमगवज, सरलता के विचार से जो यांत्रिक विकास एकाकी संहति-विद्यु के सन्निकटनम है, वह घूर्णन युक्त दृढ़ पिंड है। इस नियम पर विचार करने में जो गति का समांतरण निकलता है वह (3) के समान है कि “संवेग-पूर्ण (अर्थात् कोणीय संवेग) के परिवर्तन की दर = बल का घूर्ण (अर्थात् ऐंठ)”।

कोणीय संवेग के संबंध में (3a) जैसे समीकरण का निकलना असंभव है। आपेक्षिकता की संहति-अनियतता की भाँति के एक दूसरे ही प्रभाव का यहाँ जिक्र कर देना चाहिए। इसमें संहति के स्थान में अवस्थितित्व-घूर्ण आता है, जो घूर्णनक्ष के परिवर्तन के अनुसार परिवर्तित होता रहता है।

अब बल की धारणा संबंधी अपने विचार विलकुल स्पष्ट कर लेना चाहिए। किर्कहॉफ* बल को तो केवल मात्र संहति और त्वरण के गुणन से प्राप्त राशि कहकर उसकी पदच्युति करना चाहते थे। हर्ट्ज† ने भी विचाराधीन निकाय को अन्य, व्यापकतः परोक्ष, प्रस्तुत निकाय से मध्य-क्रियाशीलन कार्यों से संयोजित कर, बल को हटाकर उसके स्थान पर उपयुक्त मध्य-क्रिया ही बैठा देने का यत्न किया। हर्ट्ज ने यह कार्यक्रम प्रशंसनीय सागत्यपूर्वक समाप्त किया; परंतु उसके कोई सफल परिणाम न निकले और नौसिखुए के लिए तो वह विशेषकर अनुपयुक्त है।

हमारा विचार तो यह है कि अपने स्नायुओं को काम में लाते समय जो हमारा अनुभव होता है उससे हमें सीधे ही सीधे बल का गुणात्मक बोध हो जाता है। फिर पृथिवी हमें भ्वाकृष्टि अर्थात् गुरुत्व द्वारा एक तुलनात्मक मानक प्रदान करती है

1. Inter-relation,

* Gustav (गुस्टाफ) Kirchhoff. Vol I of his Vorlesungen uber mathematische Physik (गणितीय भौतिकी पर विचार) p. 22

† Heinrich Hertz. Miscellaneous Papers (विविध रचनाएँ) Vol., III, Principles of Mechanics, (यांत्रिकी के सिद्धांत) Macmillan, New York, 1896.

जिससे हम अन्य सब वस्तुओं की मात्रात्मक माप कर सकते हैं। इस काम के लिए हमें केवल उपयुक्त वजन द्वारा किसी भी बल के प्रभाव का संतुलन माप करना होता है। (धिरनी और डोरी द्वारा हम शुल्त्व के ऊर्ध्वाधर बल को किसी भी दिये हुए बलकी क्रिया की दिशा के प्रतिकूल लगा सकते हैं।) इसके अतिरिक्त यदि हम कई एक-ही भार के पिंड, अर्थात् "बट्टों का फुलक", बनावें, तो एक ऐसा परीक्षामूलक मापक्रम तैयार हो जाता है जिससे बल की मात्रात्मक माप की जा सकती है।

बल की धारणा के लिए वही बात लागू है जो अन्य सब भौतिकीय धारणाओं या नामों को लागू है कि—शाब्दिक परिभाषाओं में बहुत कम आशय होता है; भौतिक अभिप्राययुक्त परिभाषा वैसे हो बन जाती है जैसे ही कि किसी प्रस्तुत राशि की माप की विधि निर्दिष्ट कर दी जाय। इस प्रकार के निर्देशन में प्रायोगिक प्रक्रिया का ध्योरा देने की आवश्यकता नहीं होती किंतु केवल राशि की माप करने के सिद्धांत मात्र का कह देना पर्याप्त है।

शुल्त्व के उपयोग वाला उपर्युक्त निर्देशन संवेग के नियम (3) के दाहिनी ओर के संकेत को साकारता प्रदान करता है; इस प्रकार वह एक वास्तविक भौतिकीय चयन हो जाता है। यह सच है कि बायीं ओर के संकेत में संहति, m , आती है जिसकी अभी कोई परिभाषा नहीं की गयी है। इसका यह मतलब नहीं कि संहति को परिभाषा इस नियम की केवल भाग अंतर्वस्तु है। क्योंकि नियम यह दर्शाता है कि बल जो राशि बल निर्धारित करता है वह p नहीं \dot{p} या कदापि \ddot{p} है। चतुर्थ प्रकरण (५४) में देखेंगे कि यदि संहति चर हो तो उसकी परिभाषा कैसे प्राप्त की जाती है। आपेक्षिकता सम्बन्धी संहति उदाहरणवत् होगी।

तृतीय नियम—क्रिया सदा प्रतिक्रिया के बराबर होती है, या दो पिंड जो आकर्षण शक्ति एक दूसरे पर लगाते हैं वह सदा मात्रा में बराबर परन्तु दिशा में प्रतिकूल होती है।

यह क्रिया और प्रतिक्रिया का सिद्धांत है। वह कहता है कि प्रत्येक दाव के लिए प्रतिकूल दिशा में भी दाव होता है। प्रकृति में बल सदा द्वैत रूप में प्रकट होता है। गिरता हुआ पत्थर पृथिवी को उसी जोर से आकर्षित करता है जिससे कि पृथिवी पत्थर को।

इस नियम के कारण एक एकाकी संहति बिन्दु की यांत्रिकी से यौगिक निकायों की यांत्रिकी को पहुँचना संभव हो सका है। अतएव यदि एक उदाहरण दें तो कह सकते हैं कि निर्माण संबंधी स्थैतिकी^१ के सारे क्षेत्र के लिए वह मौलिक है।

बलों के समांतर चतुर्भुज सम्बन्धी नियम को हम अपना चतुर्थ नियम मानेंगे, यद्यपि न्यूटन के लेखों में वह केवल मात्र अन्य गति संबंधी नियमों के परिवर्द्धन या उपप्रेम्य (कॉरोलरी) की भाँति मिलता है। चतुर्थ नियम कहता है कि यदि एक ही संहति-बिंदु पर दो बल लग रहे हों तो उनका संयुक्त फल ऐसा होता है मानों उनसे बने हुए समांतर चतुर्भुज के विकर्ण जितना बल वहाँ लग रहा है। मतलब यह कि बलों का योग सदिशयत् होता है। यह स्वयं-प्रकट सा जान पड़ता है, क्योंकि द्वितीय नियम में हमने बल, F , को सदिश, \vec{P} , के बराबर रख दिया था। परंतु वास्तव में, जैसा कि माख ने जोर देकर कहा था, चतुर्थ नियम में यह स्वयंत्य समाया हुआ है कि किसी संहतिबिंदु पर लगा हुआ प्रत्येक बल संहति की गति में इस प्रकार परिवर्तन करता है मानों वही अकेला वहाँ लग रहा है। अतएव बलों का समांतर चतुर्भुज स्वप्रसिद्धतः एक ही बिंदु पर एक ही साथ लगे हुए अनेक बलों के प्रभावों की स्वतंत्रता या, अधिक व्यापकतया, बलों के अध्यारोपण का सिद्धांत स्थापित करता है। निस्संदेह यह पिछली अभ्युक्ति एवं उससे पहले कहे हुए गति के नियमबृंद हमारे सारे अनुभवों के आदर्शिकरण तथा उनका यथार्थ सूत्रीकरण मात्र है।

बल की धारणा प्रस्तुत करने के बाद अब हम यहाँ कार्य या कर्म (W) की धारणा इस परिभाषा द्वारा प्रस्तुत करेंगे कि

$$(4) \quad dV = \mathbf{F} \times d\mathbf{s} = F ds = \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s})$$

अतएव कर्म “बल वार दूरी” के बराबर नहीं जैसा कि बहुधा कहा जाता है, किंतु “पथ की ओर बल के घटक वार पथ-दैर्घ्य” या “बल वार बल की ओर पथ-दैर्घ्य के घटक” के।

इस अभ्युक्ति से कि “बलों का योग सदिशीय होता है”, कोटिपूरक यात तुरंत निकल आती है कि “कर्म का योग बीजगणितीयतः होता है।” वास्तव में,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \mathbf{F};$$

और, सदिशों के अदिक् गुणन से,

$$(5) \quad \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s} + \dots = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

यहाँ F परिणामी बल है। अदिगुणन^१ की परिभाषा (४) में अंतर्भावित है। इससे यह अपने-आप हो जाता है कि, उदाहरणतः, (५) के प्रथम गुणन में केवल ds_1 अर्थात् दूरी का प्रथम बल F_1 की ओर का घटक, आता है। अवश्य (५) के स्थान में हम लिख सकते हैं

$$(6) \quad dW_1 + dW_2 + \dots = dW,$$

जैसा कि ऊपर कहा जा चुका है।

कर्म की धारणा से शक्ति (पावर) की धारणा संबंधित है; शक्ति = एक इकाई काल में किया हुआ कर्म।

इन उपोद्घातीय कथनों को समाप्त करने के पहले हमें यह ठीक कर लेना होगा कि यहाँ तक आयी हुई यांत्रिक राशियों की माप कैसे की जाय। इस काम के लिए दो मापक पद्धतियाँ हैं अर्थात् भौतिकीय (या निरपेक्ष) और व्यावहारिक (या गुरुत्वाकर्षणीय) मीटरीय पद्धति। दोनों में भेद यह है कि निरपेक्ष पद्धति में ग्राम (या किलोग्राम) संहति का मापक (इकाई) है; गुरुत्वाकर्षणीय पद्धति में किलोग्राम (या ग्राम) बल का मापक है। पश्चोक्त पद्धति में हम किलोग्राम के भार की बात करते हैं और कहते हैं कि

एक किलोग्राम-भार = $g \times$ एक किलोग्राम संहति [$1kg\text{-भार} = g \times 1kg\text{संहति}$ ।]

यहाँ g गुरुत्वाकर्षणीय त्वरण है जो कि पृथ्वी के स्थान पर निर्भर करता है। ध्रुवों पर उसका मान भूमध्यरेखा पर होने वाले मान से तनिक अधिक है क्योंकि पृथ्वी-केन्द्र से ध्रुवों की दूरी भूमध्य रेखा की दूरी से जरा कम है, एवं अपकेन्द्र बल भी कम है। इसलिए Kg (किग्रा) भार स्थान पर निर्भर करता है। किग्रा-भार का नमूना (न्यायदर्श)^२ एक स्थान से दूसरे स्थान पर नहीं ले जाया जा सकता। इस कारण, गुरुत्वाकर्षणीय पद्धति यथार्थ माप के लिए उचित नहीं। इसके विपरीत, भौतिकीय पद्धति को “निरपेक्ष मापन पद्धति” कहते हैं। परंतु फिर भी, गुरुत्वीय पद्धति के हम इतने अभ्यस्त हो गये हैं कि बहुत से स्थानों में जहाँ वास्तव में “संहति” शब्द का व्यवहार करना चाहिए वहाँ, वैज्ञानिक लेखों में भी, “भार” शब्द का व्यवहार सदा के लिए होने लगा है। उदाहरणतः हम कहते हैं कि विशिष्ट भार, जबकि कहना चाहिए विशिष्ट संहति या घनता। इसी प्रकार कहते हैं परमाणव या आणव भार^३ यद्यपि यहाँ गुरुत्वाकर्षण से उत्पन्न त्वरण से कुछ भी संबंध नहीं।

1. Scalar product 2. Sample

3. Atomic or molecular weight

गॉस' ने निरपेक्ष पद्धति को जन्म दिया था; परंतु वैसा करने में वे काफी उचित-किचाये थे। प्रारंभ में वे भी बल को ही मौलिक मात्रक बनाने के पक्ष में थे, क्योंकि पार्थिव चुम्बकत्व संबंधी उनकी भाषों में संहति की अपेक्षा भार का ही महत्त्व अधिक होता था। परंतु वे अपने इन परिणामों को सारे भूगोल के लिए लागू करना चाहते थे। अतएव मात्रक (यूनिट) के लिए उन्हें ऐसी राशि लेनी पड़ी जिसका मान स्थान-स्थान पर नहीं निर्भर करता।

नीचे हमने दोनों पद्धतियों को साथ-साथ रख दिया है; साथ ही व्युत्पन्न मात्रक भी दे दिये गये हैं—डाइन, अर्ग, जूल, वाट, अश्व-शक्ति या अ० श०।^१

निरपेक्ष पद्धति (Absolute System) (स ग स)	गुरुत्वीय पद्धति (Gravitational system) (म क स)
सेटीमीटर (सें० मी०) Cm	मीटर m
ग्राम (संहति) g (mass)	किलोग्राम (भार) Kg weight
१ किलोग्राम भार (kg weight) $= 9.81 \times 10^3$ ग्राम (g) सेमी (cm) $\text{से०}^{-2} (\text{sec})^{-2}$ $= 9.81 \times 10^3$ डाइन (dyne)	१ ग्राम संहति (g mass) $= \frac{1kg}{1000} \times \frac{1}{g} \text{ Sec}^{-2} m^{-1}$
१ अर्ग (erg) = 1 dyne \times 1 cm	१ कर्म-मात्रक (unit of work) $= 1$ किग्रा (kg) \times 1 मीटर (m)
१ जूल (joule) = 10^7 अर्ग	
१ मीटर किलोग्राम भार (mkgweight) $= 1000g \times 100$ अर्ग $= 9.81 \times 10^7$ erg $= 9.81$ जूल (joule)	
१ वाट (Watt) = 1 जूल (joule) sec^{-1}	१ शक्ति-मात्रक (unit of power) $= 1kg \text{ m sec}^{-1}$
१ किलोवाट (killowatt) $= 1000 \text{ joule sec}^{-1}$ $= \frac{1HP}{0.736} = 1.36HP$	१ HP = $75kg \text{ m sec}^{-1}$ $= 75 \times 1000 \times 100 \times 9.81 \text{ erg, sec}^{-1}$ $= 75 \times 9.81$ वाट $= 0.736$ किलोवाट (kw)

वता देना चाहिए कि उपयुक्त सार्व-राष्ट्रिय आयोगों के एक निर्णय के अनुसार १९४० में स ग स (CGH) पद्धति के स्थान पर एक निरपेक्ष म क म (MKS) पद्धति होने वाली थी । इस पद्धति में सेंटीमीटर के स्थान पर मीटर आता है और संहति का मात्रक ग्राम के बदले किलोग्राम (सहस्रग्राम) बन जाता है; समय का मात्रक सेकंड ही रहता है । यह निर्णय ज्यार्जी^१ के एक प्रस्ताव से मिलता जुलता है, जिसमें दिखाया है कि यह पद्धति केवल वैद्युतगतिकी ही में, एक अतिरिक्त स्वतंत्र चतुर्थ वैद्युत मात्रक के साथ, अपने उपयोग दर्शाती है (देखिए इस व्याख्यानमाला की तृतीय पुस्तक) । यांत्रिकी में प्रस्तावित परिवर्तन से यह लाभ होगा कि जूल और वाट की परिभाषाओं में कष्टदायी दस-की-पातें लुप्त हो जाती हैं । म और क के नवीन बृहत्तर मात्रकों में कार्य और शक्ति के मात्रक निम्नलिखित हो जाते हैं ।

$$1 M^2 K S^2 = 10^7 \text{ cm}^2 \text{ g sec}^2 = 1 \text{ joule जूल}$$

$$\text{और } 1 M^2 K S^3 = 10^7 \text{ cm}^2 \text{ g sec}^3 = 1 \text{ watt. वाट}$$

नयी पद्धति में बल का मात्रक न्यूटन (newton) कहलाता है ।

$$\text{एक-न्यूटन (newton)} = 1 M K S^{-2} = 10^5 \text{ cm g sec}^{-2} = 10^5 \text{ dyne (डाइन)} ।$$

यह भी ज्यार्जी पद्धति की उपयोगिता समझी जा सकती है; क्योंकि इसमें बल का नया मात्रक, अधिकतर सुभीते के गुस्त्विय मात्रक, किलोग्राम-भार (kg-weight) के पास पहुँच जाता है । बल का पुराना मात्रक, डाइन बहुत सी बातों के लिए अनुविधा-जनक तथा बहुत छोटा है ।

§ २ आकाश, काल और अभिवेश-पद्धतियाँ

आकाश^१ और समय संबंधी न्यूटन के विचार नवयुग के हम लोगों को सारहीन से जान पड़ते हैं और केवल मात्र तथ्य को ही अपने विश्लेषण का आधार बनाने वाले उनके घोषित संकल्प का विरोध सा करते प्रतीत होते हैं । वे कहते हैं कि—

“निरपेक्ष आकाश, अपने ही स्वभाव वश, किसी भी बाहरी दशा पर न निर्भर करता हुआ, सदा एक-जैसा तथा अचल रहता है ।

1. G. Giorgi,

* विषयारंभ करनेवाले को यदि इस प्रकरण में दिये गूढ़ विचार कदाचित् अपरिचित नात हों तो वह इसका तथा प्रकरण ४ का अध्ययन कुछ समय बाद कर सकता है ।

2. Space

“निरपेक्ष, यथार्थ तथा गणितीय काल या समय, अपने आप, और अपने स्वभाववश, समभावपूर्वक, किसी भी बाहरी दशा पर न निर्भर करता हुआ रहता है। समय का दूसरा नाम स्थायीपन है।”

इन दो उद्धरणों से यह परिणाम निकलता है कि न्यूटन ने यह न सोचा कि निरपेक्ष काल कहाँ से निकाला जायगा तथा अचल निरपेक्ष आकाश में और एक जैसी चाल से चलते हुए आकाश में क्या भेद था। ये बातें इसलिए और भी अधिक आश्चर्य-प्रद हैं क्योंकि उन्होंने विराम की तथा एक समान गति की दशाओं को अपने प्रथम नियम में एक ही श्रेणी में रखा था। इसके दूसरी ओर, निरपेक्ष और सापेक्ष गति का भेद स्पष्ट करने का यत्न उन्होंने अपने सुप्रसिद्ध “डोल के प्रयोग” द्वारा किया।* इस प्रयोग में बटे हुए रस्से द्वारा एक डोल को लटका कर उसे पानी से भर देते हैं। इसके बाद डोल को एकाएक छोड़ देते हैं और जैसे जैसे लपेट खुलती है, डोल अपने समिति-अक्ष पर घूर्णन करने लगता है। पहले तो पानी का पृष्ठ समतल रहता है यद्यपि पानी और डोल का सापेक्ष वेग काफी अधिक होगा। परंतु धीरे-धीरे पानी, डोल की दीवारों के घर्षण से, गतियुक्त हो कर दीवारों पर चढ़ने लगता है और उसका पृष्ठ सुपरिचित परवलयीय आकार के गड्ढे के रूप में हो जाता है। अंत में एक स्थिर दशा आती है जिसमें पानी और डोल के बीच कुछ भी सापेक्ष गति नहीं रहती। परन्तु इस समय पानी की आकाश में “निरपेक्ष” गति अधिकतम होगी और तदनुसार उसके पृष्ठ की वक्रता भी अधिकतम होगी।

वास्तव में यह प्रयोग केवल यही दिखलाता है कि घूर्णन युक्त डोल ऐसी अभिनिर्देश पद्धति नहीं प्रस्तुत करता जिससे पानी की गति समझी जा सके। तो क्या पृथिवी भी ऐसी ही अनुपयुक्त अभिनिर्देश पद्धति प्रस्तुत करती है? वह भी घूर्णन करती है और साथ ही सूर्य के चारों ओर एक कक्षा पर चलती है। व्यापकतः, यांत्रिकी में एक आदर्श अभिनिर्देश-पद्धति के लिए क्या-क्या प्रतिबंध या शर्तें हैं? अभिनिर्देश-पद्धति से ऐसे ढाँचे का मतलब है जिससे किसी सहति-बिंदु के स्थान तथा समय का बीतना, ये

* “यह प्रयोग मैंने स्वयं किया है,” ऐसा कहने में कदाचित् न्यूटन का उन तत्कालीन विद्वानों, संभवतः अपने ही देश में हुए फ्रेंसिस बेकन (Francis Bacon), की ओर संकेत था जो बिना स्वयं किये हुए प्रयोगों के परिणामों का वर्णन किया करते थे।

वातें जानी जा सकें। इनके लिए हम निर्देशांकों^१ की कार्तीय (Cartesian) पद्धति x, y, z , तथा काल-मापन^२ t , ले सकते हैं।

अपने काम-काज के लिए, उपयुक्त अभिदेश पद्धति चुनने में हमें खगोलज्ञों पर निर्भर करना होगा। निर्देशांक अक्षों के लिए स्थिर तारावृन्द पर्याप्त नियत दिखाएँ प्रस्तुत करते हैं और नाक्षत्र दिन^३ पर्याप्त नियत कालांतर प्रस्तुत करता है। परंतु साथ ही साथ, सैद्धांतिकतया हमें एक अरचिकर पुनरुक्ति का सामना करना पड़ता है। आदर्श अभिदेश-ढाँचा वह है जिसमें पर्याप्ततः चल-स्वतंत्र पिण्ड के लिए गैलिलियो का अवस्थितित्वनियम^४ ग्योष्ट यथार्थता से पालित होता हो। इस प्रकार प्रथम नियम केवल एक औपचारिक सर्वसमिका या परिभाषा की श्रेणी में बदल दिया जाता है। केवल एक साधक बात जो कि नियम में बच जाती है, और जो केवलमात्र औपचारिक नहीं है, यह है कि इस नियम से यह अवश्य सिद्ध होता है कि उपयुक्त गुणपूर्ण अभिदेश पद्धतियाँ विद्यमान अवश्य हैं। हमारे और अनुभव सूचित करते हैं कि खगोलविद्या-नूसार स्थिति और समय का निर्धारण इस प्रकार की आदर्श पद्धति के बहुत ही पास पहुँच जाता है।

मूलतः, हमारा आशय तब भी मही होता है जब हम कहते हैं कि यांत्रिकी के नियम अवस्थितित्ववीय ढाँचे के अस्तित्व को पहले से ही मान लेते हैं; अर्थात् एक काल्पनिक अग-सस्यान (गठन) जिसके अद्यवृत्त केवल मात्र अवस्थितित्व के अधीन चलते हुए पिण्डों के प्रक्षेप-पथ हैं।

अब प्रश्न यह उठता है कि यह आदर्श अभिदेशपद्धति निर्धारित कहाँ तक है। क्या ऐसी पद्धति एक ही है, x, y, z, t , की या कदाचित् ऐसी असंख्य पद्धतियाँ हैं? न्यूटन का प्रथम नियम इस प्रश्न का उत्तर तुरंत ही दे देता है क्योंकि वह बताता है कि कोई भी दो पद्धतियाँ, x, y, z, t , और x', y', z', t' , तुल्य है, बशर्ते कि उनमें भेद केवल एकसमान स्थानांतरात्मक गति का ही हो। गणितीय रूप में

$$\begin{aligned} (I) \quad x' &= x + \alpha_0 t \\ y' &= y + \beta_0 t \\ z' &= z + \gamma_0 t \\ t' &= t \end{aligned}$$

अवकाशीय निर्देशांकों x, y, z , को अपने मूलबिंदु के प्रति घूर्णन करा के, इस रूपांतर

(1) को हम व्यापकीकृत कर सकते हैं। इसका मतलब यह हुआ कि (1) के x, y, z के स्थान पर नये निर्देशांक ξ, η, ζ (यूनानी अक्षर क्साई, ईटा, जोटा) रख दिये जायें जो ऐसे हों कि

$$(2) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

यह प्रतिबंध एक स्वेच्छ (अनियत) लम्बकोणीय रूपांतरण परिभाषित करता है। यदि दैशिक कोटिज्याएँ हों $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, तो इससे निकलता है

$$(3) \quad \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline \xi & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \eta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \zeta & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

इस अनुसूची को बायें से दायें या ऊपर से नीचे, दोनों प्रकार से पढ़ सकते हैं।

(2) के कारण ये α, β, γ निम्नलिखित सुज्ञात संबंध सतुष्ट करते हैं कि

$$(4) \quad \sum \alpha_k^2 = \sum \beta_k^2 = \sum \gamma_k^2 = 1; \sum \alpha_k \beta_k = \dots = 0 \text{ इत्यादि।}$$

यदि अब हम (1) के दक्षिणांश के x, y, z के स्थान पर (3) के ξ, η, ζ रख दे तो हमें निम्नलिखित व्यापकीकृत रूपांतरण अनुसूची* मिल जाती है

$$(5) \quad \begin{array}{c|cccc} & x & y & z & t \\ \hline x' & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 \\ y' & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 \\ z' & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_0 \\ t' & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

उच्चकोटीय यात्रिकी के लिए चिह्नित पद्धति x', y', z', t' उतना ही अच्छा अभिवेश ढाँचा है जितना कि अचिह्नित पद्धति x, y, z, t । इस तथ्य को उच्चकोटीय यात्रिकी का आपेक्षिकता सिद्धान्त कहते हैं। इसके बाद (5) को गैलीलियन रूपांतरण कहेंगे। यह चारों निर्देशांकों के लिए रैखिक रूपांतरण है। प्रथम तीन निर्देशांकों में तो यह लम्बकोणीय रूपांतरण है, काल-निर्देशांक को वह निश्चर छोड़ देता है ($t' = t$)। इस पिछली अभ्युक्ति का यह आशय है कि उच्चकोटीय यात्रिकी का आपेक्षिकता-सिद्धान्त काल को निरपेक्ष रखता है जैसा कि न्यूटन ने उसे स्वीकृत किया था।

* देखिए कि यह अनुसूची केवल बायें से दायें पढ़ी जा सकती है, ऊपर से नीचे नहीं; क्योंकि यह रूपांतरण अब लम्बकोणीय (orthogonal) नहीं रहा।

परंतु वैद्युतगतिकी के क्षेत्र में, विशेषतः प्रकाश-संबंधी घटनाओं के वैद्युतचुम्बकीय वाद में, एक नयी स्थिति प्रस्तुत होती है। इस क्षेत्र के आधार मैक्सवेल के समीकरण हैं जिनके लिए आवश्यक है कि वेग c , से निर्वात में प्रकाश का प्रचारण इस अभिदिश-ढाँचे से स्वतंत्र हो जहाँ से इस प्रक्रिया का प्रेक्षण हो रहा हो। यदि किसी गोलीय तरंग का उद्गम निर्देशांकों का मूलबिंदु मान लिया जाय तो अभिनिर्देश-ढाँचा अचिह्नित हो या चिह्नित, तदनुसार उसके तरंगग्र का समीकरण क्रमशः

$$(6) \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \text{ या } x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2 t'^2$$

होगा। अब निर्देशांकों के नामों को निम्नलिखित प्रकार से बदल देना सुविधाजनक होता है

$$(7) \quad x = x_1, y = x_2, z = x_3, it = x_4$$

यहाँ i कल्पित मात्रक है (अर्थात् $i = \sqrt{-1}$)। चिह्नित निर्देशांकों की अकन पद्धति में भी हम इसी प्रकार का परिवर्तन करेंगे। तो अब समीकरण बृन्द (6) यों हो जायेंगे

$$(8) \quad \sum_1^4 x^2_k = 0, \quad \sum_1^4 x'^2_k = 0;$$

और इस तथ्य के लिए कि प्रकाश का प्रचारण (प्रसिंघेशन) अभिनिर्देश ढाँचे पर निर्भर नहीं करता, यह आवश्यक है कि†

$$(9) \quad \sum_1^4 x'^2_k = \sum_1^4 x^2_k$$

समीकरण (2) तो त्रिविमितीय अवकाश में लंबकोणीय रूपांतरण था; परंतु समी० (9) में हमें चतुर्विमितीय अवकाश में लंबकोणीय रूपांतरण मिलता है; यद्यपि यह सच है कि चौथा निर्देशांक काल्पनिक है। परंतु इस कारण (3), (4) और (5) के अनुरूप समीकरणों के अस्तित्व में कोई बाधा न पड़ेगी। x_k और x'_k में जो संबंध (5) के द्वारा बनता है उसे लोरेन्स रूपांतरण कहते हैं। हेन्रिक अंतून लोरेन्स

1. Maxwell

† क्योंकि समीकरणों (8) के एक समीकरणको दूसरे का परिणाम होता अवश्यंभावी है। उनकी रेखीयता (linearity) के कारण यह भी अवश्यंभावी है कि (8) में का एक संबंध दूसरे का समानुपाती हो। इस संबंध के पारस्परिक होने के कारण समानुपात के नियतांक का एक होना भी अवश्यंभावी है।

(Hendrik Antoon Lorentz) हालैंड देश के सैद्धान्तिक भौतिकी के एक महा-विद्वान् थे । लोरेन्स र्पातरण हम यहां व्यापकीकृत अनुमूची के रूप में देते हैं—

$$(10) \quad \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1' & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ x_2' & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ x_3' & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ x_4' & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array}$$

इस तालिका में तुरन्त प्रकट हो जाता है कि अभिवेग-पद्धति के परिवर्तन में अन्ध-काल निर्देशांक (कार्पनिक रूप x_4 में) उतना ही आता है जितने कि अवकाश निर्देशांक गण । समीकरण (9) की निश्चरता-भांग के अवश्यभावी परिणाम वश काल की निरपेक्षता अब नष्ट हो जाती है ।

लोरेन्स के व्यापक र्पातरण की अपेक्षा यह विशेष र्पातरण अधिक शिक्षाप्रद है जिसमें दो आकाश-निर्देशांक, मान लीजिए x_1 और x_2 ज्यों के त्यों रहने देते हैं और केवल x_3 तथा x_4 का र्पातरण करते हैं । तब (10) के स्तम्भों की पहली और दूसरी पंक्ति के

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$$

के अतिरिक्त अन्य सब α_{ij} का शून्य हो जाना अवश्यभावी है क्योंकि (बायें से बायें तथा ऊपर से नीचे भी पढ़ने पर) $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$; फिर, (4) के अनुरूप निम्न-लिखित प्रतिबंध निकलते हैं

$$(11) \quad \alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 = \alpha_{33}^2 + \alpha_{43}^2 = \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1;$$

और इसलिए

$$\alpha_{33}^2 = \alpha_{44}^2, \quad \alpha_{34}^2 = \alpha_{43}^2$$

यदि $\delta = \pm 1$, तो लिख सकते हैं

$$(11 a) \quad \alpha_{34} = \delta \alpha_{43};$$

और तब यह अवश्यभावी है कि

$$(11 b) \quad \alpha_{44} = -\delta \alpha_{33};$$

क्योंकि लंबकोणियता का अन्य प्रतिबंध है—

$$\alpha_{33}\alpha_{34} + \alpha_{43}\alpha_{44} = 0$$

1. Orthogonality

अब चिह्नित निर्देशांकों को अचिह्नित निर्देशांकों के पदों में हल करने के लिए (11a, 11b) का उपयोग करते हैं। साथ ही (7) की सहायता से अपने पहले के निर्देशांकों z, t, z', t' पर पहुँच जाते हैं और निम्नलिखित संबंध व्यक्त करते हैं—

$$(12) \quad \begin{aligned} z' &= \alpha_{33} \left(z + i\delta c \frac{\alpha_{43}}{\alpha_{33}} t \right), \\ t' &= -\delta \alpha_{33} \left(t + i \frac{\delta \alpha_{43}}{c \alpha_{33}} z \right) \end{aligned}$$

इन समीकरणों में से प्रथम यह दिखलाता है कि

$$(12a) \quad -i\delta c \frac{\alpha_{43}}{\alpha_{33}} = v$$

को उस वेग के बराबर समझना चाहिए जिससे z' —अक्ष z —अक्ष के समांतर, अचिह्नित समुदाय की दृष्टि से उसकी (अर्थात् z की) घनात्मक दिशा में, चलता है। समीकरण (12a) की सहायता से (12) समीकरण निम्नलिखित हो जाते हैं—

$$(13) \quad \begin{aligned} z' &= \alpha_{33}(z - vt) \\ t' &= -\delta \alpha_{33} \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) \end{aligned}$$

अंत में हमें α_{33} का निर्धारण करना चाहिए। इस काम के लिए हम समी० (9) का उपयोग करते हैं। पहले के निर्देशांकों में यह अब $z'^2 - c^2 t'^2 = z^2 - c^2 t^2$ में सरलीकृत हो जाता है। यहाँ पर अब (13) से प्राप्त z' और t' के मानों का प्रवेश कराइए। तो बायीं ओर $2vzt$ वाला गुणनखंड लुप्त हो जाता है। बायीं ओर दायीं ओर के z^2 और t^2 के गुणनखंडों की तुलना से, निम्नलिखित संबंध मिलता है—

$$\alpha_{33}^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

सीमा में, c को अपरिमित ($c \rightarrow \infty$) कर देने से $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ तथा $\gamma_0 = -1$ और, स्वभावतः, समी० (13) गैलिलियन रूपांतर (1) बन जाता है। इसके लिए हमें δ को -1 रखना पड़ेगा और α_{33} का घन चिह्न लेना पड़ेगा। तब हम निम्नलिखित लाक्षणिक द्विविमतीय लॉरेंस रूपांतर प्राप्त होता है—

1. Identical

$$(14) \quad z' = \frac{z - vt}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{यहाँ } \beta = \frac{v}{c}, (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} > 0$$

जैसा कि हम देख चुके हैं, (14) में समय के आपेक्षिकताकरण तथा हर, $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$, में समाविष्ट z -निर्देशांक के मापक्रम के परिवर्तन का कारण यह है कि प्रकाश का वेग, c , परिमित है। यह तथ्य उच्चकोटीय यांत्रिकी के आपेक्षिकता सिद्धांत से मेल नहीं खाता।

यदि यह सत्य है कि सभी वैद्युतगतिकीय प्रभावों का प्रचारण परिमित वेग, c , से होता है तो इसका परिणाम यह होगा कि ऐसे प्रभावों के लिए सर्वदा गैलिलियन रूपांतर के स्थान में या तो व्यापक रूप (10) में या विशिष्ट रूप (14) में, लोरेत्स रूपांतरों को ही काम में लाना चाहिए। इस तथ्य को हम विद्युतगतिकी का आपेक्षिकता-सिद्धान्त कहते हैं। परंतु प्रकट है कि यांत्रिकी को भी यह तथ्य अपना पड़ेगा कि प्रकाश का प्रचारण परिमित वेग से होता है। हाँ, साधारण यांत्रिकी में जो वेग मिलते हैं वे c की अपेक्षा बहुत ही छोटे होते हैं। यही कारण है कि यांत्रिकी की बातों में, हम कार्यविधितः, समी० (14) में सूचित काल और अवकाश निर्देशांकों के मापक्रम के परिवर्तन की उपेक्षा कर सकते हैं।

लोरेत्स रूपांतरण में समाविष्ट भौतिकीय तथ्यों की सपन्नता पर इस व्याख्यान-माला की तृतीय पुस्तक में विचार किया जायगा। यहाँ पर केवल उन परिवर्तनों का अनुसंधान करेंगे जो अपने नये आपेक्षिकता-सिद्धांत के कारण, मौलिक राशि (p) अर्थात् सवेग की धारणा में हमें करने पड़ेंगे।

हम (p) को सदिश कह आये हैं। इसका आशय यह है कि निर्देशांक पद्धति के परिवर्तन में (p) के तीनों घटकों का रूपान्तरण निर्देशांकों [अर्थात् सदिश-त्रिज्या

$r = (x, y, z)$] की ही भाँति होता है। अतएव कहते हैं कि (p) अनुपरिणम्य है (r) का।

यह गैलिलियन रूपांतरण के दृष्टिकोण से ही समरूपनीय है जहाँ समय को निरपेक्ष मानते हैं। लोरेन्स रूपांतरण के दृष्टिकोण से सदृश त्रिज्या चार घटकों वाली राशि, चतुः सदृश

$$(15) \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

है। इसी प्रकार आपेक्षिकतात्मक सवेग भी चतुः सदृश है अर्थात् यदि आपेक्षिकतावाद में उसका कोई अर्थ होना है तो वह (x) का अनुपरिणम्य होगा। यह चतुः सदृश निम्नलिखित प्रकार प्राप्त होता है—

(क) समीकरण (15) के चतुःसदृश होने के कारण, दो निकटस्थ बिंदुओं के बीच की निर्देशांकीय दूरी

$$(16) \quad dx = (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) = (dx_1, dx_2, dx_3, icdt);$$

भी एक चतुःसदृश है।

(ख) इस दूरी का परिमाण निश्चय ही लोरेन्स रूपांतरण में निश्चर है। गुणनखंड ic को छोड़ कर, वह निम्नलिखित है—

$$(17) \quad dT = \left[dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

मिंकोवस्की का अनुसरण करते हुए हम dT को उचित काल का अल्पांश कहेंगे। dt से भिन्नतः वह आपेक्षिकतात्मकता निश्चर है। समी० (17) से हम गुणनखंड dt निबाल देंगे और तीन विमितियों का साधारण वेग v का प्रवेश करा देंगे ताकि निम्नलिखित संबंध प्राप्त हो

$$(17a) \quad dT = dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = dt(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

(ग) चतुःसदृश (16) को निश्चर (17a) से भाग देने पर एक अन्य सदृश मिलता है जिसे हम निम्नलिखित चतुःसदृश वेग कहेंगे

$$(18) \quad \frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic \right)$$

(प) थोड़ा पहले हमने वेग त्रिसदृश को अभिदेश ढाँचे से स्वतंत्र सहति m से गुणा करके सवेग सदृश (p) प्राप्त किया था। इसी प्रकार चतुःसदृश (18) को एक अभिदेश-ढाँचा-स्वतंत्र 'संहति गुणनखंड' से गुणा करके हम एक सवेग चतुःसदृश (p) की प्राप्ति करेंगे। इस सहति-गुणनखंड को विराम संहति m_0 कहेंगे। और अब मिलेगा

$$(19) \quad p = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic \right)$$

बंधनी के (कोष्ठक) पहले लिखी हुई राशि को चल-संहति (rest mass) या केवल संहति कहना उचित होगा क्योंकि $\beta=0$ के लिए वह विराम सहति हो जाती है। अतएव हम निश्चयपूर्वक कहते हैं कि

$$(20) \quad m = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

यह संबंध १९०४ में लोरेन्स ने बड़ी विशेष कल्पनाओं (विकार्य^१ इलेक्ट्रॉन) के अधीन व्युत्पन्न किया था। आपेक्षिकता सिद्धांत द्वारा व्युत्पन्न करने पर ये विशेष कल्पनाएँ अनावश्यक हैं। समी० (20) का समर्थन शीघ्रगामी इलेक्ट्रॉनों के बहुतेरे यथातथ प्रयोगों द्वारा हो चुका है। विशेषतः उल्लेखनीय माइकेल्सन और मॉर्ले^२ के प्रयोगों द्वारा तथा अन्य कतिपय प्रकाश संबंधी प्रयोगों द्वारा वह आपेक्षिकतावाद का आधार है। यहाँ हमारे कार्य का क्रम उल्टा रहा है और हमने समी० (20) एक औपचारिक-सी रीति से आपेक्षिकता सिद्धांत के सहारे निगमित किया है। यह न केवल तर्कमास्त्रानुसार स्वीकार्य है अपितु इन विषय-प्रवेशक व्यक्तिकरणों की सक्षिप्तिता के कारण विशेषतया उपयोगी भी है। संहति की वेग पर निर्भरता के कारण न्यूटन के गति संबंधी नियमों में और क्या-क्या परिवर्तन करने पड़ेंगे, इसकी आलोचना हम चतुर्थ प्रकरण (§४) में करेंगे।

यही पर हमें अनुशेष अभिदेश-ढाँचों के प्रश्न पर इन विचारों की समाप्ति करनी चाहिए, यद्यपि वह कुछ-कुछ स्थूल भाव से ही हो सकता है। वैसा करने के लिए हमें अद्यावधि विवरित आपेक्षिकता के विशेषवाद से आइंस्टाइन ही के १९१७ के आपेक्षिकता के व्यापक वाद को जाना होगा। विशेष आपेक्षिकता में वे ही अभिदेश पद्धतियाँ अनुशेष हैं जो एक दूसरे से लोरेन्स-रूपान्तरण द्वारा प्राप्त होती हैं, और वे

निषिद्ध हैं, जो, उदाहरणतः, परस्पर प्रथम सिद्धांत के आधार पर प्राप्त होती हैं। व्यापक आपेक्षिकता में सभी अभिदेश पद्धतियाँ अनुज्ञेय हैं। उनके बीच रूपांतरणों को (10) की भांति रैखिक तथा लंबकोणीय होने की आवश्यकता नहीं है, किन्तु वे स्वेच्छ (अनियत) फलनों, $x'_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$, द्वारा व्यक्त किये जा सकते हैं। अतएव यहाँ हमें वे पद्धतियाँ मिलती हैं जो गतियुक्त हैं और जिनमें एक दूसरे की अपेक्षा जैसी चाहे वैसी विकृति हो सकती है। परिणामवश, अवकाश और काल में उस निरपेक्ष लक्षण का नाम-निशान तक नहीं रह जाता जो उन्हें न्यूटन के भौतिक विश्लेषण में मिला था। वे केवलमात्र भौतिक घटनाओं की वर्गीकरण व्यवस्थाएँ रह जाते हैं। इस वर्गीकरण के लिए यूक्लिड की ज्यामिति पर्याप्त नहीं होती, उसके स्थान में रोमान प्रतिपादित अधिकतर व्यापक मैट्रिक ज्यामिति लेनी पड़ती है। अब यह करना होता है कि भौतिक नियमों को ऐसा रूप दिया जाय कि यहाँ जिन-जिन अभिदेश ढाँचों पर विचार किया जाय उन सभी में वे वैध रहें अर्थात् ऐसा रूप जो चतुर्विमीतीय अवकाश के स्वेच्छ बिंदु रूपांतरणों $x'_k = f_k(x_1, \dots, x_4)$ में निश्चर रहे। व्यापक आपेक्षिकता वाद की सार्थक अंतर्वस्तु यही है कि ऐसा हो सकता है। इस प्रकार के निश्चर सूत्रीकरण में यांत्रिकी के नियम जो गणितीय गहन रूप धारण करते हैं उनका विवेचन हम इस पुस्तक में नहीं कर सकते। यहाँ यहाँ कहना पर्याप्त है कि व्यापक वाद से न्यूटनीय गुरुत्वाकर्षण निकल ही नहीं आता, उसका अधिकतर यथातथ्य सूत्रीकरण होता है।

इस प्रकरण की समाप्ति हम “आपेक्षिकता-वाद” नाम पर एक टिप्पणी देकर करते हैं। इस वाद का सार्थक कार्य-संपादन उतना इस बात में नहीं हुआ है कि अवकाश और काल का पूर्णतया आपेक्षिकताकरण हो गया है जितना कि इस बात के प्रमाण में कि प्रकृति के नियम अभिदेश ढाँचे के चुनाव से बिल्कुल स्वतंत्र हैं, अर्थात् प्राकृतिक घटनाएँ निश्चर हैं, प्रेक्षक के दृष्टिकोण में चाहे कोई परिवर्तन क्यों न हो। “प्राकृतिक घटनाओं की निश्चरता का वाद” या, जैसा कि कभी-कभी प्रस्ताव किया गया है, “दृष्टिकोण वाद” ये नाम “आपेक्षिकता का व्यापक सिद्धांत” से अधिक सार्थक या उपयुक्त होंगे।

1. More general metric geometry
2. Content
3. General theory
4. Relativisation

६ ३. संहति-बिंदु को ऋजु-रेखीय गति

मान लीजिए कि कण की गति x -अक्ष में हो रही है। यदि उक्त कण पर किसी वलों का प्रभाव पड़ रहा हो तो उनके केवल x -घटकों के ही प्रभाव कार्यकर होंगे। मान लीजिए कि इन घटकों का परिणामी X है।

$$\text{तो यहाँ } V = v = \frac{dx}{dt} \text{ और } P = m \frac{dx}{dt} \text{ है।}$$

अतएव

$$(1) \quad \dot{p} = X$$

और यदि m नियत हो तो

$$(2) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

इस गति-समीकरण के समाकलन का अध्ययन हम तीन स्थितियों में करेंगे—
 X विशुद्ध फलनवत् दिया हुआ है, (क) समय का [$X = X(t)$]; (ख) स्थान का [$X = X(x)$]; या (ग) वेग का [$X = X(v)$]।

(क) $X = X(t)$.

इसको समानुकलित करने से प्राप्त होता है

$$(3) \quad v - v_0 = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t X(t) dt = \frac{1}{m} Z(t).$$

यहाँ $Z(t)$ की परिभाषा यह है कि वह वल का समय समाकल^१ है और कालांतर t_0 से t तक में हुए संवेग^२ के परिवर्तन के बराबर है।

एक और समाकलन से प्रक्षेप-पथ का समीकरण यह प्राप्त होता है

$$(4) \quad x - x_0 = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t Z(t) dt.$$

(ख) $X = X(x)$.

यह वल क्षेत्र को स्थान के फलनवत् देने की प्रतिरूपक^३ स्थिति है। इसका समाकलन 'ऊर्जा के संरक्षण' वाले सिद्धांत के उपयोग से प्राप्त होता है।

यदि हम समी० (2) के दोनों पार्श्वों को $\frac{dx}{dt}$ से गुणा करें तो

$$(5) \quad m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X \frac{dx}{dt}.$$

इस समीकरण का बायी ओर का अंग पूर्ण अवकल^१ है :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\}.$$

समी० (1.4) में दी हुई व्यापक परिभाषा के अनुसार, उसके दाये अंग के लिए $dW = Xdx$ लिख सकते हैं और dW को dx पथ पर किया हुआ कार्य कहेंगे। जो समीकरण इस प्रकार प्राप्त होता है उसका मतलब है कि गतिज-ऊर्जा का परिवर्तन किये हुए फर्म के बराबर होता है।

क्योंकि गतिज ऊर्जा अर्थात् संहति बिंदु की गति की ऊर्जा की परिभाषा हम इस प्रकार करते हैं—

$$(6) \quad T = E_{kin} [\text{ऊर्जा}] = \frac{1}{2} m v^2.$$

गतिज ऊर्जा का पुराना नाम था, सजीव (अर्थात् प्रत्यक्ष) (live) बल (लाइवनेत्स^२) जिससे बल शब्द की अस्पष्टता प्रकट होती है। उन्होंने दो प्रकार के बलों के भेद बताये थे—सजीव अर्थात् प्रत्यक्ष बल (vis viva), आज दिन की गतिज ऊर्जा; और चालन बल (vis motrix) जिसको आज दिन हम केवल “बल” के नाम से पुकारते हैं। हेल्महोल्ट्स^३ ने भी बल और ऊर्जा में बहुत भेद नहीं किया था क्योंकि जो पुस्तक उन्होंने आज से बहुत अधिक दिन नहीं हुए (१८४७ में) ऊर्जा की अविनाशिता के संबंध में लिखी थी उसका नाम रखा था, “बलों की अविनाशिता के बारे में”।

गतिज ऊर्जा की परिभाषा के साथ-साथ स्थितिज ऊर्जा (V) की परिभाषा भी दे देनी चाहिए—

$$(7) \quad dV = -dW = -Xdx; \quad V = E_{pot} (\text{ऊर्जा}) = - \int Xdx$$

एक-विमितीय गण-यांत्रिकी के लिए तो स्थितिज ऊर्जा की यह परिभाषा पर्याप्त है। द्वि-विमितीय या त्रि-विमितीय बल क्षेत्रों में V का अस्तित्व क्षेत्रों की प्रकृति पर निर्भर करता है (देखिए § ६ उप-प्रकरण ३,)। समी० (7) द्वारा V एक योगात्मक नियतांक^१ के भीतर तक ही निर्धारित किया जा सकता है।^२

इन परिभाषाओं के आधार पर समाकलित समीकरण (5) से ऊर्जा के अविनाशत्व का नियम हमें मिल जाता है,

$$(8) \quad T + V = \text{नियतांक} = E$$

(गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा = नियतांक)

यहाँ E ऊर्जा-नियतांक अर्थात् सम्पूर्ण ऊर्जा है।

ऊर्जा की अविनाशिता का सिद्धांत न केवल भौतिकीय दृष्टि से अनि महत्वपूर्ण है, उसमें विलक्षण गणितीय शक्ति भी है। क्योंकि, जैसा हम देर चुके हैं, यह न केवल गति-समीकरण का प्रथम समाकलन करा देता है—जिस कारण उसका दूसरा नाम “ऊर्जा का समाकल” है—अबितु साथ ही, कम से कम प्रस्तुत स्थिति (ख) में, द्वितीय समाकलन भी सभव कर देता है। यदि (8) को निम्नलिखित रूप में लिखें

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[E - V(x)],$$

तो हम dt के लिए

$$dt = \left[\frac{m}{2(E - V)} \right]^{\frac{1}{2}} dx. \text{ लिख सकते हैं}$$

अतएव

$$(9) \quad t - t_0 = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{x_0}^x \left(\frac{dx}{E - V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

इस प्रकार t , x का ज्ञात फलन है और इस कारण x भी t के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। इसीलिए (9) गति का पूर्णतया समाकलित समीकरण है।

1. Additive constant

* क्योंकि समाकल का मान होगा $\int X dx$ —एक नियतांक।

$$(ग) \quad X = X(v).$$

इस स्थिति में गति-समीकरण होगा।

$$m \frac{dv}{dt} = X(v).$$

जिसका पुनर्व्यक्त यों करते हैं

$$dt = \frac{m dv}{X};$$

जिससे तुरंत ही निम्नलिखित समीकरण प्राप्त हो जाता है—

$$(10) \quad t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{X} = F(v).$$

इससे हम v को t के पदों में हल कर सकते हैं, अर्थात् $v = f(t)$; अतएव

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

जिससे यह परिणाम निकलता है कि

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

उदाहरण

१—पृथिवी की भूमि के पास अबाध पतन (गिरता हुआ पत्थर)

नीचे से ऊपर की ऊर्ध्वाधर दिशा को हम x की धनात्मक दिशा मानेंगे। यहाँ बल की माप नियत है,

$$(11) \quad X = -mg,$$

अर्थात् वह t , x , और v से स्वतंत्र है। यहाँ समाकलन की तीनों विधियाँ (क), (ख), (ग) काम में लायी जा सकती हैं।

हम (क) और (ख) का उपयोग करेंगे और मान लेंगे कि “गुरुत्वाकर्षणीय संहति” तथा “अवस्थितित्वीय संहति” बराबर है,

$$(12) \quad m_{\text{inert}} = m_{\text{grav}} = [m_{\text{अव}} = m_{\text{गुरु}}]$$

यहाँ $m_{\text{अव}}$ द्वितीय नियम द्वारा परिभाषित संहति है, तथा $m_{\text{गुरु}}$ गुरुत्वाकर्षण नियम में आयी हुई संहति है और इस लिए हमारे बल समीकरण (11) में भी वही आती है।

वेसेल^१ ने अनुभव किया कि लोलक-प्रयोगों^२ H द्वारा* समी० (12) की प्रयोगात्मक परीक्षा करने की आवश्यकता है। परन्तु इसका उससे अधिक मथातय प्रमाण इयोलवास्त^३ ने ऐंठन तुला के अपने प्रयोग द्वारा दिया था। वाद में, समी० (12) ने ही आइस्टाइन के गुरुत्वाकर्षण वाद को प्रथमतः प्रेरित किया था।

(क) $\ddot{x} = -g$. समाकलन नियतांकों का उपयुक्त चुनाव कर ($t=0$ के लिए $v=0$ और $x=h$), हमें अंत में निम्नलिखित सबध प्राप्त होते हैं—

$$\dot{x} = -gt, \quad x = h - \frac{g}{2} t^2.$$

(ख) यतः $dW = -mgdx$, $V = mgx$ और $T + mgx = E$. यदि $v=0$ जब $x=h$, है तो $E = mgh$ हो जायगा, अतएव

$$\frac{m}{2} v^2 + mgx = mgh.$$

इससे $x=0$ के विशेष मान के लिए $v^2 = 2gh$ आता है या

$$(13) \quad v = (2gh)^{\frac{1}{2}}.$$

इस समीकरण को उलटने से प्राप्त होता है

$$(13a) \quad h = \frac{v^2}{2g},$$

जो कि वह ऊँचाई है जहाँ तक किसी भी संहति को उठाना पड़ेगा ताकि गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्र में इस ऊँचाई से गिरने पर किसी विशेष वेग v की प्राप्ति हो। वेग v के स्थान पर उक्त ऊँचाई का उपयोग करना अधिक सुविधाजनक है, विशेषतः इंजीनियरी के बहुत से प्रश्नों में, जैसे कि पिटाट (Pitot) नलिका[†] में किस

* प्रसंगवश, पाठक का ध्यान न्यूटन की 'यांत्रिकी' में दिये हुए एक मनोरंजक वाक्य की ओर दिला देना चाहिए। उस ग्रंथ के आरंभ में, प्रथम परिभाषा के नीचे न्यूटन कहते हैं, "लोलकोंसे अति सावधानी से किये हुए प्रयोगों द्वारा मैंने सत्यापित कर लिया है कि संहति और भार समानुपाती है।"

† यह एक खोजली नलिका है जो कि तरल के बहने में गत्यात्मक दाब की माप के लिए व्यवहृत की जाती है। विमानों में वायु की चाल जताने के लिए बहुधा

ऊँचाई तक पानी पहुँचता है, अपकेंद्रित्र^१ में वायु की ऊँचाई क्या होगी, इत्यादि। न्यूटन के डोल वाले प्रयोग में पानी कितना चढ़ता है, यह भी इसी प्रकार (13.) से जाना जा सकता है।

२.—यही ऊँचाई से अवधि पतन (उल्का)

एक स्थिति में आकर्षण नियत नहीं रहता। अब उसके बदले गुरुत्वाकर्षण नियम का उपयोग करना होगा कि

$$(14) \quad m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{mMG}{r^2}$$

यहाँ m उल्का की संरुति है, M पृथिवी की, और G गुरुत्वाकर्षणांक अर्थात् गुरुत्वाकर्षणीय नियतांक है। निर्देशांक x के स्थान पर पृथिवी केंद्र से उल्का की दूरी r रखी गयी है। यतः अब दूरी का फलन बल है इस कारण समाकलन की (स) रीति का व्यवहार करना पड़ेगा।

विशिष्टतः, यदि पृथिवी की त्रिज्या a हो तो पृथिवी तल के लिए यह विधि निम्नलिखित समीकरण प्रस्तुत करती है

$$mg = \frac{mMG}{a^2}$$

ताकि mMG को (14) से निकाल सकते हैं और

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g \frac{a^2}{r^2} \text{ हो जाता है}$$

इस समीकरण से (7) देता है

$$dV = -dW = mga^2 \frac{dr}{r^2},$$

जिस कारण स्थितिज ऊर्जा, जिसका शून्य मान अनन्त ऊँचाई पर होगा, हो जाती है—

उसका उपयोग होता है। देखिए Glazebrook, *Dictionary of Applied Physics*, Vol. V, P-2.

1. Centrifuge 2. Notation

$$(15) \quad V(r) = -mg \frac{a^2}{r}.$$

अतएव समी० (8) से प्राप्त होता है

$$\left(\frac{m}{2} \right) - \frac{1}{r} = W = -\frac{mga^2}{R}$$

जहाँ R पृथिवी-केन्द्र से एक ऐसी परिकल्पित दूरी है जहाँ उल्का प्रारंभ में विराम स्थिति में थी। इस प्रकार हमें

$$(16) \quad \frac{dr}{dt} = a \left[2g \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \text{ प्राप्त होता है}$$

और समी० (9) के अनुरूप,

$$(16a) \quad t = \frac{1}{a(2g)^{\frac{1}{2}}} \int \frac{dr}{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

समी० (16a) के समाकलन का पूरा-पूरा व्यौरा देने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि (16) की केवल इन दो स्थितियों से ही हमारी दिलचस्पी है अर्थात्

$$(i) \quad R = \infty, \quad r = a.$$

पृथिवी तल पर उल्का निम्नलिखित वेग से पहुँचती है

$$\frac{dr}{dt} = (2ga)^{\frac{1}{2}},$$

अर्थात् पृथिवी के गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्र में, अपरिमित (अनन्त) दूरी से प्रारंभ हुआ अवाध पतन पृथिवी तल तक पहुँचने में वही वेग प्राप्त करेगा जो कि नियत गुरुत्व-त्वरण (g) में ऊँचाई h ($=a$, पृथ्वी की त्रिज्या) से अवाध पतन में प्राप्त होता है। [देखिए समीकरण (13)]।

$$(ii) \quad R = a + h; \quad h \ll a; \quad r = a.$$

यहाँ, कम होते हुए गुरुत्वाकर्षणीय त्वरण को ध्यान में रखते हुए परंतु यह मान कर कि उल्का बहुत ही बड़ी दूरी से गिरना प्रारंभ नहीं करती, हमें (13) के पतन वेग में केवल प्रथम शोधन करना है। समी० (16) से निम्नलिखित व्युत्पन्न होता है—

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= \left[2ga \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{a}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = (2ga)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{a} - \frac{h^2}{a^2} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (2ga)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{a} + \dots \right) \\
 &= (2gh)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{a} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

३—वायु में अबाध पतन

हम मान लेंगे कि वायु का प्रतिरोध वेग के वर्गफल का समानुपाती है। इस मान्यता को सर्वप्रथम न्यूटन ने रखा था और वह अनुभव से ठीक साबित हुई है, बगते कि गिरते हुए पिंड का आकार बहुत छोटा न हो तथा उसका वेग न तो बहुत कम (शून्यप्राय) हो और न इतना बड़ा कि ध्वनि के वेग की बराबरी करे। इस दशा में परिणामी बल होगा

$$X(v) = -mg + av^2,$$

जहाँ चिन्ह यह दर्शाती है कि वायु का प्रतिरोध गुरुत्वाकर्षणीय बल का विरोध करता है। यहाँ पृष्ठ २४ की (ग) विधि लागू है और गति समीकरण यों हो जाता है—

$$(17) \quad \frac{dv}{dt} = -g + \frac{a}{m} v^2.$$

यदि $\frac{a}{mg} = b^2$ रख दें, तो (17) निम्नलिखित बन जाता है

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 - b^2 v^2).$$

इससे हम, $t_0 = 0$ रखकर, (10) का अनुरूप यह प्राप्त करते हैं

$$-gdt = \frac{dv}{2} \left(\frac{1}{1 - bv} + \frac{1}{1 + bv} \right),$$

$$-gt = \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1 + bv}{1 - bv} \right).$$

अतएव,

$$\frac{1+bv}{1-bv} = e^{-2bgt}$$

और

$$(18) \quad bv = \frac{e^{-2bgt} - 1}{e^{-2bgt} + 1} = -\frac{\sinh bgt}{\cosh bgt} = -\tanh bgt$$

जहाँ (ज्याति') (को-ज्याति'), (स्पज्याति') अति परवलयिक फलन हैं। अतएव $|bv|$ काल $t=0$ पर शून्य (०) से, एकदिक् परिवर्तनशीलतया बढ़कर $t \rightarrow \infty$ काल पर 1 के मान के पास पहुँचता है। स्वयं v का सीमित मान निम्नलिखित है—

$$|v| = \frac{1}{b} = \left(\frac{mg}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

इसको समी० (18) से भी तुरंत निकाल सकते हैं क्योंकि उक्त सीमित मान के लिए $\frac{dv}{dt}$ शून्य हो जाता है।

समीकरण (18) के उपयोग से हम वायु के प्रतिरोध संबंधी वह पहला-पहल शोधन प्राप्त करते हैं जिसे निर्वात में अवाध पतन के लिए व्युत्पादित मूत्र से जोड़ देना होगा। स्पज्याति के श्रेणी-विस्तार अर्थात्

$$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{\alpha + \frac{\alpha^3}{6}}{1 + \frac{\alpha^2}{2}} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right)$$

और $\alpha = bgt$ के लिए, (18) के अनुसार हम प्राप्त करते हैं,

$$v = -gt \left(1 - \frac{(bgt)^2}{3}\right)$$

४-सरलावर्त दोलन

सरलावर्त दोलन तब होते हैं जब कभी भी किसी संहतिविंदु m पर प्रिया करता हुआ प्रत्यानयन बल X विस्थापन x का समानुपाती होता है। यदि समानुपाती-यता-गुणनसंख्य k हो तो

$$X = -kx$$

और निश्चर (नियतांक) m लेकर गति-समीकरण निम्नलिखित होगा

$$(19) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

बल के निर्देशांक का एक निर्दिष्ट फलन होने के कारण यह पृष्ठ २१ की (ख) स्थिति हुई और इसलिए वहाँ दी हुई कार्यविधि का उपयोग कर इस समीकरण को हल करने के लिए ऊर्जा समाकल का व्यवहार करेंगे। अतएव पहले तो सरलावर्त घघन बल की स्थितिज ऊर्जा का निर्धारण करना होगा। यहाँ पर

$$dW = Xdx = -\frac{k}{2} d(x^2)$$

अतएव (7) के अनुसार V के लिए उचित शून्य बिंदु लेते हुए,

$$V = -\int_0^x dW = \frac{k}{2} x^2$$

तो ऊर्जा-समीकरण होगा

$$mv^2 + kx^2 = 2E.$$

प्रारम्भिक प्रतिबंधों के लिए हम

$$(19a) \quad t=0 \text{ पर, } \begin{cases} x=a \\ v=\dot{x}=0. \end{cases} \text{ ले सकते हैं}$$

परिणामवश $2E$ का मान ka^2 हो जाता है, और

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{k}{m} (a^2 - x^2),$$

$$\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

समी० (19a) में दिये प्रारम्भिक प्रतिबंधों को सम्मिलित करते हुए, इसका क्षेत्रफलन^१ निम्नलिखित संबंध देता है—

$$(20) \quad \omega t = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2} \right), \text{ जहाँ } \omega = \left(\frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

प्रतिलोमीकरण द्वारा अंत में

$$(21) \quad x = a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = a \cos \omega t. \text{ प्राप्त होता है}$$

अतएव (21) में आयी संक्षिप्तिका ω का भौतिक अभिप्राय स्पष्ट है। वह "वृत्तीय आवृत्ति" है, अर्थात् 2π काल-मात्रकों में कंपनों की संख्या। यदि दोलनों का आवर्त-काल T और उनकी आवृत्ति * ν हो तो निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है।

$$(22) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

संक्षेपण की सहायता से (19) को यों भी लिख सकते हैं—

$$(23) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ऊर्जा-समीकरण का लाभ यह है कि उससे सदैव अभीष्ट अंत पर पहुँच जाते हैं, बल X चाहे किसी प्रकार भी x पर निर्भर करे। परंतु प्रस्तुत प्रश्न के लिए जहाँ X और x का संबंध रैखिक है, एक दूसरी ही अधिक सुंदर विधि विद्यमान है। यह इस प्रत्यक्षतः सत्याभासक^१ कार्यविधि पर आधारित है कि किसी भी कोटि के नियतगुणांकों^२ वाले समांग^३ रैखिक अवकल समीकरण निम्नलिखित प्रति-स्थापन से सदैव हल किये जा सकते हैं (यहाँ x परतत्र और t स्वतंत्र चर हैं) —

$$(24) \quad x = Ce^{\lambda t}$$

यद्यपि कि λ अपने अवकल समीकरण से प्राप्त हुए बीजीय समीकरण के मूलों में से एक हो। इस प्रकार एक विशिष्ट समाधान की उपलब्धि होती है। व्यापक समाधान इस प्रकार के सब विशिष्ट समाधानों के निम्नरूप में अध्यारोपण से प्राप्त होता है।

$$(24 a) \quad x = \sum C_j e^{\lambda_j t}$$

उपर्युक्त λ में बीजीय समीकरण, (24) के (23) में प्रतिस्थापन से प्राप्त होता है और प्रस्तुत स्थिति में द्वितीय घात का^४ है,

* देखिए कि ω वृत्तीय आवृत्ति है अर्थात् 2π काल में कंपनों की संख्या; और ν आवृत्ति है अर्थात् प्रति एक मात्रक काल (एक सेकंड) में कंपनों की संख्या।

1. Plausible, 2. Constant co-efficients 3. Homogenous

4. Of second degree,

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0; \text{ जिसके मूल हैं } \lambda = \pm i\omega.$$

अतएव व्यापक सूत्र यह हुआ,

$$(24b) \quad x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

नियतांक C_1 और C_2 सीमांत प्रतिबंधों (19 a) द्वारा निर्धारित किये जाते हैं,

$$x=0, C_1 i\omega - C_2 \omega i = 0, C_1 = C_2$$

$$x=a, a = C_1 + C_2 = 2C_1, C_1 = \frac{a}{2}$$

इस प्रकार अंतिम समाधान निम्नलिखित हुआ जो (21) से मेल खाता है,

$$x = a \cos \omega t.$$

आगे चलकर (अध्याय ३, § १९ में) इस विधि का विस्तृत उपयोग विविध प्रकार के (अवमदित, प्रणोदित, युग्मित, इत्यादि) दोलनों के संबंध में किया जायगा। ऐसी बात के लिए शर्त केवल यही है कि दोलनबृन्द रैखिक अवकल समीकरणों द्वारा दिये जा सकें। इस उपप्रकरण का जो शीर्षक सरलावर्त दोलन दिया है, वह इस बात की ओर ध्यान आकर्षित कराता है कि इनमें प्रत्यानयन बल निर्देशांक में रैखिक है, जिस कारण परिणामी गति एक एकाकी नियत आवृत्ति ω की होती है। यदि बल अनावर्ती अर्थात् अ-रेखीय हो तो यह विधि काम नहीं करती। उस स्थिति में ऊर्जा-अनुकूल वाली कुछ कम सरल विधि से काम लेना पड़ता है।

५-दो कणों की टक्कर

टक्कर के पहले (देखिए आकृति १) मान लीजिए कि संहति-द्वय m और M के वेग क्रमात् v_0 और V_0 हैं, और टक्कर के बाद उनके वेग v और V हो जाते हैं।



आकृति १.—दो संहतियों m और M की टक्कर।

टक्कर के पहले के वेग, v_0 और V_0 , बाद के v और V ।

टक्कर की प्रकृति चाहे कुछ हो, चाहे वह प्रत्यास्य^१ हो चाहे अप्रत्यास्य, दोनों संहतियों m , M के बीच जो बल संचारित होंगे, तथा इन बलों का गमय-नमान Z , इन बातों के लिए "क्रिया-प्रतिक्रिया" वाला न्यूटन का स्वयंनियम, अवश्य पंथ होना चाहिए। अतएव, समी० (३) के अनुसार,

$$(25) \quad m(v-r_0) = Z = -M(V-V_0),$$

और इसलिए यह भी कि

$$(25a) \quad mv + MV = mv_0 + MV_0.$$

यह समीकरण कहता है कि निकाय^२ का संपूर्ण सवेग सुरक्षित रहेगा।

अब (25a) में निकाय के संहति-केन्द्र के निर्देशांक (६) का उपयोग करें

$$(25b) \quad \xi = \frac{mx + MX}{m + M}$$

तो प्राप्त होता है

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0.$$

यह परिणाम बताता है कि टक्कर का संहति-केन्द्र के वेग पर कुछ भी प्रभाव नहीं पड़ता।

अतएव निर्वात में दागे हुए गोले का संहति-केन्द्र सदा अपने परावलयिक पथ^३ में अविचलित रहेगा, चाहे किसी स्थान पर गोला फटकर छोटे-छोटे टुकड़ों में भी हो जाय और प्रत्येक टुकड़ा अपना-अपना स्वतंत्र प्रक्षेप-पथ^४ ग्रहण करता जान पड़े।

यहाँ तक दो अज्ञात राशियाँ, v तथा V , और एक समीकरण (25a) प्राप्त हुआ है। टक्कर की समस्या का पूरा समाधान जानने के लिए एक और संबंध अर्थात् समीकरण की आवश्यकता है।

पहले प्रत्यास्य टक्कर लीजिए। प्रत्यास्य टक्कर की परिभाषा यह है कि इस मियक्रिया में सवेग और गतिज ऊर्जा, दोनों ही सुरक्षित (जैसे के तैसे) रहते हैं। इसके लिए इस बात की आवश्यकता है कि—

$$(26) \quad \frac{m}{2} v^2 + \frac{M}{2} V^2 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{M}{2} V_0^2$$

अर्थात्

$$m(v^2 - v_0^2) = M(V_0^2 - V^2).$$

परंतु (25) के उपयोग से

$$m(v-v_0)=M(V_0-V).$$

इन दोनों समीकरणों के भाजन से प्राप्त होता है

$$v+v_0=V_0+V$$

अर्थात्

$$(26a) \quad V-v=-(V_0-v_0).$$

यह समीकरण कहता है कि टक्कर लगने के बाद, एक संहति की अपेक्षा दूसरी का वेग, टक्कर से पहले के उसके आपेक्षिक योग के बराबर, पर विपरीत होता है।

समीकरणों (25a) और (26a) का संयोग अर्थात्

$$mv+MV=mv_0+MV_0$$

$$v-V=-v_0+V_0$$

अथ टक्कर के बाद के वेगों को पूर्णतया निर्धारित कर देता है—

$$v=\frac{m-M}{m+M}v_0+\frac{2M}{m+M}V_0,$$

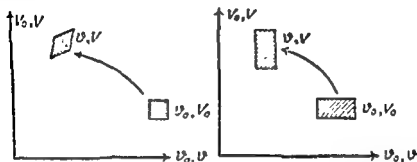
$$(27) \quad V=\frac{M-m}{m+M}V_0+\frac{2m}{m+M}v_0.$$

देखिए कि वेग के आदि के मानों, v_0 तथा V_0 , से अंत के मानों, v तथा V , के “रूपांतरण” के सारणिक (Δ) का निरक्षेप मान एक (1) है। क्योंकि—

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{m-M}{m+M} & \frac{2M}{m+M} \\ \frac{2m}{m+M} & \frac{M-m}{m+M} \end{vmatrix} = -\left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2 - \frac{4mM}{(m+M)^2} = -1.$$

इसका आशय यह है कि यदि आदि वेगों के मानों को एक अधिक्षेत्र में होने दें (अर्थात् सीमाओं के बीच रखें), तो $v-V$ अवकाश में रूपान्तरित पृष्ठाक्षेत्रफल वही होगा जो कि आदि के पृष्ठाक्षेत्र का था ; अर्थात् इस प्रकार का रूपांतरण क्षेत्रफल संरक्षक होगा (देखिए आकृति संक) 1. यह नियम गैसों के गत्यात्मक

वाद की टक्कर-प्रक्रियाओं में महत्व का है तथा लियोविले के प्रमेय^१ (देखिए इस माला की पंचम पुस्तक) में मगधित है।



आकृति २ क.—वेग सीमाएँ, टक्कर के पहले और बाद। चित्राकृत क्षेत्रफल संरक्षक है अर्थात् दोनों क्षेत्रफल बराबर हैं।

आकृति २ ख.—महतियों के बराबर ($m=M$) होने की स्थिति में चित्राकृत न केवल क्षेत्रफल-संरक्षक, किंतु कोण-संरक्षक भी है।

यदि दोनों महतियाँ बराबर हों, ($m=M$) जैसे दो बराबर के विलियड गेंद, तो समी० (27) निम्नलिखित हो जाते हैं—

$$(27a) \quad v = V_0, \quad V = v_0$$

अब रूपांतरण न केवल क्षेत्रफल-संरक्षक बल्कि कोण-संरक्षक भी हो जाता है। देखिए आकृति २ख, जहाँ रूपांतरित आयत^१ आदि के आयत से केवल भुजाओं के परस्पर बदलने से प्राप्त हुआ है। विशेषतः, विलियड के खेल में यदि एक गेंद स्थिर हो और दूसरे की उससे बिल्कुल सीधी टक्कर हो तो यह दूसरा, टक्कर से पहले चलता हुआ गेंद, अपना सारा वेग पहले को दे देता है और स्वयं स्थिर हो जाता है [मिलाइए (27a), $V_0=0$ रखकर]।

इसके प्रतिकूल यदि एक संहति दूसरी में बहुत ही अधिक बड़ी हो, $M \gg m$ तो इन दोनों की टक्कर के बाद बड़ी संहति का वेग प्रायः ज्यों का त्यों रहता है और छोटी संहति बड़ी संहति के पीछे उस वेग से जाती है जो बड़ी के वेग से

दोनों का आदि का आपेक्षिक वेग घटाने से मिलता है। क्योंकि यदि $m \ll M$, तो समीकरणद्वय (27) का निम्नलिखित सरलीकरण हो जाता है,

$$(27b) \quad v = -v_0 + 2V_0 = V_0 - (v_0 - V_0), \quad V = V_0$$

टक्करों संबंधी यह विवेचन पूर्ण करने के लिए अप्रत्यास्थ टक्करों के बारे में संक्षेप में कहेंगे। परमाणवीय भौतिकी में इस प्रकार की अप्रत्यास्थ टक्करों ("दूसरे प्रकार की टक्करों") का अनुसंधान करते हैं। ऐसी टक्कर में इलेक्ट्रॉन जैसा एक कण अपनी ऊर्जा का कुछ भाग खो बैठता है जो कि टक्कर के दूसरे कण अर्थात् परमाणु को 'उत्तेजित' करने में लगती है। इस प्रकार की उत्तेजना पाकर परमाणु की ऊर्जा संबंधी दशा अपनी निम्नतम अवस्था से एक अधिकतर ऊँचे ऊर्जा-स्तर में पहुँचायी जाती है। इस प्रकार की प्रक्रिया में, टक्कर के बाद की गति के विचार से, आदि की कुछ ऊर्जा का ह्रास हो जाता है, अतएव प्रत्यास्थ टक्करों के समीकरण इस दूसरे प्रकार की टक्कर के बाद की गतियाँ ज्ञात करने में नहीं लगाये जा सकते [देखिए, समस्याएँ I.1 से I.4 तक]।

यहाँ हम केवल उस "पूर्णतया अप्रत्यास्थ टक्कर" पर विचार करेंगे जो कि इंजीनियरी की समस्याओं में बहुधा आती है। ऐसी टक्कर निम्नलिखित प्रतिबंध द्वारा परिभाषित की जाती है—

$$v = V,$$

अर्थात् टक्कर के बाद दोनों संहतियाँ, m तथा M , एक ही वेग से जाती हैं मानो वे दृढ़तापूर्वक परस्पर बंधी हुई हों। इस बात पर पहले भी जोर दे आये हैं कि संवेग का समीकरण सब दशाओं में वैध रहता है। अब वह यों हो जाता है।

$$(28) \quad (m+M)v = mv_0 + MV_0$$

जो अकेला ही एकाकी अज्ञात v के निर्धारण में पर्याप्त है। इस टक्कर में कितनी ऊर्जा का ह्रास होगा, यह जानने योग्य है। वह होगा—

$$\frac{m}{2}v_0^2 + \frac{M}{2}V_0^2 - \frac{m+M}{2}v^2$$

अथवा, समी० (28) की सहायता से v के सरल निरसन^१ के बाद,

$$(28a) \quad \frac{\mu}{2}(v_0 - V_0)^2,$$

1. Elimination

जहाँ μ का मान इस प्रकार व्यक्त है—

(28 b) $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$, अतएव $\mu = \frac{mM}{m+M}$ इस μ को लघुकृत संहति कहते हैं। ऊर्जा का ह्रास इस लघुकृत संहति के आदि के सापेक्ष वेग ($v_0 - v_0'$) से चलने की गतिज ऊर्जा के बराबर है।

समीकरणों (28 a, b) में समाविष्ट प्रमेय प्रथमतः जनरल लाजरस कानों^१ द्वारा प्रतिपादित किया गया था। [जनरल कानों एक गणितज्ञ थे। फ्रांस की राज्यक्रांति में आप सांबंदेशिक सैनिक सेवा के सघटक थे। उष्मा-गतिकी के क्षेत्र में सुविख्यात सादी कानों के आप पिता थे।]

४. चर अर्थात् परिवर्तनशील संहतियाँ

निम्नोक्त दृष्टान्त हमें न्यूटन के द्वितीय गति-नियम के गुणदोष विवेचक मानाकन^२ में सहायता देंगे। इस नियम को हम इस समीकरण (1.3) के रूप में रखेंगे कि “संवेग (गतिमात्रा) का परिवर्तन बल के बराबर है” ; न कि (1.3a) के कम व्यापक रूप में कि “संहति \times त्वरण = बल”। अब हमें इस बात का बोध होगा कि संवेग के परिवर्तन की गति से क्या समझना चाहिए। हम दिखावेंगे कि यदि संहति परिणमनशील (चर) भी हो तो भी किन्हीं परिस्थितियों में (1.3) वाला व्यापक-रूप (1.3a) की स्थिति में पहुँचाया जा सकता है।

एक परिचित दृष्टान्त लीजिए—कड़ी गर्मियों में पानी छिड़कने की गाड़ी पक्की सड़क को गीला कर देती है। गाड़ी के मोटर-इंजन में इतनी ही शक्ति है कि वह सड़क और पहियों के बीच के, वायु के, तथा धुराधार^३ के, इन सब के घर्षण को संभाल भर सके। अतएव ऐसा जान पड़ता है मानो गाड़ी किन्हीं बलों के अधीन न हो। मान लीजिए, खाली गाड़ी की नियत अर्थात् अचर संहति और उसकी टकी में किसी समय बचे हुए पानी की संहति, इन दोनों का योग m है। समझिए कि प्रति काल-मात्रक में निकले हुए पानी की संहति $\mu = -\dot{m}$ है और उसके पीछे की ओर निकलने का वेग, गाड़ी के विचार से q और सड़क के विचार से $v - q$ है, जहाँ v स्वयं गाड़ी का वेग है।

अब यदि (1.3) के सूत्र से यंत्रवत् (अर्थात् बिना सोचे-समझे) काम ले तो

$$(1) \quad \dot{p} = \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv) = 0. \text{ मिलता है।}$$

इससे

$$(1 a) \quad m\dot{v} = \mu v \text{ निकलेगा}$$

तो गाड़ी का त्वरण पानी निकलने के वेग q से स्वतंत्र होगा। परंतु यह बात कुछ आत्मविरोधक सी है, क्योंकि बाहर जाते हुए पानी की प्रधार का प्रत्याक्षेप (बंदूक की तरह) कुछ प्रभाव डालेगा, ऐसी प्रत्याशा की जा सकती है।

वास्तव में हमने सवेग के परिवर्तन की गति के लिए वह ठीक पद-पुंज नहीं लिया है जिससे कि (1.3) में मतलब है। उसमें न केवल वह अंग आयेगा जो (1) में लिया गया है, अपितु पानी की प्रधारों के संवेग के लिए भी एक पद लेना होगा। यह $\mu(v-q)$ प्रति काल-मात्रक है। स्पष्टतया,

$$p_t = mv_t, \quad p_{t+dt} = (m+dm)(v+dv) + \mu dt(v-q).$$

अतएव संवेग-परिवर्तन की शोधित गति के लिए निम्नलिखित पदसमूह प्राप्त होता है—

$$(2) \quad \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv) + \mu(v-q) = 0.$$

या, इसको ध्यान में रख कि $\mu = -\dot{m}$, उक्त पदसमूह सरल करने से

$$(3) \quad m\dot{v} = \mu q \text{ प्राप्त होता है।}$$

समीकरण (1.3a) के दृष्टिकोण से, गाड़ी से निकलते हुए पानी का प्रतिक्षेप गाड़ी पर त्वरणकारी बल का काम करता है, जैसे कि घास सीचने के घूर्णक यंत्रों में प्रतिक्रियाकारी पानी का पहिया काम करता है।

अपने दृष्टान्त के लिए छिड़काव गाड़ी के स्थान पर हम अंतर्ग्रहीय राकेट ले सकते थे जिससे कदाचित् चंद्र तक पहुँच सकें। राकेट विस्फोटक गैसों के अपसारण से नोदित होगा। देखिए, प्रश्न I.5।

इस परिणाम को हम दो अभ्युक्तियों में व्यापकीकृत करेंगे जो अपने प्रदर्शक उदाहरणों के, क्रमात् (2) तथा (3) समीकरणों के तुल्य हैं—

या तो हम (1.3) का दृष्टिकोण ले और प्रश्न के पिंड में अगभामित गवेग-परिवर्तन के साथ उग गवेग का भी योग कर दे जो प्रति काल-मात्रक सवहननया' दिया या लिया जाता हो। इस पदचोस्त गवेग का हिंगाव उमी अभिदेग-टांने मे करना होगा जिसमें कि अनुमंधानाधीन पिंड के गवेग का हिंगाव लगाया गया हो। तब m का चिह्न स्वयं उग चिह्न को ठीक कर देता है जोकि इस पद के पहले लगाया होगा। अब गति का समीकरण यह हो जाना है—

$$(4) \quad \frac{d}{dt}(mv) - mV' = F,$$

जहाँ V' संबहनीय वेग है। अपने दृष्टांत मे हमने $-m = \mu$ और $|V'| = |v| - q$ लिया था।

या हम (1.3a) का दृष्टिकोण ले। परंतु इसके लिए जो प्रत्याक्षेपी सवेग प्रति काल-मात्रक आवे या जायेगा उसे एक प्रकार का बाह्य बल समझ कर जोड़ देना होगा। ऐसा करने से हमें (3) के अनुरूप निम्नलिखित गतिसमीकरण प्राप्त होगा,

$$(5) \quad m v' = F + m V_{rel}$$

इसमें V_{rel} संबहनीय सवेग का प्रेक्षणाधीन पिंड के तई आपेक्षिक वेग है जिसकी घन दिशा वही है जो V की थी। उक्त दृष्टांत मे $|V_{rel}| = -q$ और फिर वही $-m = \mu$ ।

दो विशेष स्थितियाँ ध्यान देने योग्य हैं —

(क) $V' = 0$. संहति के जो अंश आ मिलते हैं या चले जाते हैं उनके वेग शून्य है और इसलिए उनका संवेग कुछ नहीं है।

इस स्थिति में गति-समीकरण का रूप न्यूटनीय है, $p' = F$. उदाहरण, प्रश्न 1.6 का जल-विंदु और 1.7 की जजीर।

(ख) $V' = V$ या, तुल्यतः, $V_{rel} = 0$. यहाँ, संहति के चर होते हुए भी, गति-समीकरण का रूप संहति \times त्वरण = बल ही रहता है। उदाहरण—प्रश्न (1.8) की मेज के किनारे पर लटकती हुई जजीर।

स्थिति (ख) में कानों ऊर्जा ह्रास, समी० (3.28a), शून्य है। अतएव ऊर्जा-समीकरण अपने साधारण रूप में लागू है। स्थिति (क) में किसी दी हुई समस्या

में ऊर्जा-अविनाशिता नियम का कौन-सा रूप लागू होगा, यह प्रकट नहीं है और पहले उसका अनुसंधान कर लेना होगा।

इन शिक्षाप्रद अभ्युक्तियों की समाप्ति हम आपेक्षिकतात्मक संहति-परिणमन की समस्या देकर करेंगे। इस संबंध में हम इलेक्ट्रान का विशेष रूप से उल्लेख करेंगे, यद्यपि समीकरण (2.20) स्वभावतः केवल इलेक्ट्रान के ही लिए नहीं, सभी संहतियों के लिए लागू है। यहाँ संहति-परिणमन इलेक्ट्रान की अपनी केवल आंतरिक बात है; किसी संवेग के इधर-उधर से आ मिलने या जा निकलने का प्रश्न नहीं उठता। अतएव स्थिति (क) की नाई गति-समीकरण, $p' = F$ होगा अर्थात्, (2.20) को ध्यान में रखते हुए

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 V}{[1 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}} \right) = F.$$

पहले इलेक्ट्रान की ऋजुरेखीय गति पर विचार करेंगे। यहाँ F अनुदैर्घ्यता का काम करता है अर्थात् V की दिशा में; जिस कारण $F = F_{\text{long}}$ और $V = v$ ।

समीकरण (6) को "संहति \times त्वरण = बल" के रूप में परिवर्तित कर देंगे। इस घाताब्दी के प्रारंभिक वर्षों में वैसा करने की यही रीति थी, यद्यपि यह अनावश्यक रूपसे जटिल थी। इस काम के लिए बायी ओर दिखलाया अवकलन करेंगे—

$$(6a) \quad \frac{m_0 \dot{v}}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} + m_0 v \frac{d}{dt} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\dot{v} + \frac{v \beta \dot{\beta}}{1 - \beta^2} \right)$$

कारण कि $\beta = v/c$, अतएव

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{v}}{c}, \text{ और इसीलिए } v \beta \dot{\beta} = \beta^2 \dot{v}.$$

परिणामतः, समी० (6 a) निम्नलिखित हो जाता है

$$(6b) \quad \frac{m_0 \dot{v}}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \dot{v} = F_{\text{long}}$$

अतएव त्वरण \dot{v} को गुणक "अनुदैर्घ्य संहति" होगी—

1. Longitudinally
2. Differentiation

$$(7) \quad \text{अनुदैर्घ्य संहति } m_{long} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

यदि बल F अनुदैर्घ्यतया के स्थान पर अनुप्रस्थतया' काम करता हो, अर्थात् वह प्रक्षेप-पथ के अभिलम्ब हो तो केवल वेग की दिशा में परिवर्तन होगा, मात्रा में नहीं। इस स्थिति में β शून्य होगा; और तब (6) में

$$\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \ddot{x} = F_{trans} \text{ ही प्राप्त होगा।}$$

इस कारण, उक्त समय (क्षणाब्दी के प्रारम्भ में), अनुदैर्घ्य संहति में भिन्न एक "अनुप्रस्थ संहति" का उपयोग कराया गया, जो यों था —

$$(8) \quad \text{अनुप्रस्थ संहति } m_{trans} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

उल्लेखनों को ध्यान में रखते हुए हम जोर देकर कहते हैं कि यदि गतिसमीकरण के (6) वाले वृद्धियुक्त रूप से काम लें तो संहति का दो प्रकार का होना नितात अनावश्यक हो जाता है।

अब हम आपेक्षिकतावाद के ऊर्जा-समीकरण का रूप निर्धारित करेंगे। इसके लिए हम (6) को $\frac{dx}{dt} = v = \beta c$ से गुणा करें, तो दायी ओर प्राप्त होता है—

$$(9) \quad F \frac{dx}{dt} = \frac{dW}{dt} = \text{प्रतिकाल-मात्रक किया हुआ कर्म या शक्ति;}$$

दायी ओर प्राप्त होता है—

$$m_0 c^2 \beta \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = m_0 c^2 \beta \dot{\beta} (1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

हम अपना निश्चय तुरंत करा सकते हैं कि यह t में पूर्ण अवकलज' अर्थात् निम्नलिखित है—

$$(10) \quad m_0 c^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

यतः (10) बराबर है (9) के और (9) है काम करने की गति; अतएव (10) को गतिज ऊर्जा (T) की काल संबंधी परिवर्तनगति होनी चाहिए। इस लिए प्राप्त होता है—

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{[1 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}} - 1 \right).$$

यह नियतांक अवश्यमेव -1 होगा क्योंकि β के दून्य होने पर गतिज ऊर्जा T का भी दून्य होना अवश्यम्भावी है। अतएव “आपेक्षिकतात्मक गतिज ऊर्जा” होगी

$$(11) \quad T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{[1 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}} - 1 \right).$$

समीकरण (2.20) को ध्यान में रखते हुए हम इसे निम्नलिखित प्रकार से भी लिख सकते हैं

$$(12) \quad T = c^2 (m - m_0).$$

अर्थात्, शब्दों में, “गतियुक्त और विराममय इलेक्ट्रानों की ऊर्जाओं का अन्तर, उनकी संहतियों के अन्तर और c^2 के गुणनफल के बराबर है।” (जब कि गतियुक्त और विराममय इलेक्ट्रानों की ऊर्जाओं का अन्तर है गतिज ऊर्जा या “सजीव बल”)। इस प्रकार हमने सरलतम स्थिति के लिए “संहति और ऊर्जा की तुल्यता” का नियम (“ऊर्जा के अवस्थितित्व” का नियम) सत्यापित कर दिया। परमाणवीय भार निर्धारण के सारे क्षेत्र में और नाभिकीय भौतिकी तथा उसके ब्रह्मांड विज्ञान संबंधी अनुप्रयोगों में यह महत्वपूर्ण मौलिक नियम है।

पूर्णता के लिए बता देना चाहिए कि β के छोटे-छोटे मानों के लिए (11) का श्रेणीबद्ध विस्तार कर सकते हैं जिससे, प्रथम सन्निकटन में, गतिज ऊर्जा T का सरल रूप,

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots \right) = \frac{m_0}{2} c^2 \beta^2 (1 + \frac{3}{4} \beta^2 + \dots) \rightarrow \frac{m_0}{2} v^2.$$

प्राप्त हो जाता है, जैसी कि प्रत्याशा की जा सकती है।

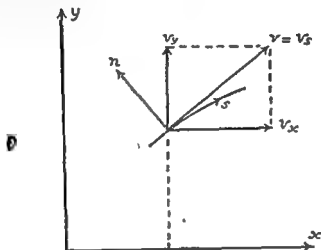
§ ५. समतल में और आकाश में अकेले संहति बिंदु की चल-गतिकी तथा स्थितिकी

चलगतिकी गतियों का ज्यामितीय वर्णन करती है। उनके भौतिक अस्तित्व की

ओर उसका ध्यान नहीं जाता। स्थैतिकी का सम्बन्ध बलों से, उनकी सारचना और उनकी समता से है। बलों से उत्पन्न गतियों से उसे कोई मतलब नहीं।

(१) समतल चल-गतिकी

विषयारंभ हम कार्तीय^१ निर्देशांशों में वेग तथा त्वरण के विघटन और सघटन अर्थात् विखंडन और संयोजन, सबधी सूत्रों के लेखन से करेंगे।



आकृति ३—समतल में वेगों का विघटन और सघटन।

कार्तीय निर्देशांक, x, y ; नैज^२ निर्देशांक s, n .

वेग—

$$(1) \quad \mathbf{V} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (\dot{x}, \dot{y});$$

$$(2) \quad |\mathbf{V}| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = v.$$

त्वरण—

$$(3) \quad \dot{\mathbf{V}} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (\ddot{x}, \ddot{y});$$

$$(4) \quad |\dot{\mathbf{V}}| = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$$

वेग और त्वरण को कार्तीय निर्देशांशों में विघटित करने के स्थान पर उन्हें बल संहति-बिंदु के चलने से रचित यक के नैन निर्देशांशों के पदों में भी विघटित कर सकते हैं। चक्र के चाप की लम्बाई के लिए s लिगिए। निम्नाक्षर s का स्वयं पथ की दिशा से मतलब होगा जो चक्र के बिंदु पर बदल सकती है; निम्नाक्षर α वक्र के किसी स्थान पर s से लंबवत् दिशा बतलावेगा। तो अब होगा

$$(5) \quad r_s = \pm r; \quad r_n = 0.$$

यह तो नगण्य है, परन्तु त्वरण \mathbf{V} का $\dot{\mathbf{V}}_s$ और $\dot{\mathbf{V}}_n$ में विघटन सार्थक है। यदि पथ की स्पर्श-रेखा और x दिशा के बीच का कोण α हो तो स्पर्शरेखा की ओर का त्वरण होगा

$$(6) \quad r_s = \dot{v}_s \cos \alpha + \dot{v}_n \sin \alpha;$$

और अभिलंब त्वरण* होगा—

$$(7) \quad \dot{v}_n = -\dot{v}_s \sin \alpha + \dot{v}_n \cos \alpha$$

परन्तु

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}}{s} = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{\dot{y}}{s} = \frac{v_y}{v},$$

इस कारण

$$\begin{aligned} (8) \quad \dot{v}_s &= \frac{1}{v} \left(v_x \dot{v}_s + v_y \dot{v}_n \right) = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} v^2 = \frac{dv}{dt} = |v|. \end{aligned}$$

इस समीकरण में कहा गया है कि स्पर्शरेखीय त्वरण ही वेग के मान का परिवर्तन है, उसका दिशा-परिवर्तन चाहे कुछ भी हो। इससे भिन्न समीकरण, (7)

$$\begin{aligned} (9) \quad \dot{v}_n &= \frac{1}{v} (v_x \dot{v}_n - v_y \dot{v}_s) = \frac{1}{v} (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) \\ &= v^2 \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v^2}{\rho}, \quad \text{देता है,} \end{aligned}$$

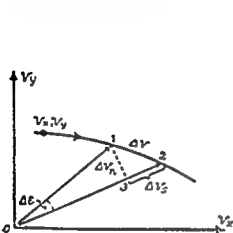
जहाँ $\frac{1}{\rho}$ पथ की वक्रता* है।

1. Normal acceleration

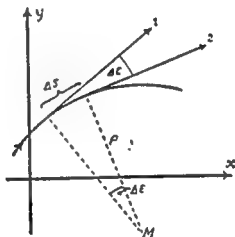
*देखिए उदाहरणार्थ Franklin, Treatise on Advanced Calculus, पृष्ठ २९५।

अनएव अभिन्वीय^१ स्वरणवेग-परिवर्तन पर नहीं, किन्तु स्वरणवेग पथ और प्रक्षेप-पथ के रूप पर निर्भर करता है। यदि वही $\frac{dv}{dt} = 0$ तो स्वरण, वेग और द्रव्य पथ के भी अभिन्वीय^२ होगा।

अब हम ये ही मसल हैमिन्टन^३ प्रवेक्षित वेगान्तर^४ द्वारा सीधे ही अवकाश-ज्यामितीय प्रकार से व्युत्पन्न करेंगे।



आकृति ४ क—समन्तल में गति का वेगालेख्य
ध्रुवीय रेखांकन में वेग-द्रव्य V_1 और V_2
ध्रुव ० से जोड़े गये हैं।



आकृति ४ ख—समन्तल में गति के
प्रक्षेपपथ और वक्रता-त्रिज्या।

आकृति ४ क और आ० ४ ख की परस्पर तुलना से वेगालेख्य का अर्थ स्पष्ट हो जाता है। आ० ४ ख में xy -तल में गति का प्रक्षेप-पथ दिखाया गया है। दो पास-पास के, Δs दूरस्थ, बिंदुओं पर जो वेग हैं वे पथ की स्पर्श-रेखाओं द्वारा दिखाये

1. Normal 2. Trajectory 3. Differential

* अंग्रेजी में इसे होडोग्राफ Hodograph कहते हैं। ग्रीक शब्द, होडास (hodos) का अर्थ 'पथ' है और इसलिए इसको पथालेख्य कहना चाहिए। परंतु जैसाकि पुस्तक के मूल-लेखक श्री सोमरफेल्ड इस स्थान पर दो हुई टिप्पणियों में कहते हैं, "होडोग्राफ=पथालेख्य, जो कि भ्रामक है।" ठीक नाम वेगालेख्य ही है, या सोमरफेल्ड के शब्दों में, "वेग का ध्रुवीय रेखाचित्र"।

गये हैं; उनके बीच का कोण Δc है। यही कोण यत्रता केंद्र M पर भी होता है। यदि यत्रता की त्रिज्या ρ हो तो

$$(10) \quad \Delta s = \rho \cdot \Delta c$$

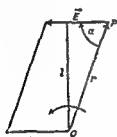
आ० ४ क में ये ही दो वेग एक साथ मूल-बिंदु, O , से सीधे गये हैं। दोनों वेगों की दिशाएँ दोनों रेखाचित्रों में वही हैं। दो निकटस्थ सदिशों $\vec{O_1}$ और $\vec{O_2}$ पर ध्यान दीजिए, जिनके बीच का कोण Δc है। बिंदु 1 के $\vec{O_2}$ पर प्रक्षेप से बिंदु 3 मिलता है। सदिश $\Delta V = \vec{12}$ के विघटन से $\Delta v_1 = \vec{32}$ और $\Delta v_2 = \vec{13}$ मिलते हैं। अतएव निम्नलिखित संबंध प्राप्त होते हैं जो (8) और (9) से सहमत हैं—

$$v_1 = \frac{\vec{32}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt};$$

$$v_n = \frac{\vec{13}}{\Delta t} = \frac{\Delta c \cdot v}{\Delta t} = \frac{\Delta c}{\Delta s} v^2 = \frac{v^2}{\rho}.$$

पश्चोक्त के लिए (10) का स्मरण कीजिए। समस्या I.9. से तुलना कीजिए।

(2) समतल स्थैतिकी तथा चल-गतिकी में घूर्णन की धारणा



आकृति ५—बिंदु O के प्रति \vec{E} सदिश का घूर्णन।

किसी सदिश राशि E का किसी अभिवेश-बिंदु O के प्रति घूर्णन इस प्रकार परिभाषित होता है कि वह उस सदिश के अनुप्रयोग-बिंदु (P) से अभिवेश-बिंदु (O) तक की सदिश त्रिज्या (r) तथा उस सदिश (E) का सदिश गुणनफल है; अर्थात्

$$(11) \quad N = r \times E$$

अतएव घूर्णन N एक समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल द्वारा निरूपित होगा जिसकी संलग्न भुजाएँ होंगी r तथा E और जो r से E की ओर की दिशा में घूर्णन करता होगा,

1. Projection

2. Plane statics

जैसा कि तीर द्वारा आकृति ५ में दिखाया गया है। परिमाण में वह निम्न-लिखित होगा

$$(11a) \quad |N| = l |E| = r |E| \sin \alpha.$$

जहाँ l है O में E पर वह अभिलम्ब, जो O के प्रति E की "उत्तोलक दानु" है। यदि E एक बल F हो तो बल का घूर्ण अर्थात् ऐंठ L प्राप्त होता है जहाँ

$$(12) \quad L = r \times F$$

जिमी बल, F , का घूर्ण, स्थितिकी में एक धारणा है जिसका आविष्कार बहुत पहले स्वयं आकिमिडोज ने किया था। यदि F के कार्तीय घटकਾਂको X और Y में सूचित करें तो प्रारम्भिक मदिन बीजगणित में महज ही यह प्राप्त होता है—

$$(12a) \quad L_z = xY - yX$$

घूर्ण की धारणा चल-गतिकी एवं बल-गतिकी में भी महत्व की है, अभी समझ लें की बातों पर ही विचार करेंगे। तो गतिकी के लिए,

$$\text{वेग का घूर्ण} = r \times v$$

$$\text{त्वरण का घूर्ण} = r \times v'$$

$$\text{सवेग का घूर्ण} = \text{कोणीय सवेग} = r \times p = m(r \times v)$$

कार्तीय निर्देशांकों में (12a) के नमूने पर, प्राप्त होता है—

$$(13) \quad r \times v = x\dot{y} - y\dot{x}; \quad r \times v' = x\ddot{y} - y\ddot{x}.$$

वेग और त्वरण के घूर्णों में निम्नलिखित संबंध है

$$(14) \quad r \times v' = \frac{d}{dt} r \times v.$$

यह इस प्रकार व्युत्पन्न होता है कि $\frac{dr}{dt} = v$ और $v \times v = 0$; अतएव

$$(14a) \quad \frac{d}{dt} (r \times v) = r \times \frac{d}{dt} v + v \times v = r \times v'.$$

निर्देशांकों में विघटन द्वारा प्राप्त प्रचलित प्रमाण ठीक समी० (14a) जैसा चलता है—

$$(14b) \quad \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x} - \dot{y}\dot{x} = x\ddot{y} - y\ddot{x}.$$

आकृति ५ में यदि स्वेच्छ सदिश \mathbf{E} के स्थान पर बिंदु P का किसी भी (अथवा स्वेच्छ) पथ में होता हुआ वेग \mathbf{V} समझा जाय, तो एक अन्य सरल संबंध निकाला जा सकता है, इस बार कोणीय सवेग और तथोक्त क्षेत्रफलीय वेग के बीच। वह मूलबिंदु O से खींची हुई सदिश त्रिज्या को चलाने से, बूझारे हुए, अत्यंत सरल $d\mathbf{S}$ का क्षेत्रफल, $\mathbf{r} \times d\mathbf{s}$ वाले समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होगा; कारण क्षेत्रफलीय वेग होगा—

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})$$

अतएव क्षेत्रफलीय वेग और कोणीय सवेग का संबंध यह निकलता है—

$$(15) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{p} = 2m \frac{d\mathbf{S}}{dt}.$$

(३) चल-भारिकी आकाश में

यहाँ सदिश को त्रिविमतीय प्रक्षेप-पथ संबंधित इन तीन दिशाओं में विभाजित करते हैं—पथ के स्पर्श रेखीय (s), मुख्य-अभिलंब (n) और द्वितीय लंब^१ b (जो उभय दिशाओं के लम्बवत् होता है)। तो निम्नलिखित प्राप्त होंगे—

$$\mathbf{V} = (v, 0, 0)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \left(\dot{v}, \frac{v^2}{\rho}, 0 \right)$$

यहाँ ρ वक्रता त्रिज्या^२ है जिसका प्रवेश (9) और (10) में हुआ था और प्रस्तुत स्थिति में प्रक्षेप पथ के आसलेयक समतल^३ में होगी।

यदि वेग या त्वरण के घूर्णों को लें तो उनकी परिभाषा अब भी वही रहती अर्थात् $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ और $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{V}}$; परंतु आकृति ५ को अब त्रि-विमतीय समझना होगा। परिमाण तथा घूर्णन-दिशा के अतिरिक्त अब वहाँ खींचे समांतर-चतुर्भुज का अवकाश में स्थान भी होगा। इस स्थान को समांतर चतुर्भुज के समतल के अभिलंब द्वारा सूचित करने की प्रथा प्रचलित हो गयी है क्योंकि वैसा करने से मूर्त कल्पना करने में सहायता मिलती है। अभिलंब की दिशा वह लेना लोक-प्रचलित हो गया है जो उ

1. Infinitesimal element
2. Binormal
3. Radius of curvature
4. Osculating plane

और होती है जिन ओर घूर्ण की घूर्णन-दिशा में (r में V या V' की तरह n में कम के कोण में) घुमाने में कोई दक्षिणवर्त्ती पैच चढ़। घूर्ण का सदिश जिन तब एक तीर का रूप धारण करता है जिनका नीचाय इन अभिव्य की दिशा में r की दिशा में लंबाई घूर्ण के परिमाण के बराबर हो। अतएव आह्वान ५ के घन की दिशा कागज के समतल के लंबवत् ऊपर की ओर हुई। इन प्रथम का तथा अर्धत ओर ध्रुवीय सदिशों के प्रभेद का पूर्ण अनुसंधान हम अध्याय ४ प्रकरण २३, तथा स्थिति रंगेंगे।

यहाँ तक स्पष्टकरण लिये हुए किन्ती भी अभिनिर्देश-बिंदु O के लिए घूर्ण का वर्णन किया गया है। आगे के उप-प्रकरण में बतावेंगे कि किन्ती दिने हुए दक्ष के प्रति घूर्ण का क्या मतलब है।

(४) स्थैतिकी अवकाश में; बिंदु तथा दक्ष के प्रति बल का घूर्ण

किन्ती अभिनिर्देश बिंदु O के प्रति किन्ती बल F का घूर्ण निम्नलिखित मध्य द्वारा पूर्णतया निर्दिष्ट हो जाता है—

$$(16) \quad L = r \times F$$

जहाँ r अभिदेश बिंदु O से बल के अनुप्रयोग बिंदु P तक की सदिश प्रिया है; अर्थात् यदि O निर्देशांको का मूल-बिंदु लिया जाय तो

$$(16a) \quad r = x, y, z$$

ऊपर दिये हुए, दक्षिणवर्त्ती पैच के कायदे द्वारा, घूर्ण L एक सदिश की भाँति अनुरूपित किया जा सकता है। सदिश की लंबाई $|L|$ होगी। अब प्रश्न उठता है कि निर्देशांक अक्षों की ओर L के घटक क्या होंगे? इन्हें हम घूर्ण-सदिश के उन तीन अक्षों पर के प्रक्षेपों द्वारा निर्दिष्ट कर सकते हैं। उदाहरणन,

$$(17) \quad L_z = |L| \cos [L, z].$$

परंतु $|L|$ एक ममांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है जिसकी भुजाएँ हैं r तथा F । अतएव (17) का दक्षिण अंग इस ममांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का x, y समतल पर प्रक्षेप हुआ। प्रक्षिप्त भुजाएँ होंगी—

$$r_{\text{proj}} = (x, y); \quad F_{\text{proj}} = (X, Y),$$

इस कारण, (17) की सहायता से, (12a) की भाँति, निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$(17a) \quad L_x = xY - yX,$$

और इसी भाँति,

$$(17b) \quad L_x = yZ - zY; \quad L_y = zX - xZ$$

L के इन, L_x, L_y, L_z घटकों को बल F के x, y, z अक्षों के प्रति होने वाले घूर्णन कह सकते हैं। मिलाइए, समस्या 1.10.

जो कुछ निर्देशांक अक्षों के बारे में कहा गया है वह किसी भी अक्ष, a के लिए भी लागू है। जैसे कि (17) में, वैसे ही, बल F का अक्ष a के प्रति घूर्णन, अक्ष (a) पर स्थित बिंदु O के प्रति घूर्णन लेकर और संगत घूर्णन सदिश को a पर प्रक्षिप्त कर निश्चित किया जाता है। या, जैसे कि 17a, b में, O के प्रति घूर्णन के क्षेत्रफल को a के लंबवत् तल पर प्रक्षिप्त कर निकाला जा सकता है। एक तीसरी विधि में बल के अनुप्रयोग के बिंदु से a तक की न्यूनतम दूरी ली जाती है, जिस दूरी को उत्तोलन बाहु, l , कहेंगे। इस विधि में F को तीन घटकों में विघटित करते हैं— F_a, a के समांतर; F_l, l की दिशा में, और F_n, l और a दोनों के लंबवत्। इस प्रकार प्राप्त करते हैं—

$$(18) \quad L_a(F) = L_a(F_a) + L_a(F_l) + L_a(F_n).$$

दक्षिण पक्ष के प्रथम दो पद शून्य होंगे; क्योंकि यदि बल a के समांतर हो या a को प्रतिच्छिन्न करे तो उसका a के प्रति कोई घूर्णन नहीं हो सकता। केवल तीसरा पद रह जाता है जो a के लंबवत् एक बल के कारण है। यह बल l लंबी उत्तोलक बाहु द्वारा काम करता है। इसलिए समी० (18) के स्थान पर (18a) यो बन जाता है

$$(18a) \quad L_a(F) = L_a(F_n) = F_n \cdot l.$$

इस अवसर पर दो सदिशों के गुणनफल के विभिन्न संकेतनों के बारे में कुछ कह देना उचित होगा। निम्नलिखित तालिका दिखाती है कि दुभाग्यवत्, ये संकेतन, ऐतिहासिकतया एवं राष्ट्रीय व्यवहारतः एक दूसरे से कितने भिन्न हैं।*

1. Intersect

* अंग्रेजी भाषांतर में द्वितीय स्तंभ के अतिरिक्त तृतीय से सप्तम स्तंभों में सादे रोमन अक्षरों (AB) के स्थान पर कटीले अक्षर (\mathcal{AB}) दिये हैं।

1	2	3	4	5	6	7
गुणनफल का नाम	यह पुस्तक	जर्मन मस्करण सोमफेण्ड	गिब्स Gibbs	हेवीसाइड Heaviside	इटली में	ग्रास्मान Grassman
अदिश या भौतरी	$A \cdot B$	(AB)	AB	AB	$A \times B$	$A B$
सदिश या बाहरी	$A \times B$	$[AB]$	$A \times B$	∇AB	∇B	AB या $ AB$

कुछ व्याख्यात्मक टिप्पणियाँ दी जाती हैं। महान् उष्मागतिकी वेत्ता^१ विलाड गिब्स^२ ने अपने विद्यार्थियों के लिए सदिश विश्लेषण अर्थात् सदिश गणित का, जो उस समय कम ही ज्ञात था, सक्षिप्त सारांश तैयार किया। कुछ थोड़े से परिवर्तनों के साथ उसके सकेतन का ही अंग्रेजी और अमेरिकन विद्वान् अब भी व्यवहार करते हैं। तत्पश्चात् हेवीसाइड^३ के सकेतन का साधारणतया परित्याग कर दिया गया, जिसमें सदिश^४ गुणन के लिए ∇ अक्षर का व्यवहार किया गया था। इटैलियन सकेतन मार्कोलॉंगो^५ ने प्रारंभ किया था। हर्मन ग्रास्मान^६ ने अपनी 'वितान-गणित' में खंडों (वृत्त खंडों) और बिंदुओं द्वारा हिसाब लगाने की एक तर्कसंगत प्रणाली विकसित की थी। उनके मतानुसार, दो निर्देशित खंडों, a तथा b के बीच सरलतम संबंध है उनका 'तलीय परिमाण'^७ अर्थात् a और b से बनाया हुआ समांतर चतुर्भुज, जिसको वे, इस कारण, ab द्वारा, यद्यपि कभी-कभी $[ab]$ द्वारा भी, सूचित करते हैं। ग्रास्मान के सकेतन की सदिश गुणन सूचक ऊर्ध्वाधर रेखा का "कोटिपूरक"^८ से मतलब है, अर्थात् वह तलीय परिमाण के लंबवत् सदिशीय सीराय (ऐरो पाइंट) को जाना दिखलाती है।

1. Thermodynamist
2. Willard Gibbs
3. Heaviside
4. Vector,
5. Marcolongs
6. Hermann Grassmann
7. Ausdehnungslehre (Extension Analysis 1844 and 1862)
8. Plangrosse, planar magnitude complementary

§ ६. स्वतन्त्रतापूर्वक चलते हुए संहति-बिंदु का गति-विज्ञान (वस्तुगतिकी); केप्लर समस्या; स्थितिज ऊर्जा की धारणा

(१) स्थिर सूर्य मानकर केप्लर की समस्या

स्वतन्त्रतापूर्वक चलने हुए मानि बिंदु का यह सरलतम दृष्टान्त, जिसकी वस्तुता की जा सकती है, हमारे विषय के विषय के लिए भी अत्यन्त महत्ववर्ती है। यह है ग्रहों की गति, जो एक द्विविधनीय समस्या है, और यदि विचारणीय विषय हुआ पृथिवी, तो गति 'प्राणित' में होती है। मान लें कि सूर्य अपने स्थान में स्थिर रहता है। हम मत का समर्थन सूर्य की आपेक्षिक संहति की महानता करती है—

$$\text{सूर्य, } 330,000, \text{ गुरु } 320; \text{ पृथ्वी, } 1; \text{ चंद्र } \frac{1}{81}$$

हम इस समस्या पर जिसमें सूर्य की गति का प्रश्न भी है, इस प्रकरण के भाग (२) में विचार करेंगे। सूर्य की संहति M लीजिए तथा ग्रह की m यदि ℓ हो न्यूटनीय आकर्षण होगा—

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad G = (\text{गुरुत्वाकर्षणीय नियतांक})$$

अथवा, सदिशीयतया,

$$(1) \quad F = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

यह बल अक्षर बिंदु O अर्थात् सूर्य-केंद्र से होकर जाता है, जोकि सदिश-त्रिज्या (\mathbf{r}) के लिए मूल बिंदु का काम देता है। परिणामतः

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0;$$

और इसलिए द्वितीय नियम से,

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = 0;$$

तथा, (5.14) को ध्यान में रखते हुए,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{नियत} \quad |$$

1. Mass point, 2. Ecliptic

* ये संख्याएँ Kaye & Labe's Tables में यों दी गयी हैं—333,434; 318-4, 1.000; .0123.

अर्थात् सूर्य के चारों ओर का कोणीय गति नियत है, और इसलिए गमो (5.15) का क्षेत्रफलीय वेग भी नियत है। यही केप्लर का द्वितीय नियम है—

सूर्य से ग्रह तक की सदिश-त्रिज्या समान काल में समान क्षेत्रफल में विस्तार रहती है।

इस नियत क्षेत्रफलीय वेग को दो से गुणन करने के फल में (क्षेत्रफलीय का नियतार) C मान लीजिए, अर्थात्

$$(2) \quad 2 \frac{ds}{dt} = C$$

अब हम ध्रुवीयकोण ϕ प्रस्तुत करते हैं जिसे खगोलज "सत्य कौणिकान्तर" (वास्तविक असमता) कहते हैं (देखिए आकृति ६) इससे प्राप्त होता है।

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\phi; \quad 2 \frac{ds}{dt} = r^2 \dot{\phi} = C.$$

अतएव

$$(3) \quad \dot{\phi} = \frac{C}{r^2}.$$

* खगोल शास्त्र में सत्य कौणिकान्तर को अभिभानु (perihelion) से नापते हैं, परंतु यहाँ वह अपभानु से नापी समझी गयी है और उसका मतलब है, "सूर्य के दृष्टि कोण से ग्रह की अपभानु (aphelion) से कोणीय दूरी।"

अंग्रेजी शब्द है anomaly; शाब्दिक अर्थ असमता, विषमता, बिभ्रंस्तलता, आदि। खगोल विज्ञान में इस शब्द को सूर्य-ग्रह सदिशत्रिज्या-चालित कोण के लिए लेते हैं, क्योंकि यद्यपि क्षेत्रफलीय वेग नियत है इस कोण की गति असम है। अतएव "अनामली" के लिए "कौणिकान्तर" शब्द रखा गया है। कई प्रकार के कौणिकान्तर होते हैं। यदि कोण अभिभानु से नापा गया हो तो- खगोल विज्ञान में उसे सत्य कौणिकान्तर कहते हैं। यदि वह दीर्घ वृत्तीय केन्द्र से नापा जाय तो उसे उत्केन्द्रीय कहते हैं। कोणीय वेग को सम मानकर जो कोण निकलता है उसे माध्य कौणिकान्तर कहते हैं।



आ० ६—केप्लर समस्या के लिए, ध्रुवी निर्देशांक। सूर्य, मूलविन्दु। सदिश त्रिज्या द्वारा आस्तीर्ण क्षेत्रफल।

केप्लर के प्रथम नियम, अर्थात् प्रक्षेपपथ के समीकरण, की व्युत्पत्ति के लिए बलों को कार्तीय निर्देशांकों की ओर विघटित करेंगे। m से भाग देने के बाद गति-समीकरण हो जाता है—

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \cos \phi$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \sin \phi$$

दोनों समीकरणों के दोनों पक्षों को यदि ϕ से गुणा कर दें और (3) का उपयोग करे तो हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dx}{d\phi} = -\frac{GM}{C} \cos \phi$$

$$\frac{dy}{d\phi} = -\frac{GM}{C} \sin \phi$$

ये अब समाकलित किये जा सकते हैं। यदि A और B समाकलन नियतांक (समाकलनांक) हों तो

$$(5) \quad x = -\frac{GM}{C} \sin \phi + A$$

$$y = +\frac{GM}{C} \cos \phi + B$$

इसका आशय यह हुआ कि ग्रहीय गति का वेगालेख निम्नलिखित वृत्त है—

$$(5a) \quad (x-A)^2 + (y-B)^2 = \left(\frac{GM}{C}\right)^2$$

इस विषय पर समस्या 1.11 में पुनः विचार करेंगे। यहाँ, (5) के वामांगों को ध्रुवी निर्देशांकों में रूपांतरित करेंगे,

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

अतएव

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi = -\frac{GM}{C} \sin \phi + A$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi = \frac{GM}{C} \cos \phi + B$$

अब प्रथम समीकरण को $-\sin \phi$ से और द्वितीय को $\cos \phi$ से गुणा करने के बाद, दोनों गुणनफलों का योग कर, \dot{r} को निरसित कर देंगे। तो प्राप्त होगा—

$$r \dot{\phi} = \frac{GM}{C} - A \sin \phi + B \cos \phi$$

अथवा, (3) का स्मरण करते हुए,

$$(6) \quad \frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2} - \frac{A}{C} \sin \phi + \frac{B}{C} \cos \phi$$

ध्रुवी निर्देशांकों में यह एक शाकब (शंकु) काट का समीकरण है जिसका मूलविंदु शाकब काट की एक नाभि (फोकस) का सपाती है। अतएव हमें केप्लर का यह प्रथम नियम प्राप्त होता है “ग्रह एक दीर्घवृत्त की रचना करता है या दीर्घवृत्त पर चलता है जिसकी एक नाभि पर सूर्य (विराजमान) है”। इस संबंध में ध्यान दीजिए कि दो अन्य प्रक्षेपपथ उतने ही संभव हैं जितने कि दीर्घवृत्त, अर्थात् परवलय और अतिपरवलय; परंतु प्रकट होना चाहिए कि ये ग्रहों पर लागू नहीं हैं वरन् केवल धूमकेतुओं पर ही हैं। इनकी विवेचना यहाँ नहीं करेंगे, परंतु पाठक का ध्यान समस्या 1.12 की ओर आकर्षित कर देते हैं।

केप्लर के प्रथम नियम की जो व्युत्पत्ति यहाँ दी गयी है वह प्रायः अन्य सब पुस्तकों में दी गयी व्युत्पत्ति से भिन्न है। इनमें ऊर्जा समीकरण से प्रारंभ करते हैं, जिसकी व्युत्पत्ति अब हम करेंगे। इसके लिए हम (4) के समीकरणों को लेंगे और उनके बायें अंगों में $\cos \phi$ के स्थान पर $\frac{x}{r}$, $\sin \phi$ के स्थान पर $\frac{y}{r}$ लिखेंगे। तत्पश्चात्, पहले समीकरण को \dot{x} से, दूसरे को \dot{y} से गुणा कर, गुणनफलों का योग करने से प्राप्त करेंगे—

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = - \frac{GM}{r^2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = - \frac{GM}{r^2} - \frac{dr}{dt}$$

इसका t के लिए समाकलन निम्नलिखित देता है—

$$(7) \quad \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{GM}{r} + E$$

इस समीकरण का बायाँ अंग m से विभाजित गतिज ऊर्जा है। दायाँ पक्ष का प्रथम पद, चिह्न के अतिरिक्त, m से विभाजित स्थितिज ऊर्जा है (देखिए इसी प्रकार का तृतीय भाग)। अतएव E हुई m से विभाजित पूर्ण ऊर्जा। इस समीकरण (7) का रूप यही है जो कि (3.8) के एक-विमितीय गति के ऊर्जा-समीकरण का था।

ऊर्जा-समीकरण (7) से पथ-समीकरण (6) तक पहुँचने की यथासंभव सरलतम विधि के लिए, स्मरण करिए कि ध्रुवी निर्देशांकों में किसी रेखा के अल्फा का वर्ण निम्नलिखित होता है—

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

इसलिए प्राप्त होता है—

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left\{ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 \right\}, \end{aligned}$$

अथवा, (3) के ध्यान से,

$$C^2 \left\{ \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\}$$

यदि $S = \frac{1}{r}$ रख दें तो यह हो जाता है—

$$C^2 \left\{ \left(\frac{ds}{d\phi} \right)^2 + S^2 \right\}$$

अतएव हमारा ऊर्जा समीकरण (7) निम्नलिखित में रूपांतरित हो जाता है—

$$\frac{1}{2} C^2 \left\{ \left(\frac{ds}{d\phi} \right)^2 + S^2 \right\} - GMS = E.$$

इसका ϕ के लिए अवकलन करने से प्राप्त होता है—

$$\frac{ds}{d\phi} \left\{ C^2 \left(\frac{d^2s}{d\phi^2} + s \right) - GM \right\} = 0$$

कारण कि $\frac{ds}{d\phi} \neq 0$, अतएव कोष्ठक लुप्त हो जायगा। इस प्रकार हमें निम्नलिखित रैखिक समांग समाकल समीकरण प्राप्त होता है, जिसमें s के द्वितीय कोटि के नियत अवकल गुणांक होंगे—

$$\frac{d^2s}{dt^2} + S = \frac{GM}{C^2}$$

इस प्रकार के समीकरण का व्यापक साधन दो पदों का योग होता है, एवं तो असमघात समीकरण का कोई एक विशिष्ट साधन और दूसरा समघात समीकरण का व्यापक साधन (समाधान) ।

प्रकटतया

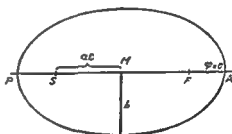
$$S = \text{नियत} = \frac{GM}{C^2}$$

असमघात समीकरण का एक विशिष्ट समाकल है । समघात समीकरण का व्यापक साधन $\sin \phi$ और $\cos \phi$ का योग है । अब हम A/C और B/C को अपने समाकलनांक बना सकते हैं और अततः प्राप्त करते हैं —

$$S = \frac{GM}{C^2} - \frac{A}{C} \sin \phi + \frac{B}{C} \cos \phi$$

जो कि बिल्कुल वही है जिसे (6) में प्राप्त किया था ।

अब हम इस समीकरण का विशिष्टीकरण इस प्रकार करेंगे कि $\phi = 0$ वाली रेखा पर जो एक नाभि (F) से चलकर दूसरी नाभि (S) से भी होकर जाती है; अर्थात् जो रेखा $\phi = 180^\circ$ के साथ, दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष है (देखिए आ० ७) । उस पर स्थित है विदुद्ध्य P (perihelion, परिसौर बिन्दु या अभिमान, सूर्य से निकटतम बिन्दु) तथा A (aphelion, अपमान या सूर्य से दूरतम बिन्दु), जहाँ r क्रमात् अल्पतम और महत्तम होता है । अतएव हम यह प्रतिबंध लगाते हैं कि,



आकृति ७—केप्लर दीर्घवृत्त और उसके नाभिद्वय (S, F), दीर्घ तथा लघुअक्ष (ae) उत्केन्द्रता, अपमान (A) तथा अभिमान (P), उत्केन्द्रता (E) ।

$$\frac{dr}{d\phi} = 0, \quad \phi = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \text{ के लिए,}$$

जो, (6) के द्वारा, $A=0$ कर देता है।

इसके अतिरिक्त यदि दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता e हो तो आकृति ३ दिगलती है कि

$$\text{अभिभानु पर } r = SP = a(1 - e), \quad \phi = \pi;$$

$$\text{अपभानु पर, } r = SA = a(1 + e), \quad \phi = 0$$

तो, समी० (6) के अनुसार प्राप्त होता है कि

$$\text{अभिभानु पर, } \frac{1}{a(1-e)} = \frac{GM}{C^2} - \frac{B}{C}$$

$$\text{अपभानु पर, } \frac{1}{a(1+e)} = \frac{GM}{C^2} + \frac{B}{C}$$

इनको जोड़ने और घटाने से हम प्राप्त करते हैं, जमात,

$$(8) \quad \frac{GM}{C^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{e}{a(1-e^2)}$$

अंत में क्षेत्रफलीय वेगांक C को आवर्तकाल T के पदों में प्रकट करेंगे। समी० (2) से तुरंत ही सदिश त्रिज्या द्वारा बनाया हुआ संपूर्ण क्षेत्रफल (C) प्राप्त कर लेते हैं—

$$C = \frac{2S}{T} \text{ जहाँ } S = \pi ab = \pi a^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

इसका परिणाम यह हुआ कि

$$(9) \quad C^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2}$$

यदि इसका समीकरण द्वय (8) के पहले समीकरण में उपयोग करें तो प्राप्त करते हैं—

$$(10) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

कारण कि G और M सभी ग्रहीय प्रक्षेपणों के लिए एक समान है, समी० (10) केप्लर के तृतीय नियम की अभिव्यक्ति है —

“आवर्तकाल के वर्गफल दीर्घ अक्ष के घनफलों के समानुपाती है।”

अपने इस तृतीय नियम के आविष्कार का स्वागत केप्लर ने निम्नलिखित उल्लासपूर्ण अभ्युक्ति द्वारा किया था ।

“अतः मैं इस बात पर प्रकाश डाल पाया हूँ, और यह सत्यापित कर लिया है, यद्यपि इसकी आशा तथा अपेक्षा न थी कि खगोलीय पिंडों की गति में आवर्तता की प्रकृति, पूर्णतया और प्रत्येक व्योरे में कूट-कूट कर समायी हुई है—यद्यपि यह ठीक है कि उस प्रकार नहीं जैसा कि मैंने पहले सोचा था वरन् एक विलकुल दूसरी ही, पूर्णतया संपूर्ण, भाँति से ।”

वास्तव में तृतीय केप्लर नियम, समी० (10) के रूप में, पूर्णतः ठीक नहीं है । वह वैध तभी तक होगा जबकि सूर्य की संहति, M , की अपेक्षा ग्रहीय संहति, m , को उपेक्षणीय समझें, जैसा कि यहाँ तक इस विवेचन में मान लिया गया है । परन्तु अब हम अपना यह अनुमान वापस ले लेंगे और वैसा करने से खगोल विद्या की वास्तविक द्विपिंड समस्या पर जा पहुँचेंगे । यह एक महत्व की बात है कि यह समस्या अतयक विवेचित एक-पिंडीय समस्या से अधिक कठिन नहीं है ।

(२) केप्लर समस्या, सूर्य की गति सहित

समझ लीजिए कि सूर्य (S) के निर्देशांक x_1, y_1 हैं; ग्रह (P) के x_2, y_2 .

न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार, S पर पड़ने वाला बल, P पर पड़े हुए बल के बराबर, किन्तु प्रतिकूल होगा । अतएव पूर्ण गतिसमीकरण निम्नलिखित होंगे—

$$\left. \begin{array}{l} \text{सूर्य के लिए} \\ M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{mMG}{r^2} \cos \phi; \\ M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{mMG}{r^2} \sin \phi; \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ग्रह के लिए} \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = - \frac{mMG}{r^2} \cos \phi; \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = - \frac{mMG}{r^2} \sin \phi. \end{array}$$

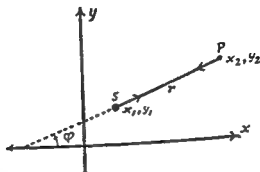
अब हम आपेक्षिक स्थान के ये निर्देशांक प्रस्तुत करते हैं—

$$(III) \quad x_2 - x_1 = x, \quad y_2 - y_1 = y;$$

अपिच, संहति-केन्द्र के निर्देशांक भी, जो निम्नलिखित हैं—

* Harmonice mundi, 1619. प्रथम दो केप्लर नियम Astronomia Nova, 1609, में प्रकाशित हो चुके थे ।

$$(11b) \quad \frac{mx_2 + Mx_1}{m+M} = \xi, \quad \frac{my_2 + My_1}{m+M} = \eta.$$



आकृति ८—केप्लर समस्या, सूर्य की गति को ध्यान में रखते हुए।
गति-समीकरणों को घटाने से प्राप्त होता है—

$$(12) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(M+m)G}{r^2} \cos \phi,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{(M+m)G}{r^2} \sin \phi.$$

और उनका योग देता है—

$$(13) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0$$

समीकरण (12) की, पहले प्राप्त किये हुए (4) समीकरण से तुलना करत पर तुरंत मालूम हो जाता है कि केप्लर के प्रथम दो नियम पूर्णतया ठीक उतरते हैं अर्थात् सक्षेप गति के लिए भी वे वैध हैं। तृतीय नियम का रूप हो जाता है—

$$(14) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

अतएव अनुपात T^2/a^3 एक सार्वत्रिक नियतांक नहीं रहता, किंतु सैद्धांतिकतया प्रत्येक ग्रह के लिए थोड़ा-थोड़ा भिन्न है। परंतु सूर्य की महती संहति के कारण समीकरण (10) से ये भिन्नताएँ बहुत ही छोटी हैं।

समीकरणद्वय (13) से यह भी प्रकट होता है कि सूर्य और ग्रह का संहति-केन्द्र नियत वेग से चलता है। यदि अपने परिचलन के लिए अभिदेश पद्धति ऐसी है जिसमें संहति केंद्र मूल बिंदु पर स्थित हो तो यह वेग शून्य के बराबर रहना होगा; और यही वात संहति-केन्द्र के निर्देशांकों (ξ, η) पर भी लागू है।

तदनुसार (11b) के समीकरणद्वय भी सरल हो जाते हैं। उनको (11a) के समीकरणों की सहायता से, मूल के निर्देशांक x_1, y_1 एवं ग्रह के निर्देशांक x_2, y_2 , अब सापेक्ष स्थान के निर्देशांक x, y के पदों में अलग-अलग व्यक्त किये जा सकते हैं—

$$(x_1, y_1) = -\frac{m}{M+m}(x, y),$$

$$(x_2, y_2) = \frac{M}{M+m}(x, y).$$

इससे परिणाम यह निकलता है कि संहति-केंद्र प्रणाली में, मूल और ग्रह, दोनों के ही प्रक्षेप-पथ दीर्घवृत्त ही होते हैं। ग्रह का दीर्घवृत्त तो प्रायः बिल्कुल वही रहता है जिसका कि इस प्रकरण के भाग (I) में विचार किया गया था। सूर्य का प्रक्षेप-पथ इससे बहुत ही छोटा “वामन” दीर्घवृत्त होता है जिसमें सूर्य के विचरने की दिशा * तो वही होती है जो कि ग्रह की, परंतु सूर्य की गति की कला में ग्रहगति की कला में * का भेद रहता है।

यदि गुरुत्वाकर्षण नियम यों बदल दें कि—

$$(15) \quad \text{गुरुत्व} = F = Kr^n, \quad n \text{ स्वेच्छ अर्थात् कोई भी}$$

तो द्वितीय केप्लर नियम अपरिवर्तित रहेगा; परंतु प्रक्षेपपथ बीजातीत बन जाते हैं, जो, व्यापकतया, बंद नहीं होते। केवल $n=1$ की स्थिति में ही दीर्घवृत्त प्राप्त होते हैं जैसे कि गुरुत्वाकर्षण की स्थिति में जहाँ $n=-2$ (देखिए समस्या 1.13)।

(३) क्षेत्र में विभव कब होता है ?

एक विमितीय गति में किसी बल X से संबंधित एक स्थितिज ऊर्जा V की परिभाषा हम बिना किसी कठिनाई के कर सकते थे—देखिए समी० (3.7)। जैसा कि उस समय कहा था, द्वि तथा त्रि-विमितीय गतियों के लिए ऐसा करना तभी संभव है जब कि कुछ शर्तें निभती हों। यदि (F) के कार्तीय निर्देशांक X, Y, Z हों तो त्रि-विमितियों की स्थिति के लिए, समी० (3.7) के सगत, स्थितिज ऊर्जा की परिभाषा होगी—

*यह दिशा वामावर्त अर्थात् घटिका प्रतिकूल (घटिका-सूची प्रतिकूल) है।

$$(16) \quad V = - \int^{\mathbf{r}} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

यदि V को ऐसी राशि होना है कि जो समाकलन-पथ पर न निर्भर करे, परन्तु केवल अंत-बिंदु पर ही निर्भर करे (आदि-बिंदु के निर्वाचन से केवलमात्र एक योगात्मक नियतांक प्राप्त होता है जो कि प्रत्येक स्थिति में कुछ भी हो सकता है), तो पर-समूह ,

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

को यथार्थ अवकल होना चाहिए; अर्थात् X, Y, Z को x, y, z के लिए एक "क्षेत्र-फलन" के अवकलज होना चाहिए। प्रस्तुत स्थिति में यह फलन केवल मात्र V है और हम कहते हैं कि V "विभव V से व्युत्पन्न" है। इसके लिए निम्नलिखित सुजात प्रतिबंध है—

$$(17) \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

जब ये प्रतिबंध पूरे होते हैं तब ही कोई क्षेत्रफलन $V(x, y, z)$ प्रत्येक बिंदु (x_1, y_1, z_1) के लिए निश्चित किया जा सकता है। इस V को "स्थितिज ऊर्जा" या केवल "विभव" कहते हैं*।

द्वि-विमितीय स्थिति में, जहाँ $Z=0$ और X, Y , यहाँ Z पर नहीं निर्भर करते (17) के तीन समीकरणों में से केवल पहला ही रह जाता है।

सदिश विश्लेषण (जो कि इस पुस्तकमाला की द्वितीय पुस्तक में दिया गया है, क्योंकि इस पुस्तक में केवल सदिश बीजगणित की ही आवश्यकता है) दिखाता है कि (17) के प्रतिबंधों का एक अपरिणाम्य अभिप्राय है अर्थात् वे निर्देशांकों के निर्वाचन पर नहीं निर्भर करते। द्वितीय पुस्तक में इन प्रतिबंधों का संक्षेपीकरण एवं सदिश समीकरण

$$\text{Curl} \mathbf{F} = 0$$

में किया जायगा। इसको बहुधा यों कहते हैं कि सदिश क्षेत्र \mathbf{F} अघूर्णीय है।

*अंग्रेजी के शब्द हैं, पोटेंशियल एनर्जी (potential energy) और पोटेंशियल (potential)। हिंदी अनुवाद में इनके लिए दो भिन्न-भिन्न शब्दों का व्यवहार किया गया है—स्थितिज ऊर्जा, और विभव। पाश्चात्य शब्दों का शाब्दिक अनुवाद होगा संभाव्य ऊर्जा और संभाव्यता या कहिए विभवात्मक ऊर्जा और विभव।

स्पष्ट है कि x, y, z के पदों में X, Y, Z को ऐसे व्यंजनों द्वारा भी व्यक्त कर सकते हैं जो (17) के प्रतिबंधों का पालन नहीं करते। दूसरी ओर, गुम्बवाक्यपूर्ण क्षेत्र इन प्रतिबंधों का प्रतिपालन करता है क्योंकि इस क्षेत्र के लिए

$$X=Y=0; \quad Z=-mg,$$

जिनमें निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं—

$$(18) \quad V=mgz.$$

ये बातें न्यूटन के नियम पर आधारित व्यापक गुम्बवाक्यपूर्ण क्षेत्रों तथा गणितीयतया उनके अनुरूप वैद्युत स्थैतिकी और चुम्बकीय स्थैतिकी के क्षेत्रों के लिए भी ध्रुव हैं। वास्तव में तो ये सभी क्षेत्र जो अधूर्णनीय, पर गाय ही नाय, समय-स्वतंत्र हैं ("विभव क्षेत्रसमूह") प्रकृति में एक अद्वितीय स्थान पर विराजमान हैं। पन्ड और अष्टम अध्यायों के व्यापक विकाशन में ये विशेष काम के होंगे।

कोई भी यांत्रिक निकाय जिसमें केवल विभवों द्वारा व्युत्पाद्य बल ही आरोपित हों, अविनाशक निकाय कहलाता है क्योंकि उसकी (पूर्ण) ऊर्जा अविनाशित रहती है। अन्यत्र, जहाँ ऐसा नहीं होता, अनविनाशक निकायों को अनविनाशी या क्षयशील कहते हैं।

द्वितीय अध्याय

निकायों की यांत्रिकी ; आभासी कर्म का सिद्धांत ; दालंबेरे का सिद्धांत

§ ७. यांत्रिकी निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ तथा आभासी विस्थापन ; पूर्ण-पदीय और अपूर्ण-पदीय नियंत्रण

किसी संहति बिंदु की स्वतंत्रता-संख्या एक होगी, यदि उसकी गति किसी ऋजु रेखा या वक्र पर ही नियंत्रित हो । यदि वह किसी समतल या वक्र पृष्ठ पर चलायी जाय तो उसकी स्वतंत्रता संख्याएँ दो होगी । अवकाश में स्वतंत्रतापूर्वक विचरते हुए संहति बिंदु की तीन स्वतंत्रता-संख्याएँ होती हैं ।

किसी भार-हीन, दृढ़ दंड से संबंधित दो संहति बिंदुओं की स्वतंत्रता-संख्याएँ पाँच होंगी ; क्योंकि एक बिंदु को स्वतंत्रतापूर्वक विचरते हुए समझ सकते हैं, परंतु दूसरा केवल उस गोल के पृष्ठ पर चल सकता है जिसकी त्रिज्या, दंड की लंबाई जितनी और केंद्र बिंदु पर हो ।

यदि संहति-बिंदुओं की संख्या n हो और वे अपने निर्देशांकों के बीच संबंधों द्वारा युग्मित हों तो उनकी स्वतंत्रता-संख्या f होगी, जहाँ—

$$(1) \quad f = 3n - r.$$

यदि संहति बिंदुओं की संख्या अनन्त हो जो अनन्त प्रतिबंधों द्वारा संबंधित हों तो उस प्रकार की गणना, स्वभावतया, असंभव होगी । इस स्थिति में स्वतंत्रता-संख्याएँ जानने के लिए क्या करना होगा, यह अब बतावेंगे । एक दृढ़ पिंड दृष्टांत का काम देगा ।

(क) स्वतंत्रतापूर्वक गतिमान दृढ़ पिंड

दृढ़ पिंड के किसी एक बिंदु को अलग लिये लेते हैं । इसकी तीन स्वतंत्रता-संख्याएँ हुईं । एक दूसरा बिंदु, पहले से एक नियत दूरी पर ("दृढ़" की परिभाषा !),

केवल एक गोलीय तल पर चल सकता है जिसका केंद्र प्रथम बिंदु होगा और जिसकी त्रिज्या उक्त नियत दूरी होगी। यह दो और स्वतंत्रता-संख्याएँ देता है। अंत में एक तीसरा बिंदु प्रथम दो बिंदुओं को मिलाने वाले अक्ष के चारों ओर एक वृत्त की रचना कर सकता है, तथा एक और स्वतंत्रता-संख्या प्रदान करता है। जब एक बार इन तीन बिंदुओं की गतियाँ विनिर्दिष्ट हो गयीं, तो दृढ़ पिंड के अन्य सारे बिंदुओं के पथ अद्वितीयतया निर्धारित हो गये। परिणामतः

$$f=3+2+1=6$$

(ख) समतल पर लट्टू

यह मान लेंगे कि नचाने के लट्टू के अधोभाग का अंत एक नोक पर होता है और इसको अपनी गणना के लिए प्रथम बिंदु लेंगे। इसकी दो स्वतंत्रता-संख्याएँ हैं। एक दूसरा बिंदु पहले के चारों ओर एक अर्द्धगोल पर चल सकता है; और एक तीसरा बिंदु प्रथम दो को मिलाने वाली रेखा के चारों ओर एक वृत्त पर चल सकता है। इस प्रकार यहाँ स्वतंत्रता-संख्याएँ हुईं,

$$f=2+2+1=5$$

(ग) लट्टू की नोक का बिंदु स्थिर

अब प्रथम बिंदु की दोनों स्वतंत्रता संख्याएँ चली गयीं, अतएव

$$f=0+2+1=3$$

(घ) निश्चित अक्ष वाला दृढ़ पिंड—लोलक^१

यहाँ

$$f=1.$$

यदि पिंड का सहति-केन्द्र अक्ष पर न हो तो ऐसे पिंड को भौतिकीय अथवा यौगिक लोलक कहते हैं। यदि पिंड एक बिंदुमात्र रह जाय तब गणितीय अथवा सरल लोलक प्राप्त होता है। यदि सहति-बिंदु की गति केवल किसी गोल के तल पर ही हो सके तो ऐसे लोलक को गोलीय लोलक कहते हैं, जिसकी स्वतंत्रता-संख्याएँ होंगी—

$$f=2.$$

(च) अनन्त स्वतन्त्रता-संख्याएँ

किसी विरूप्य^१ ठोस पिंड या द्रव्य के लिए

$$f = \infty.$$

इस स्थिति में गति समीकरण आंशिक अवकल समीकरण हो जाते हैं। मिश्रतः n परिमिति स्वतन्त्रता संख्याओं (n) वाला निकाय उतनी ही अर्थात् n संख्या के द्वितीय के लिए सामान्य अवकल समीकरणों द्वारा निर्धारित किया जाता है।

(छ) एक स्वतन्त्रता-संख्या वाला यंत्र

ऐसा यंत्र बहुत-से दृढ़-प्राय पिंडों का बना होता है, जो परस्पर या तो कड़ियों द्वारा या विविध प्रकार की गति-नियंत्रक युक्तियों द्वारा युग्मित रहते हैं। इस प्रकार के यंत्र का उच्च-कोटीय दृष्टांत पिस्टन इंजन की चालन (चलाने की) यंत्र-रचना है (आ० ९)। यदि यंत्र में अपकेंद्र नियंत्रक लगा हो (जिसको वाट नियंत्रक भी कहें हैं क्योंकि ऐसी युक्ति पहले पहल भाप इंजन के उद्भावक ने प्रस्तावित की थी), तो उसे एक द्वितीय स्वतन्त्रता-संख्या प्राप्त हो जाती है।

उपर्युक्त दृष्टान्तों में स्वतन्त्रता-संख्याएँ उन स्वतंत्र निर्देशकों की संख्या के बराबर हैं जो कि निकाय का स्थान निर्धारण करने के लिए आवश्यक हैं। यह आवश्यक नहीं कि निर्देशांक कार्तीय ही हों। चलाने की यंत्ररचना के संबंध में या तो पिस्टन का स्थान निर्धारक निर्देशांक x ले सकते हैं या ईपा पर के क्रैक-पिन के स्थान का कोण ϕ ले सकते हैं। दोनों ही एक जैसे अच्छे हैं। व्यापकतया, हम f स्वतन्त्रता-संख्याओं वाले निकाय के निर्देशांकों के लिए लिखेंगे—

$$(2) \quad q_1, q_2, q_3, \dots, q_f.$$

कुछ विशिष्ट सीमाओं के भीतर इन निर्देशांकों का निर्वाचन स्वतन्त्रतापूर्वक किया जा सकता है। समी० (1) में आये हुए निर्देशांकों के बीच जो r प्रतिबंध हैं वे q के उचित निर्वाचन से सर्वसमतः संतुष्ट किये जा सकते हैं और फिर अपने निम्न की विवृति में आगे के लिए निकल जाते हैं।

पृष्ठ पाँच पर उल्लिखित हर्ज^२ की यांत्रिकी का एक महत्वपूर्ण गुण है कि उसमें इन अवकल रूप संबंधी प्रतिबंधों की ओर ध्यान दिलाया गया है जिनमें उपर्युक्त बातें लागू नहीं हो सकती। इस प्रकार का प्रतिबंध यो लिखा जा सकता है—

$$(3) \quad \sum_{k=1}^f F_k (q_1, \dots, q_f) dq_k = 0$$

यहाँ मान लेते हैं कि सभी F_k ओं का रूप $\frac{\partial \Phi}{\partial q_k}$ नहीं होता, अतएव (3) किसी भी फलन $\Phi (q_1, \dots, q_f)$ का संपूर्ण अवकल नहीं होगा और यह भी मान लेते हैं कि वह किसी समाकलनकारी गुणनखंड द्वारा संपूर्ण अवकल बनाया भी नहीं जा सकता।
हर्त्ज से सहमत होते हुए हम

$$\Phi (q_1 \dots q_f) = \text{नियत},$$

के रूप के प्रतिबंधों को पूर्णपदीय कहेंगे। पूर्णपदीय अग्रेजी होलोनोमिक^१ के लिए लिया गया है। ग्रीक भाषा में होलोज=पूर्णसंख्या; लैटिन में पूर्ण=पूर्णक=समाकलनीय। जिन प्रतिबंधों का रूप (3) जैसा होगा, जिनका कि औपचारिकतया समाकलन नहीं किया जा सकता, उन्हें अपूर्णपदीय^२ कहेंगे*। अपूर्णपदीय प्रतिबंध का सरलतम दृष्टांत समस्या II. 1 का क्षैतिज तल पर चलता हुआ पैने किनारे का पहिया प्रस्तुत करता है। (स्ले^३ अर्थात् बरफ पर सरक कर चलने वाली बिना पहिये की गाड़ी और वाइसिकल की लचीली यंत्ररचना, भी इसी वर्ग में आती है।)। इस प्रकार का पहिया सदा उसी दिशा में जायगा जिसमें किसी समय चलने को वह निरोधित हो। फिर भी वह आधारीतल के सभी स्थानों पर पहुँच सकता है यद्यपि कभी-कभी केवल अपने स्पर्श के नोकीले बिंदु को कीलक बनाकर ही। अतएव अत्यणु स्थानपरिवर्तन^४ की अपेक्षा निश्चित स्थानपरिवर्तन में उसकी स्वतंत्रता-मंज्यूरि अधिक होती है। व्यापकतः, यदि अपूर्णपदीय प्रतिबंधों वाले किसी निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ निश्चित स्थान परिवर्तन में f हों तो अत्यणु गति में उसकी स्वतंत्रता सरत्याएँ $f-r$ ही रह जावेंगी। इस बात का अनुसंधान समस्या II. 1 में किया जायगा।

उपर्युक्त भेद आभासी विस्थापन की धारणा के लिए महत्वपूर्ण है। आभासी विस्थापन किसी निकाय के स्थान में एक स्वेच्छ तात्कालिक, अत्यणु परंतु ऐसा परि-

1. Holonomic 2. Non-holonomic

3. Sleight 4. Infinitesimal motion

* ए. वॉस (A. Voss) ने ऐसे प्रतिबंधों का अध्ययन 1884 में हर्त्ज से कहीं पहले किया था। देखिए, Math. Am. 25.

वर्तन है जो निकाय के नियंत्रण के प्रतिबंधों से संगत हो। दिये हुए बलों से कांति वास्तविक विस्थापन को तो

$$dq_1, dq_2, \dots, dq_f,$$

द्वारा विदित करेंगे; परंतु संकेत,

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_f,$$

आभासी विस्थापन को विदित करने के लिए काम में लाये जावेंगे। इन δq और वास्तविक गति से कोई संबंध नहीं। यों, कहिए कि उनका प्रयोग परीक्षण राशियों के रूप में किया जा रहा है जिनका कार्य है कि निकाय अपने आंतरिक संबंधों का तथा अपने पर अनुप्रयुक्त बलों का कुछ भेद दें।

विशुद्ध पूर्णपदीय नियंत्रणों के लिए ये δq एक दूसरे से स्वतंत्र होते हैं; प्रत्येक δq एक-एक स्वतंत्रता-संस्था के अनुसार होगा। अपूर्णपदीय नियंत्रणों के लिए δq ओं का अधिक संस्थाओं में प्रवेश कराना पड़ता है। इस स्थिति में इन δq ओं का परस्पर संबंध (3) के अवकलन रूप का होता है; अर्थात्, आभासी विस्थापनों के लिए

$$(4) \sum_{k=1}^f F_k(q_1, q_2, \dots, q_f) \delta q_k = 0$$

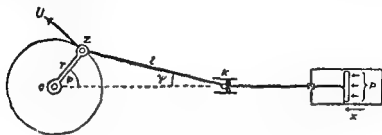
यहाँ \int निश्चित गति (स्थान-परिवर्तन) के लिए स्वतंत्रता-संस्थाओं की संस्था है। जैसा कि पहले भी जोर देकर कहा जा चुका है, यह संस्था अत्यणुगति की स्वतंत्रता संस्था से बड़ी होती है।

६. आभासी कर्म का सिद्धान्त

एक ऐसे यांत्रिक निकाय का ध्यान कीजिए जो अनुप्रयुक्त बलों के अधीन सामान्य-वस्था में हो। बलों की कोई भी वांछित दिशा हो सकती है, वे निकाय के विभिन्न भागों पर अनुप्रयुक्त हो सकते हैं; और हो सकता है कि किसी दृढ़विह्व को सामान्य-वस्था में रखने के लिए जो उनके स्थान चाहिए, यहाँ वे न भी हों। अनुसंधानाधीन निकाय को वे बल साम्यावस्था में रख रहे हों तो यह बात जितनी बलों पर विचार करती है उतनी ही निकाय पर।

प्रारंभिक कण-यांत्रिकी की भांति यहाँ भी हम उन प्रतिक्रियाओं का अनुसंधान करेंगे जो, अनुप्रयुक्त बलों के कारण, निकाय के एक भाग द्वारा उसी के दूसरे भाग

पर होती है। उदाहरणतः, इस प्रयत्न को एक यांत्रिक इंजीनियर फ्रैंक यन्त्ररचना (आ०७) के विश्लेषण के लिए काम में लावेगा। पिस्टन पर अनुप्रयुक्त भूज का



आकृति १—पिस्टन इंजन को चलाने की यन्त्ररचना

का अनुमूचक रेखाचित्र।

दाब P पिस्टन दंड द्वारा क्रसहेड K को संचारित होता है, जहाँ से अनुदैर्घ्य संपीड़न के रूप में सवधक दंड (लंबाई, l) को पहुँचता है। सवधक दंड क्रैंक-पिन Z पर अपनी दंड की दिशा में ठेल लगाता है। निकाय को साम्यावस्था में रखने के लिए ठेल को केवल उमी खंड U का, जो क्रैंक के लववत् है और इसलिए क्रैंकवृत्त के स्पर्शरेखीय है, एक अनुप्रयुक्त समान बल द्वारा विरोध करना आवश्यक होगा। क्रैंक की दिशा वाला घटक, जो क्रैंक-ईपा के केंद्र की ओर होगा, दृढ़तापूर्वक जमाये हुए ईपा-धुराधार O में अवशोषित हो जाता है। वह केवल धुराधार पर एक प्रतिबल डालता है और इसलिए निकाय की साम्यावस्था के प्रश्न के लिए असंगत है।

अतएव निकाय के भीतर ही जो प्रतिक्रियाएँ होती हैं उन्हीं से साम्यावस्था सम्भाव्य होती है। सरल स्थितियों में तो उनमें से एक-एक का अनुसंधान किया जा सकता है, व्यापकतया बँसा करना कलातिजनक हो जाता है। परंतु एक-एक को जाने बिना ही हम यह विश्वासपूर्वक कह सकते हैं कि वे निकाय पर कोई प्रभाव नहीं डालतीं। प्रस्तुत स्थिति में गति-नियंत्रक पटरियों पर गति-नियंत्रक दाब क्रसहेड की गति के लंबवत् काम करता है और क्रैंकपिन पर काम करते हुए बल का वह भाग जो कि क्रैंक दंड को संचारित होता है, इस दंड के धुराधार के स्थिर बिंदु O से होकर जाता है। व्यापक स्थिति में इस बात का स्थापन, निकाय को अपनी साम्यावस्था को परिस्थिति से परीक्षा-मूलक आभासी विस्थापन देकर करते हैं। इस प्रकार के विस्थापन में प्रतिक्रियाओं का "आभासी कर्म" शून्य निकलता है।

1. Shaft bearing

इस सिद्धांत को पूर्णतया सत्यापित करने के लिए सरल दृढ़ पिण्ड लीजिए। मान लीजिए कि पिण्ड का प्रत्येक बिंदु i उसके प्रत्येक बिंदु k से प्रतिक्रियाओं R_{ik} और R_{ki} द्वारा संयुक्त है जो क्रमात् i और k पर काम करती हैं। यदि इस प्रकार के बिंदुओं को अलग कर लें तो § ७ के प्रारंभ में वर्णित दो संहति बिंदुओं का निकाय प्राप्त हो जाता है जहाँ दोनों संहतियाँ एक भारहीन, दृढ़ दंड द्वारा परस्पर संयोजित हैं। इस दंड में काम करती हुई प्रतिक्रियाएँ न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करेंगी कि

$$(I) \quad R_{ik} = -R_{ki}$$

ठीक § ७ की भाँति, स्वतंत्रता-संख्याओं की गिनती के लिए, आभासी विस्थापन को दो घटकों में विघटित करेंगे—एक तो स्थानान्तरण δs_i जो कि दोनों बिंदुओं के लिए उभय-सामान्य है; और दूसरा, इस अब विस्थापित बिंदु i के प्रति बिंदु k का घूर्णन, δs_n , जो घूर्णन दंड के लंबवत् एक गति होगी। तो

$$\delta s_k = \delta s_i + \delta s_n$$

अतएव, स्थानान्तरण (translation) के आभासी कर्म के लिए, समी० (I) को ध्यान में रखते हुए,

$$\delta W_{tr} = R_{ik} \cdot \delta s_i + R_{ki} \cdot \delta s_k = 0;$$

और, घूर्णन के आभासी कर्म के लिए, जिसमें i स्थिर रहता है, k दंड के लंबवत् विस्थापित होता है,

$$\delta W_{rot} = R_{ik} \cdot \delta s_n = 0$$

यह उदाहरण प्रदर्शित करता है कि कण-यांत्रिकी से निकायों की यांत्रिकी के संक्रमण तक में न्यूटन का क्रिया-प्रतिक्रिया वाला नियम प्रधान बात है।

जो कुछ भी हमने उक्त दृष्टान्तों से सीखा है उसे अब एक व्यापक अधिमान्य नियम¹ के रूप में विस्तृत करेंगे कि किसी भी यांत्रिकी निकाय में प्रतिक्रियाओं का आभासी कर्म शून्य के बराबर है। इस स्वीकृति या अधिमान्य नियम का कोई व्यापक प्रमाण ‡ देने की हमारी विलकुल अभिलाषा नहीं है। वास्तव में हम तो उसे व्यवहारतः “यांत्रिक निकाय” की परिभाषा की भाँति समझते हैं।

1. Postulate

‡ इस बात का यत्न लाप्रांज ने अपनी पुस्तक *Mecanique Analytique* में (जिसका उल्लेख उपोद्घात में हो चुका है) घिरनियों के और रस्सियों के किन्हीं निर्माणों द्वारा किया था।

इसके बाद आभासी कर्म के सिद्धान्त का व्यापकतया सूत्रीकरण करने के लिए एक छोटा-सा ही कदम रह जाता है। हम इस प्रकार तर्क करते हैं—किसी साम्यावस्था-गत निकाय का अनुप्रयुक्त भीतिकतया दिया हुआ प्रत्येक बल, अनुप्रयोग बिंदु पर उत्पादित प्रतिक्रियाओं के प्रति साम्यावस्था में होगा, अतएव अनुप्रयोग-बिंदु के आभासी विस्थापन में, इस प्रकार के अनुप्रयुक्त बल तथा उसके द्वारा किया हुआ कर्म तथा प्रतिक्रियाओं द्वारा किये हुए कर्म, इन सबका योग शून्य होगा। यह बात सभी अनुप्रयुक्त बलों के योग तथा उनके द्वारा उत्पादित सभी प्रतिक्रियाओं के योग के लिए सच है। परंतु, अभी-अभी सिद्ध कर चुके हैं कि यदि सभी प्रतिक्रियाओं को हिसाब में लें तो वे कोई आभासी कर्म नहीं करती। अतएव, किसी निकाय को साम्यावस्था में रखने वाले अनुप्रयुक्त बलों द्वारा किया हुआ आभासी कर्म भी अवश्यमेव शून्य होगा। इस कारण, प्रतिक्रियाओं के क्रांतिजनक अनुसंधान का निरसन हो जाता है।

यही है “आभासी कर्म का सिद्धान्त” जिसे जर्मन साहित्य में बहुधा *Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Verschiebungen* कहते हैं, जिसका अंग्रेजी अनुवाद हुआ *Principle of Virtual Displacements* (आभासी विस्थापनों का सिद्धान्त)। इसका यह जर्मन नाम उतना संतोषजनक नहीं जितना कि वह जो अंग्रेजी बोलने वाले देशों में प्रचलित है और जो कि स्वयं इटली के *principio dei lavori virtuali* से लिया गया था। गणितीय साहित्य में उसे बहुधा “आभासी वेगों का सिद्धान्त” कहते हैं। यह नाम पहले पहल जीन बर्नूली *Jean Bernoulli* ने प्रस्तावित किया था। हमारे लिए वह अनुपयुक्त जान पड़ता है।

ऐतिहासिक दृष्टि से, इस सिद्धान्त का स्थूल वर्णन गैलिलियो पहले ही कर चुका था। स्टेविन, भ्रातृद्वय जैक्स और जीन, बर्नूली; तथा दालांबेरे ने विषय का और भी विकास किया। परंतु साम्यावस्था के व्यापकतम सिद्धान्त की भांति उसका सिक्का लाग्रान्ज के ग्रंथ *मेकानिक एनैलिटीक (Mecanique Analytique)* ने ही जमवाया।

निकाय के नियंत्रण पूर्णपदीय प्रकार के हों या अपूर्णपदीय प्रकार के, आभासी कर्म के सिद्धान्त के अनुप्रयोग पर इस बात का बहुत ही कम प्रभाव पड़ता है। वास्तव में तो, आभासी कर्म के पद-संज्ञ (7.4) के रूप का प्रतिबंध, δp ओं में से किसी एक का निरसन कर, प्रवेशित किया जा सकता है, चाहे यह प्रतिबंध समाकलनीय (Integrable) हो या न हो।

“प्रतिक्रियात्मक बलों” के स्थान पर हम “ज्यामितीय मूल बलों” का व्यवहार कर सकते हैं। क्योंकि निकाय के विभिन्न भागों के बीच के, या, जैसे कि दृढ़ पिंड में, उसकी संहति-बिंदुओं के बीच के, ज्यामितीय संबंधों द्वारा वे दिये जाते हैं।

ज्यामितीय मूल के बलों के विपरीत: “भौतिक मूल के” या अनुप्रयुक्त बल होते हैं। इसके लिए सामान्यतया व्यवहृत नाम, “बाह्य बल”, उतना स्पष्ट नहीं है। अतः यहाँ उस आशय में, इस नाम का व्यवहार नहीं किया जायगा। अनुप्रयुक्त बल भौतिकीय प्रभावों द्वारा कारित होते हैं, यथा गुरुत्व, भाप-दाब, कैबित (समुद्री तार) आदि वे तनाव बृंद जो निकाय पर बाहर से प्रभाव डालते हैं। अपने भौतिक होने का भेद वे इस बात से देते हैं कि उनके गणितीय व्यंजनो (पद-पुंजों) में ऐसे विशिष्ट नियतांक आते हैं जो प्रयोगतया ही निर्धारित किये जा सकते हैं, यथा गुरुत्व-कर्पणांक, किसी दाबमापी, वायुदाबमापी (बैरोमीटर), या अन्य प्रकार की मापियों की मापनियों के पाठ्यांक, इत्यादि। चौदहवें प्रकरण (§ १४) में घर्षण के बल के बारे में बतायेंगे, जो कभी तो प्रतिक्रिया के बलों में, कभी अनुप्रयुक्त बलों में गिना जाता है। स्वैतिक घर्षण के रूप में वह प्रतिक्रिया बल है; विसर्पी या गतिज घर्षण में वह अनुप्रयुक्त बल होता है। आभासी कर्म के सिद्धांत द्वारा स्वैतिक घर्षण का अपने आप निरसन हो जाता है; गतिज घर्षण को अनुप्रयुक्त बलों की भांति प्रवेश कराना होगा। इस बात का बाह्य सूचक, विसर्पी घर्षण के नियमों (14.4) का प्रयोगात्मक नियतांक, μ , है।

§ ६. आभासी कर्म सिद्धांत के उदाहरण

(१) उत्तोलक (आर्किमिडीज)

उत्तोलक की स्वतंत्रता-संख्या एक है, $f=1$; अतएव उसके लिए विस्थापन भी केवल एक ही हो सकता है, δq , जो आभासी कोणीय विस्थापन, $\delta\theta$, के अनुरूप होगा।

साम्भावस्था तभी, और केवल तभी, रहेगी, जब कि उत्तोलक के $\delta\theta$ घूर्णन में किया हुआ आभासी कर्म शून्य होगा। मान लीजिए कि A और B बलों के अनु-प्रयोग बिंदुओं, P और Q (आकृति १०) के, आभासी विस्थापन क्रमात् δS_A और δS_B हैं तो हमारी यह अभिप्रायना है कि

$$A \delta s_A + B \delta s_B = 0$$

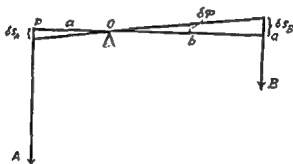
परन्तु आकृति १० क में

$$\delta s_A = a \delta \phi, \delta s_B = -b \delta \phi, \text{ अतएव} \\ (Aa - Bb) \delta \phi = 0$$

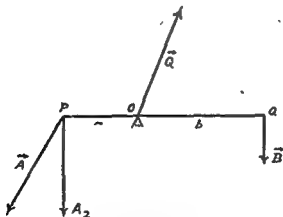
और परिणामतः

$$Aa = Bb.$$

बालम्य 0 के प्रति बलों के घूर्णन बराबर हैं अर्थात् घूर्णनों का योग शून्य है।



आकृति १० क—उत्तोलक और उमकी भुजाएँ a व b ; तथा बल, A व B



आकृति १० स—उत्तोलक तिरछे बल के अधीन; दंड पर आलव की प्रतिक्रिया दिखलाते हुए।

यदि एक बल (A) उत्तोलक की भुजा में लंबवत् न हो, जैसे कि आ० १० स में, तो उसे भुजा की दिशा में एक घटक A_1 और उसके लंबवत् घटक A_2 में विघटित कर

सकते हैं। बिंदु O के स्थिर रहने के कारण, A_1 का कुछ प्रभाव नहीं होता और इस कारण,

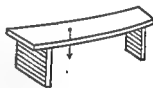
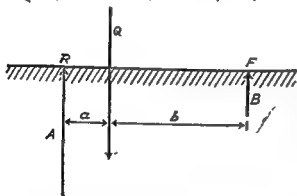
$$A_2 a = |B| b$$

कितना बोझ O पर पड़ता है यह जानने के लिए मुझा पर काम करने वाले एक विरोधक बल का प्रवेश कराना पड़ता है। आकृति १० क में वह ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर, परिमाण $Q = A + B$ का, होगा। आलम्ब पर बोझ इस बल Q के बराबर पर उससे प्रतिकूल दिशा में पड़ेगा।

आकृति १० ख की स्थिति में, सदिश समीकरण होगा,

$$Q = A + B$$

यहाँ भी, O पर बल Q के विरुद्ध (अर्थात् "साम्य कारक") होता है।



आ० ११ क—अगले और पिछले पहियों पर आ० ११ ख—एक रेखाकित सेतु के दो आरोही सहित वाइसिकल का भार-वितरण आधारों पर बोझ का वितरण।

इन प्रश्नों को उठाने में हम वास्तव में आभासी कर्म के सिद्धांत की सीमाओं का उल्लंघन कर जाते हैं। कौलक O का स्थिर स्थान उत्तोलक के यांत्रिक निकाय का लाक्षणिक गुण है। उसका आभासी विस्थापन, और इसलिए उस पर किया हुआ आभासी कर्म, शून्य है। अपने सिद्धांत द्वारा Q किम्बा (Q) का निर्धारण करने के लिए हमें एक विलकुल ही भिन्न यांत्रिक निकाय पर विचार करना होता है। इस निकाय में O के लिए दो स्वतंत्रता-संख्याओं की आवश्यकता होती; और फिर देखना होता कि अब तक विचारित केवल घूर्णन के साथ ही साथ यदि सारे उत्तोलक का, अपने तई समांतर, एक आभासी स्थानांतरण भी हो रहा हो तो, इस स्थिति में साम्यावस्था में प्रतिबंध क्या होंगे।

(२) उत्तोलक का उलटा—साइकल-आरोही, सेतु

आकृति ११ क की वास्तविक पर विचार कीजिए। भार का विभेद दृष्टि से दो स्थानों पर किया है, R (सोवर वाले पिछले पहिये) और F (फ्रंट वाले अगले पहिये) पर। पिछले पहिये पर जटिलतर दाब पड़ता है क्योंकि Q वास्तविक और आगेही का भार, F की अपेक्षा R के अधिक पास है। इसीलिए, साइकल आरोही अगले पहिये की अपेक्षा पिछले पहिये में अधिक हवा भरता है। पिछले पहिये पर A बोल पड़ेगा, अगले पर B , जहाँ

$$A = \frac{b}{a+b} Q, B = \frac{a}{a+b} Q.$$

निजी सेतु के संबंध में भी यही अवस्थिति होती है यदि उसका बोझ मध्यम्यक पर पड़ रहा हो (आ० ११ ग)।

(३) ब्लॉक और टेकल (प्राचीन यूनानियों की भी ज्ञात)

युनि (आ० १२) की उपरानी और निचली ओर घिरनियाँ की गयी, गमनिए कि प्रत्येक ओर n है। रस्सी के छूट्टा सिरे पर P बल लगा कर Q बोझ उठाना है। निम्न के एक आभासी विस्थापन में समझिए कि

P के चलने की दूरी δp है,

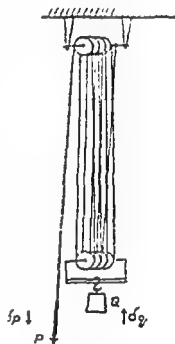
Q के चलने की दूरी δq है।

गतियों की दिशाएँ आकृति १२ के तीरों द्वारा ब्लॉक और टेकल। बोझ प्रदर्शित हैं। तो साम्यावस्था के लिए तथा बल का आभासी

$$(I) \quad P\delta p - Q\delta q = 0$$

विस्थापन

* रस्सी, काँटी और घिरनियाँ आदि जुटा कर बनायी हुई, थोड़ा ही सा जोर लगाकर काफी बड़ा भार उठाने की, एक युक्ति। शाब्दिकतया, ब्लाक लकड़ी का फुंदा; टेकल रस्सी हुक आदि की बनी युक्ति। अतएव इसे घिरनी-रस्सी युक्ति कह सकते हैं।



आकृति १२

अब यदि Q के उठने की मात्रा δq हुई तो ऊपर और निचली घिरनियों के बीच की $2n$ लड़ियों में से प्रत्येक की लंबाई δq कम हो जावेगी, और इसलिए घिरनियों के बीच की रस्सी की लंबाई में कुल $2n \delta q$ की कमी हो जायेगी। P पर लटकते हुए रस्सी के छूटा सिरे की लंबाई ठीक इतनी ही बढ़ जायेगी। अतएव,

$$\delta p = 2n \delta q$$

और, (1) के कारण,

$$(Q - 2nP) \delta q = 0.$$

तो हम प्राप्त करते हैं

(2)

$$P = \frac{Q}{2n}$$

यहाँ हमने ब्लाक और टैकल को "आदर्श" यांत्रिक निकाय समझ लिया है; अर्थात् घिरनियों और रस्सी के बीच का घर्षण एवं घिरनियों के घुसधारों में का घर्षण उपेक्षणीय समझ लिया गया है।

यह सरल उदाहरण, स्वभावतः, रस्सी के तनाव वाली प्रारंभिक विधि से भी हल किया जा सकता है जिससे कि कदाचित् बल की मिश्रक्रिया का अधिकतर साकार चित्र सम्मुख आ जाता है।

समझिए कि रस्सी में, उसके सारे अनुप्रस्थ काट पर का, तनाव S है। यदि घर्षणीय प्रभावों की उपेक्षा कर दें तो रस्सी में प्रत्येक स्थान पर यही तनाव होगा; कहीं भी रस्सी को काटें, तनाव यही S मिलेगा जो कि कटे हुए दोनों सिरों में, बटे स्थान से परे की ओर होगा। पहले समझिए कि रस्सी बायीं ओर, P से ऊपर, काटी गयी है। तो काट कर अलग किये हुए टुकड़े से, जिसमें P नीचे की ओर तथा S ऊपर की ओर काम कर रहे है, प्राप्त होता है

$$P = S.$$

अब समझिए कि आकृति की दाहिनी ओर की जितनी लड़ें हैं उन सब में एक एक काट दी गयी है और इस प्रकार $2n$ अनुप्रस्थ काटें, कटे स्थान के प्रत्येक ओर, प्राप्त होती हैं। निचले दाहिने काट कर अलग किये हुए टुकड़े पर अनुप्रस्थ बलों की साम्यावस्था की अभियाचना¹ है कि

$$Q = 2nS$$

अतएव हमें फिर वही दुगुना समीकरण प्राप्त होता है,

$$P = \frac{Q}{2n}$$

इसके अतिरिक्त, विशाल के ऊपरी भाग पर विचार करने में यह भी प्राप्त होता है कि त्रिज्य $2r$ में धिरनियों का स्पर्श लम्बाई है, उमरर बिन्दुओं की दूरी $2r$ है। प्रकट है कि इस बोल का परिधि $P = Q$ होगा।

(४) पिस्टन इंजन की चालन-यंत्र-रचना

जैसे कि आकृति ९ में, भार-दाब के कारण पिस्टन पर पड़ा हुआ ताकत P है, आतएव पिस्टन पर विचार हुआ आभासी बर्मे $P\delta x$ होगा। समझिए कि P पर पड़े हुए 'परिमापी' बल U का साम्यकारक, अर्थात् P को साम्यावस्था में लाने वाला बल Q है। Q का आभासी बर्मे $-Qr\delta\phi$ होगा। हाँ अतएव गिड़ाना के लिए आवश्यक है कि

$$(3) \quad Qr\delta\phi = P\delta x; \quad Q = P \frac{\delta x}{r\delta\phi}.$$

अतएव Q का ज्ञान करना δx और $\delta\phi$ के बीच का संबंध निर्धारण करने का काम केवल चालननिधीय कार्य हो जाता है।

आकृति ९ के अनुसार (x दिशा में प्रक्षेप),

$$(4) \quad r \cos\phi + l \cos\psi = \text{नियत} = x.$$

अतएव, अवकलन करने में,

$$(4a) \quad r \sin\phi \delta\phi + l \sin\psi \delta\psi = \delta x.$$

त्रिभुज OZK प्रदान करता है,

$$(4b) \quad \sin\psi = \frac{r}{l} \sin\phi, \therefore \delta\psi = \frac{r \cos\phi}{l \cos\psi} \delta\phi \\ = \frac{r}{l} \frac{\cos\phi}{\left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\phi\right]^{\frac{1}{2}}} \delta\phi$$

यदि इसका (4a) में उपयोग करें तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(4c) \quad r \sin \phi \, \delta \phi \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \phi}{\left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \phi \right]^{\frac{1}{2}}} \right) = \delta x$$

यह संबंध चलगतिकीय राशि $\frac{\delta x}{r \delta \phi}$ प्राप्त कराता है। अब (3) में प्रतिस्थापन करने से मिलता है

$$(5) \quad Q = P \sin \phi \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \phi}{\left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \phi \right]^{\frac{1}{2}}} \right)$$

इस प्रकार क्रैक-पिन Z द्वारा संचारित परिमायी बल $U=Q$, क्रैक के प्रत्येक स्थान ϕ के लिए, निर्धारित हो जाता है। यंत्र के चक्रीय उच्चावचन के परिमाण का मान निकालने और उससे उचित गतिपालक चक्र के निर्माण के लिए इस राशि का यथातथ ज्ञान अनिवार्य है। $\frac{r}{l}$ के उचित भिन्न राशि होने के कारण, (5) को $\frac{r}{l}$ की एक शीघ्रतया अभिसारी श्रेणी में विस्तारित कर सकते हैं। इस संबंध में प्रश्न II. 2 भी देखिए।

अंत में, एक आगामी अनुप्रयोग के लिए, पिस्टन के स्थान x को $\frac{r}{l}$ की श्रेणी के रूप में निकालेंगे। (4) और (4b) के अनुसार प्राप्त करते हैं—

$$(6) \quad x + r \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin^2 \phi + \dots \right) = \text{नियत};$$

(५) किसी अक्ष के प्रति बल का घूर्णन तथा आभासी घूर्णन में कर्म

मान लीजिए कि बिंदु P अक्ष a से l दूरी पर है और एक बल F किसी एक दिशा में P पर काम कर रहा है। अक्ष a के प्रति एक आभासी घूर्णन $\delta \phi$ में P का विस्थापन होगा

$$\delta s p = l \delta \phi.$$

तो हम विस्थापन में F कितना काम (δW) करेगा?

F को परस्पर लववत् घटकों F_x, F_y, F_z में विघटित कीजिए, ठीक वैसे ही जैसे कि समी० (5.18) के लिए किया था। किया हुआ काम वेक्टर F_n पर निर्भर करेगा क्योंकि

$$\delta IV = F_n \delta s_p = F_n l \delta \phi.$$

इसकी समी० (5.18a) से तुलना करने पर एक व्यापक अम्मुनित कर सकते हैं कि

बल के अनुप्रयोग बिंदु द्वारा किसी अक्ष के प्रति किये हुए घूर्णन $\delta \phi$ में बलकृत कर्म δIV को $\delta \phi$ से भाग देने से जो भाज्य निकलता है, उसे उस बल का उस अक्ष के लिए घूर्णन समक्ष सकते हैं।

$$(7) \quad L_o(F) = \frac{\delta IV}{\delta \phi} = l F_n$$

इस प्रकार, घूर्णन की धारणा, जो स्थितिकी के लिए आधारिक है, माम्भावस्था के सब प्रश्नों के आधारिक, आभासी कर्म से संबंधित हो जाती है।

यहाँ पर कह देना चाहिए कि घूर्णन की विमितियाँ (बल \times उत्तोलक बाहु) वही हैं जो कर्म की हैं (बल \times दूरी)। यदि, प्रचलित प्रथानुसार, रेडियनों में मापे हुए कोण को विमितिहीन समझे तो उपर्युक्त बात समीकरण (7) के अनुकूल है।

§ १०. दालांबेर का सिद्धान्त

अवस्थितित्वीय बलों का प्रवेश

जैसा कि हम देख चुके हैं, सभी पिंडों की अपनी विराम अवस्था या ऋजुरेखीय एक-समान गति की अवस्था में ही बने रहने की प्रवृत्ति होती है। इस प्रवृत्ति को हम गति के परिवर्तन का अवरोध, एक अवस्थितित्वीय अवरोध, या, संक्षेपतः, अवस्थितित्वीय बल, समझ सकते हैं। अतएव किसी एक ही महति बिंदु के लिए अवस्थितित्वीय बल F^* की परिभाषा होगी—

$$(1) \quad F^* \equiv -\dot{p}$$

और मौलिक नियम कि $\dot{p} = F$, यह रूप धारण करेगा

$$(2) \quad F^* + F = 0$$

अर्थात्, शब्दों में,

अवस्थितित्वीय बल' अनुप्रयुक्त बल' के साथ सदृशीय साम्यावस्था' में होता है।

F बल तो भौतिक अवस्थिति द्वारा प्राप्त होता है परंतु F^* बल काल्पनिक बल है। इसका प्रवेश गति की समस्याओं को साम्यावस्था संबंधी समस्याओं में पहुँचाने के लिए कराते है। यह प्रक्रम बहुधा सुविधाजनक होता है।

अवस्थितित्वीय बल नित्यप्रति के जीवन में सुपरिचित है। जिस समय चक्कर लगाने वाला होटल का भारी दरवाजा हम चलाते हैं उस समय न तो गुरुत्व बल, न घर्षण, किंतु द्वार के अवस्थितित्व का सामना करना पड़ता है। इसी प्रकार के दृष्टांत सड़क की गाड़ियों और ट्रालियों के सरकने वाले दरवाजे हैं। गाड़ी के अगले प्लेटफार्म पर दरवाजा आगे की ओर अर्थात् जाने की दिशा में खुलता (सरकता) है। जिस समय गाड़ी में ब्रेक लगता है, द्वार की प्रवृत्ति आगे जाने की होती है और इस लिए वह सरलतापूर्वक खोला जा सकता है। खड़ी रहने के बाद जब गाड़ी त्वरित होती है, अर्थात् उसकी वेग-वृद्धि होती है तब खुला द्वार स्वयं अपनी विराम अवस्था में जाना चाहता है, इसलिए उसमें पीछे की ओर आने की प्रवृत्ति होती है और वह बिना आयात ही बंद किया जा सकता है। सामने के प्लेटफार्म पर चढ़ना-उतरना पिछले प्लेटफार्म की अपेक्षा सरल है जहाँ दरवाजा जलती और खुलता है।

अवस्थितित्व का सर्वाधिक-ज्ञात रूप अपकेंद्र बल है, जिसका किसी भी वक्र गति में अनुभव किया जा सकता है। यह भी एक काल्पनिक बल है। वह वक्र के अभिलंब त्वरण \dot{v}_n के अनुरूप है जो अभिकेंद्र त्वरण अर्थात् वक्रता केंद्र की ओर निर्देशित है। समी० (5.9) के अनुसार, अपकेंद्र बल होगा

$$(3) \quad C = -m\dot{v}_n, \quad |C| = m \left| -\dot{v}_n \right| = m \frac{v^2}{\rho},$$

जहाँ ऋण चिह्न बाहर की ओर की दिशा का सूचक है।

1. Inertial force 2. Applied force 3. Vectorial equilibrium

(क) सड़क की गाड़ी (स्ट्रीट कार) से ट्रामगाड़ी का मतलब है। चढ़ने और उतरने के स्थानों पर इन गाड़ियों में जो स्थान होता है उन्हें प्लेटफार्म कहते हैं। जर्मनी की इन ट्रामों और ट्रालियों में सरका कर खोलने वाले द्वार होते हैं। भारत के लिए परिचित दृष्टांत होंगे सरका कर खोलने वाले अलमारियों के दरवाजे। इस प्रकार की अलमारियाँ बहुधा पुस्तकालयों में होती हैं। पोशाक टाँगने और सने-वाली सम्मिलित अलमारी में भी बहुधा इसी प्रकार के दरवाजे होते हैं।

कारिआलिस बल (देखिए § २८) और विविध घूर्णांश-स्थापकीय प्रभाव (देखिए § २७) भी अवस्थितित्व बल वृद्ध के शीपंक के नीचे आते हैं।

प्रमंगवश रेलगाड़ी की पटरियाँ इस बात का बड़ा जीवित जाग्रत उदाहरण प्रस्तुत करती हैं कि “कान्पनिक” अपकेन्द्र बल का वास्तविक अस्तित्व है। किसी वक्र पर पटरियाँ इस प्रकार रखी होती हैं कि बाहरी पटरी भीतरी की अपेक्षा ऊँचाई पर रहे। दोनों पटरियों की ऊँचाई का अंतर सदा ऐसा होता है कि, रेलगाड़ी के किसी एक माध्य वेग के लिए, गुरुत्व और अपकेन्द्र बल का परिणामी पटरियों के भूमितल के लंबवत् हो। इस प्रकार पहिये के न केवल बाहरी पटरी से उठ कर गाँधी के उलट जाने की आशंका नहीं रहती अपितु रेलों पर एक हानिकारक असमान बोझ भी नहीं पड़ने पाता।

आश्चर्य ही की बात है कि महान् हाइनरिख हर्ज़ अपनी पुस्तक “मिकैनिक्स” के असाधारणतया सुंदर और सुंदरतापूर्वक लिखित उपोद्घात में अपकेन्द्र बल के प्रवेश पर आपत्तियाँ उठाते हैं (देखिए हर्ज़ कलेक्टेड वर्क्स, रा ३, पृष्ठ ६) —

“डोरी के एक सिरे पर पत्थर बाँध कर हम उसे एक वृत्त में घुमाते हैं; इस प्रकार जानते हुए पत्थर पर एक बल लगाते हैं, यह बल सदैव पत्थर को ऋजु पथ से विचलित करता रहता है; और यदि इस बल में, या पत्थर की सहति में, या डोरी की लंबाई में, कोई परिवर्तन करे तो देखते हैं कि पत्थर की गति सत्यमेव प्रत्येक समय न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार ही होती है। अब तीसरे नियम की अभियाचना है कि एक ऐसा बल भी होना चाहिए जो हमारे हाथ से पत्थर पर डाले हुए बल का विरोध करे। यदि हम इस बल के बारे में पूछें तो सर्व-परिचित उत्तर मिलता है कि हाथ पर पत्थर की प्रतिक्रिया अपकेन्द्र बल द्वारा होती है और यह अपकेन्द्र बल सत्यमेव उस बल के बराबर और प्रतिकूल है जो हमारा हाथ पत्थर पर डालता है। क्या व्यजन का यह प्रकार ग्राह्य है? ऐसा तो नहीं है कि जिसे हम अपकेन्द्र बल कहते हैं वह पत्थर का केवल अवस्थितित्व मात्र है?”

इस प्रश्न का हम स्पष्टतः नकारात्मक उत्तर देते हैं। वस्तुतः, समी० (३) की हमारी परिभाषा के अनुसार, अपकेन्द्र बल पत्थर के अवस्थितित्व के सर्वसम है। परंतु पत्थर पर, अर्थात् वास्तव में डोरी पर, लगाये हुए हमारे बल का जो बल विरोध करता है वह डोरी का हमारे हाथ पर कर्षण है। हर्ज़ और भी कहते हैं कि “हमें इस परिणाम पर आना पड़ता है कि अपकेन्द्र बल का बलों में वर्गीकरण उचित नहीं है। इस नाम को, सजीव बल के नाम की भाँति, पूर्वकाल से चली आयी हुई परंपरा

मात्र समझना चाहिए ; और उपयोगिता के विचार से इस नाम को रखे रहने के कारण का समर्थन करने की अपेक्षा उसे रहने देना ही अधिक सहल है।" इस बारे में हम यह कहेंगे कि नाम 'अपकेन्द्र बल' को ठीक ठहराने का यत्न करने की कोई आवश्यकता नहीं है, क्योंकि अधिकतर व्यापक पद 'अवस्थितत्व बल' की भाँति, वह एक स्पष्ट परिभाषा पर आधारित है।

प्रसंगवश, बल की धारणा में ठीक इसी प्रकार की अभिकथित स्पष्टता ने ही हत्जें द्वारा, एक चित्ताकर्षक परंतु किंचित् असफल प्रयत्न में, बल की भावना से नितांत विहीन एक यांत्रिकी की रचना करवा डाली (मिलाइए §१, पृ० ५)

अब हम गणितज्ञ, दार्शनिक, खगोलविद्यावेत्ता, भौतिकीज्ञ, विश्व कोपरनिकता "त्रैत द दिनामीक्" के लेखक दालांवेर के उत्कर्ष कार्य पर आते हैं।

यदि किसी भी यांत्रिक निकाय के एक अंश, सहतिविंदु k , पर एक अनुप्रयुक्त बल F आरोपित हो तो समीकरण (३) को निम्नलिखित में परिवर्तित करना होगा

$$(4) \quad F_k^* + F_k + \sum_i R_{ik} = 0$$

यहाँ R_{ik} वह प्रतिक्रिया है जो k से संबंधित सहति-विंदु i , विंदु k पर करता है। पृष्ठ ७० की हमारी व्यापक स्वीकृति के अनुसार ये R_{ik} , सब मिलाकर, (यहाँ आंतरिक) नियंत्रणों से सगत किसी भी आभासी विस्थापन में, कुछ कर्म नहीं करते। परिणाम यह हुआ कि समी० $F_k^* + F$ के योग का आभासी कर्म भी शून्य है,

$$(5) \quad \sum_k (F_k^* + F_k) \cdot \delta s_k = 0$$

अब आभासी कर्म के सिद्धांत को मन में रखते हुए, हम समीकरण (५) को यह कह कर व्यक्त कर सकते हैं कि, किसी निकाय के अवस्थितत्व बलद्वय उस पर अनुप्रयुक्त बलों के साथ साम्यावस्था में होते हैं। प्रतिक्रियाओं के ज्ञान की आवश्यकता नहीं होती।

यह है दालांवेर का सिद्धांत, अपने सरलतम और स्वामाधिकृत रूप में। सिद्धांत का एक अन्य मनोरंजक सूत्रीकरण प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित समीकरणों को देखिए—

$$F_k + F_k^* = F_k - \dot{p}_k$$

बल F_k का यह वह भाग है जो बिंदु k की गति में परिवर्तित नहीं किया जा सकता। इस भाग को "खोया हुआ बल" कह सकते हैं और इस लिए (S) की क्रम से रचना कर सकते हैं, यह कह कर कि किसी निकाय के खोये हुए बलसमूह साम्यावस्था में होते हैं।

दालंबेर सिद्धांत का एक सूत्रीकरण, जिसका व्यवहार बहुतायत से पाठ्य पुस्तकों में होता है, कार्तीय निर्देशांकों में उसका व्यंजन है। इसमें F_k के घटक X_k, Y_k, Z_k और δS_k के घटकों को $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ कहते हैं। हम यद्दत भी लगा देते हैं कि जो संहतियाँ m_k आती हैं वे अपरिणम्य हैं। तो किसी ऐसे निकाय के लिए जिसमें n संहति बिंदु हों, हम (S) के स्थान पर लिख सकते हैं—

$$(6) \sum_{k=1}^n \{(X_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (Y_k - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (Z_k - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k\} = 0.$$

यहाँ इस बात की आवश्यकता है कि $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ निकाय के नियंत्रणों से सगत हों। तो आइए तुरंत ही अपूर्णपदीय नियंत्रणों की व्यापक स्थिति पर विचार करें। वहाँ (7.4) के प्रकार के संबंध होते हैं। यदि (7.4) के व्यापक निर्देशांक q अंकों को कार्तीय निर्देशांकों द्वारा प्रतिस्थापित करें तो वे संबंध निम्नलिखित हो जाते हैं।

$$(6a) \sum_{\mu=1}^n [F_{\mu}(x_1, \dots, z_n) \delta x_{\mu} + G_{\mu}(x_1, \dots, z_n) \delta y_{\mu} + H_{\mu}(x_1, \dots, z_n) \delta z_{\mu}] = 0.$$

यदि अत्यणु गति के लिए स्वतंत्रता-संख्याओं की संख्या f हो तो dx, dy, dz के लिए इस प्रकार के $3n - f$ संबंध होंगे (देखिए पृ० ६७)। पूर्णपदीय नियंत्रणों की स्थिति में ये $F_{\mu}, G_{\mu}, H_{\mu}$ होंगे, $x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}$ के प्रति किसी एक ही फलन के अवकलज।

पाठक को यहाँ बहुत सावधानतापूर्वक स्मरण करा देना आवश्यक है कि उसे भट्टे सूत्रीकरणों (6) और (6a) में दालंबेर सिद्धांत की सच्ची अंतर्वस्तु को छुड़ना नहीं चाहिए। समीकरण (5) या उसी के तुल्य, साम्यावस्था की अभ्युक्ति,

न केवल अधिक तत्परता पूर्वक उपयोगी है बरन्, अपने अचर रूप के कारण, अधिक स्वामायिक भी है।

§ ११. अति सरल प्रश्नों में दालांबेर-सिद्धांत का अनुप्रयोग

(१) किसी स्थिर अक्ष के प्रति दृढ़ पिंड का घूर्णन

यहाँ केवल एक स्वतंत्रता-संख्या, अर्थात् घूर्णन के कोण ϕ से काम है। तो कोणीय वेग होगा $\dot{\phi} =$ समझिए ω ; और कोणीय त्वरण होगा, $\ddot{\phi} = \dot{\omega}$, इस समय हमें अक्ष के घुराघारों के संबंध में विचार नहीं करना है।

हम मान लेंगे कि कोई भी बल समूह F पिंड पर आरोपित हैं। प्रकरण १ के समीकरण (७) के अनुसार उनका आभासी कर्म घूर्णन अक्ष के प्रति उनके घूर्णों के योग द्वारा दिया जायगा, अर्थात्

$$(I) \quad \delta W = L \cdot \delta \phi = L_0 \delta \phi,$$

जहाँ L_0 बल-समूह F के घूर्णन-अक्ष a के प्रति घूर्णों का योग है। अवस्थितित्व बलसमूह F^* कृत कर्म भी हम जानना चाहते हैं। इसके लिए पिंड को संहति-अल्पांशों dm में उपविभाजित करते हैं। समीकरण (10.3) के विचार से dm पर आरोपित अवस्थितित्व बल का पथ के लंबवत् निर्देशित घटक अपकेन्द्र बल $dm \frac{v^2}{r} = dm \omega^2 r$ होगा। (वृत्तीय गति में वक्रता-त्रिज्या ρ , स्वभावतः,

घूर्णन-अक्ष से दूरी r पर होगी; अतएव प्रत्येक संहति-अल्पांश का वेग v , $r\omega$ हो गया और उसका पथ की ओर का त्वरण $\dot{v} = r\dot{\omega}$.) परंतु अपकेन्द्र बल कुछ भी कर्म नहीं करता। दूसरी ओर, पथ की दिशा में अवस्थितित्व बल होगा

$$-dm\dot{v} = -dmr\dot{\omega}$$

अतएव अवस्थितित्व बलों का संपूर्ण आभासी कर्म होगा

$$(2) \quad \sum (-dmv) \delta s = \sum -dmr\dot{\omega} r d\phi \\ = -\delta \phi \dot{\omega} \int r^2 dm = -\delta \phi \dot{\omega} I,$$

जहाँ

$$(3) \quad I = \int r^2 dm$$

पिंड का अवस्थितित्व-घूर्णन है। अवस्थितित्व-घूर्णन I की विमितिभां हैं ML^2 ; अतएव, निरपेक्ष पद्धति में, $g \cdot cm^2$ तथा गुरुत्वाकर्षणीय पद्धति में, $g \cdot cm \cdot Sec^2$ होगी।

इन (1) और (2) के कारण दालांवेर-सिद्धान्त का रूप निम्नलिखित हो जाता है—

$$\delta\phi(L_0 - I\dot{\omega}) = 0$$

इस प्रकार घूर्णन-गति के आधारिक समीकरण के लिए हमें प्राप्त होता है—

$$(4) \quad I\dot{\omega} = L_0.$$

इस समीकरण की, एक स्वतन्त्रता-सख्या वाली, कहिए कि x -दिशा में होने वाली, स्थानांतरणीय गति के आधारिक समीकरण

$$m\ddot{x} = F_x$$

से तुलना करे तो देखते हैं कि घूर्णन गति में m का स्थान I ले लेता है।

गतिज ऊर्जा के व्यंजन में भी यही प्रतिस्थापन होता है। दृढ़ पिंड के घूर्णन की गतिज ऊर्जा होती है—

$$(5) \quad E_{kin}(\text{ऊर्जा}) = T = \int \frac{dm}{2} v^2 = \int \frac{dm}{2} r^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} I$$

और इसलिए वह कण यांत्रिकी के निम्नलिखित प्रारम्भिक व्यंजन के अनुरूप है

$$(5a) \quad E_{kin}(\text{ऊर्जा}) = T = \frac{\dot{x}^2}{2} m$$

स्थिर अक्ष की स्थिति में दृढ़ पिंड का I समय-स्वतन्त्र है; परंतु नम्य संधियों वाली मंत्र-रचनाओं तथा जीवित प्राणियों में वह लाक्षणिकतया परिवर्त्ती है। प्रकरण १३ में देखेंगे कि सब खेल-कूद के काम, विशेषतः उपकरणीय जिम्मेस्टिक, मानव शरीर की अपने अवस्थिति घूर्णन में परिवर्त्तन कर लेने की योग्यता पर मुख्यतया निर्भर करते हैं।

किसी दृढ़ पिंड का अवस्थितित्व घूर्णन किस प्रकार घूर्णन अक्ष के स्थान पर निर्भर करता है, इस बात का अनुसंधान § २२ में किया जावेगा।

निकायों की यांत्रिकी

अंत में गति के आधारिक समीकरण से गतिज ऊर्जा के संबंध की बात पर विचार करेंगे। ठीक वैसे ही जैसे कि अचर संहति की स्थिति में हम गति समीकरण, $m\ddot{x} = F_x$, को कणयांत्रिकी के गतिज ऊर्जा के नियम से प्राप्त करते हैं अर्थात्

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt}, \text{ जहाँ } dW = F_x \cdot dx,$$

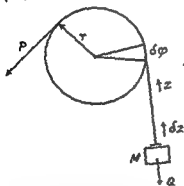
वैसे ही, अचर I की स्थिति में, हम घूर्णन के लिए समीकरण (4) प्राप्त करते हैं, केवल (5) के निम्नलिखित में व्यवहार करने की आवश्यकता है—

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt}, \text{ जहाँ } dW = L_0 d\phi \text{ (समी० (9.7))}$$

घूर्णनयुक्त पिंड के संवेग-घूर्णन अर्थात् कोणीय संवेग के पदसमूह में भी अवस्थित-घूर्णन आता है। यदि पिंड के कोणीय संवेग को M समझ लें तो प्रत्यक्षता निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$(6) \quad M = \sum dm \, r^2 \omega = \omega \sum dm \, r^2 = \omega I.$$

(२) घूर्णनात्मक तथा स्थानान्तरात्मक गतियों का युग्मन



किसी खान में कोयले के टोकरे का या किसी उत्थान-यंत्र का ध्यान करिए। उत्थान को ले आने वाला केवल (सन या तारों का मोटा मजबूत रस्सा या मोटे वेस्टन युक्त तार) एक ढोल पर लपेटा होता है और एक बल P द्वारा चलाया जाता है। ढोल की त्रिज्या समझिए कि r है। जो दो आभासी बिस्तर होते हैं (दे० आकृति १३) उनमें निम्न लिखित संबंध है

$$(7) \quad \delta z = r \delta \phi.$$

(7a) दाल्वेयर-सिद्धांत की अभिव्यक्ति है कि

$$(-Q - M\ddot{z})\delta z + (rP - I\ddot{\phi})\delta \phi = 0.$$

आ० १३—स्थानान्तरात्मक तथा घूर्णनात्मक गतियों का युग्मन (उत्थानक, कोयले का टोकरा)।

डोल की गति को डोल की परिमा पर ही, यदि ऐसा रहे सके, "लघुगुतन" करना सुविधाजनक है, अर्थात् I के स्थान पर एक "लघुगुतन गति" को गमना लेना। लघुगुतन गति की परिभाषा है

$$(8) \quad I = M_{red} l^2$$

(अवस्थितित्व घूर्णन = लघुगुतन गति \times विज्या का वर्ग फल)

समी० (7) के प्रभाव में (7a) का अब निम्नलिखित रूप में पुनर्लेखन कर सकते हैं—

$$(P - Q - M\dot{z} - M_{red} r\dot{\omega}) \delta z = 0$$

कारण कि $r\dot{\omega} = \dot{z}$, अतएव $r\dot{\omega} = \dot{z}$ तो अब निम्नलिखित गति-समीकरण प्राप्त होता है

$$(9) \quad (M + M_{red}) \dot{z} = P - Q.$$

अतएव डोल का अवस्थितित्व उत्थानक की गति के माध्यम से, M_{red} का योग कर देता है।

(३) नत तल पर लुढ़कता हुआ गोला

यहाँ फिर ढाल पर नीचे की ओर जाने की स्थानांतरण-गति और गोल के केन्द्र में जाती हुई (आ० १४ में कागज के तल में लंबवत्, एक अक्ष के चारों ओर की) घूर्णन गति, इन दो गतियों के युग्मन में काम पड़ता है। इस स्थिति में गुरुत्व का प्रभावशील घटक होगा—

$$P = Mg \sin \alpha.$$

रेखाचित्र में प्रदर्शित स्थैतिक घर्षण F बालावेर-सिद्धान्त में नहीं आता, क्योंकि वह स्पर्श बिंदु पर ही आरोपित है और यह बिंदु क्षणमात्र के लिए स्थिर रहता है। विमुक्त लुठन (लुढ़कने) की गति का प्रतिबंध है—

$$(10) \quad \dot{z} = r\dot{\omega}, \text{ या, आभासी गति के लिए लिखित, } \delta z = r\delta\phi.$$

बालावेर के अनुसार अब यह आवश्यक है कि

$$(11) \quad \delta z (Mg \sin \alpha - M\dot{z}) + \delta\phi (-I\dot{\omega}) = 0$$

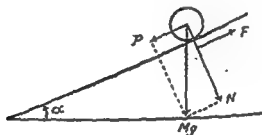
अवस्थितित्व घूर्णन I का ज्ञात करना समाकलन गणित का प्रश्न है। विना प्रमाण दिये यहाँ हम कह देगे कि a , b और c अर्धाक्षों वाले दीर्घवृत्तज

का अवस्थितित्व-घूर्ण, c अक्ष के प्रति (और a तथा b के लंबवत्) निम्नलिखित होता है—

$$(12) \quad I_c = \frac{M}{5}(a^2 + b^2).$$

तो इससे गोल का अवस्थितित्व घूर्ण निकला

$$(12a) \quad I = \frac{3}{5} Mr^2$$



आकृति १४—नत समतल पर गोला स्थैतिक घर्षण F विशुद्ध लुपटन कराता है, परंतु दालंबेयर सिद्धान्त में नहीं आता।

जैसे कि (8) में, अब r दूरी पर लघुकृत संहति का प्रवेश कराते हैं, जो (12a) के कारण निम्नलिखित हो जाती है—

$$(12b) \quad M_{red} = \frac{2}{5} M$$

यदि इसे (11) में परिस्थापित करे और (10) को भी विचार में लें तो हम सहज ही प्राप्त करते हैं—

$$(13) \quad \ddot{z} = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

गुणनसंख्ये $\frac{5}{7}$ बतलाता है कि गोल के कोणीय त्वरण और तत्कृत बर्ष अवस्थितित्व के कारण नत-समतल पर “पतन” में विलंब कैसे हो जाता है।

समीकरण (3.13) में निकला था कि स्वतंत्र पतन में अंतिम वेग

$$L = (2\pi)^{-1} \int_0^L [L - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2] d\phi$$

होता है; अतः ऊपर दिये हुए (13) में अंशक एक

$$= \left(2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

निकलता है। अतः का सामान्य बात है कि अतः एक सामंतीकरण प्रयोग द्वारा प्राप्त न केवल अंशक (ऊपर) की गति तरंग ऊर्जा में एक नुसार का एक ही धनात्मक ऊर्जा में भी परिवर्तित होती है।

(४) निरदिष्ट प्रयोगात्मक पर गति-नियमित गति

नियमित एक पर ही विद्यमान हो सकता है अतः का एक स्वतंत्रता-मात्रा एक ही होती है। यदि गति पर्याप्ततः समतल में हो एक विद्यमान के लिए सामंतीकरण सिद्धांत बताया है कि

$$\delta S (F_1, F_2) = 0.$$

अर्थात् (5.8) के अनुसार,

$$(14) \quad m\dot{\phi}^2 = m \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - F_1 \right)$$

अनुस्यूत एक F की दिशा बोर भी हो सकती है। एक एक F के नियमित पर के लिये एक घटक F_n और प्रतिविद्य R_n के योग में अतः एक C का साम्यतात्मक मिलता चाहिए, अर्थात्, F_n और R_n , दोनों की धनात्मक दिशा अभिवेक मानने हुए,

$$(15) \quad R_n + F_n = C = m \frac{v^2}{\rho}.$$

स्वाभावतः, विवेकपूर्ण यदि नियंत्रण पटरियों जैसी किसी द्रव्यात्मक युक्ति द्वारा उपलब्ध हुआ हो तो, हमें एक एक रेखीय घटक R , अर्थात् घर्षण, को भी विचार में लेना पड़ता है। यदि घर्षण को δS की ऋणात्मक दिशा में धनात्मक मिले तो समी० (14) यथार्थ होकर निम्नलिखित हो जाता है

$$(16) \quad m\dot{\phi}^2 = F_1 - R_1.$$

R_n तो समी० (15) द्वारा निर्धारित हो जाता है, परंतु, दूसरी ओर (16) का R_s "स्थैतिकीयतया तथा गतिकीयतया अनिर्धारित" रहता है और केवल प्रयोग द्वारा ही निर्धारित किया जा सकता है। प्रकरण १४ में बतावेगे कि इस प्रकार के प्रयोग कैसे किये जाते हैं।

§ १२. प्रथम प्रकार के लाग्रान्ज-समीकरण

विविक्त^१ संहति बिंदुओं m_1, m_2, \dots, m_n के एक निकाय^१ पर विचार कीजिए जो परस्पर निम्नलिखित r पूर्णवदीय प्रतिबंधों द्वारा संबंधित हों।

$$(I) \quad F_1=0, F_2=0, \dots, F_r=0$$

तो यहाँ स्वतंत्रता-संख्याओं की संख्या $f=3n-r$ होगी। हम कार्तीय निर्देशोंको में काम करेंगे और दालांवेर सिद्धांत के (10.6) वाले सूत्रीकरण का उपयोग करेंगे। वहाँ आये हुए भद्दे योगों को अधिकतर सुविधाजनक रीति में लिखने के लिए हम निर्देशांक वृन्द

$$x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$$

को क्रमात् निम्नलिखित प्रकार अंकित करेंगे

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{3n-1}, x_{3n};$$

और इसी प्रकार बल समूह X, Y, Z , के घटकों का भी अंकन करेंगे। जिस महीन का x_k, X_k से संबंध है उसे m_k द्वारा सूचित करेंगे। प्रकट है कि m_k तीन के समूहों में बराबर होंगे। तो समीकरण (10.6) अब हो जाता है—

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{3n} (X_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k = 0$$

नियंत्रण (1) के r प्रतिबंधों के प्रभाव से δx_k निम्नलिखित निरोधों के बल में होंगे—

$$(3) \quad \delta F_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, r.$$

इनको इस प्रकार भी लिख सकते हैं—

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k = 0, \quad i=1, 2, \dots, r.$$

इन δF_i ओं में से प्रत्येक को एक स्वेच्छ संख्यात्मक गुणन संख λ_i (लाग्रान्ज)

गुणक) में गुणक पर सीमित और सामान्य समीकरण (३) का सीमा पर ही हो। इससे प्राप्त होगा

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{3n} \left(X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = 0.$$

3n सीमा के ३x विषयवाचकों में केवल f ऐसे f जो एक समूह में एक वही f होकर f इन प्रकार विषयवाचकों के समूहों में सम्मिलित हों वे r विषयवाचक सम्मिलित $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_r$ द्वारा दिये जायेंगे। अब हमारे पास इन में सम्मिलित प्रत्येक समूह के लिए दोन-र सामान्य, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ हैं। इससे हम साक्ष्य पहुँचते हैं कि

$$(6) \quad X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0; \quad k=1, 2, \dots, r.$$

इस प्रकार निम्नलिखित λ_i समीकरणों के सिद्ध हुए, समीकरण (5) अब केवल निम्नलिखित ही रह जाता है

$$(7) \quad \sum_{k=r+1}^{3n} \left(X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = 0$$

यहाँ δx_k पूर्णतया स्वतंत्र हैं और सामान्य में उनकी संख्या $f = 3n - r$ है। यदि, उदाहरणार्थ, हम यह चुनें कि

$$(8) \quad \delta x_{r+1} \neq 0, \quad \delta x_{r+2} = \delta x_{r+3} = \dots = \dots = \delta x_{r+r-1} = \delta x_{r+r} = \dots = \delta x_{3n} = 0$$

तो देखेंगे कि δx_{r+1} का गुणक पर अवश्यमेव शून्य होगा। यदि r को मध्य, 1, 2, ..., f, मान दे कर देखें तो निराशंका है कि कोष्ठकों में जो मध्य पृष्ठ हैं उन मध्यों भी शून्य हो जाना चाहिए।

$$X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0, \quad k=r+1, r+2, \dots, 3n$$

समीकरणों (6) के साथ इनसे नीचे दिये हुए 3n अवकल समीकरण बनते हैं—

$$(9) \quad m_k \ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad k=1, 2, \dots, 3n.$$

निकायों की यांत्रिकी

इनको प्रथम प्रकार के लाग्रान्ज-समीकरण कहते हैं। स्वभावतः, m_k तीन के समूहों में बराबर होंगे; जैसे कि $m_1 = m_2 = m_3$, क्योंकि उसी एक संहति मि m_1 के तीन निर्देशांक होते हैं: $x_1 = x_1, x_2 = y_1, x_3 = z_1$.

अब तक हमने समझ लिया था कि प्रतिबंध (1) पूर्णपदीय है। हम सहज ही मान ले सकते हैं कि थोड़े से ही रूपान्तर से ऊपर दिये हुए सब के सब अपूर्णपदीय नियंत्रणों की स्थिति में भी ले जाये जा सकते हैं। अंतर केवल यह होगा कि (1) के $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ वाले गुणन खंडों को F_{ik} निर्देशांकों के व्यापक फलनों द्वारा प्रतिस्थापित करना पड़ेगा, जोकि किसी फलन के आंशिक अवकलजों के रूप में नहीं लिखे जा सकते। यदि यह प्रतिस्थापन समीकरणों (9) में करें तो तुरंत ही अपूर्णपदीय निकायों के लिए लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरण प्राप्त हो जाते हैं—

$$(9a) \quad m_k \ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i F_{ik}$$

आइए, यह मान कर कि प्रतिबंध (1) समय के साथ बदलते हैं, एक अधिकतर मनोरंजक व्यापकीकरण करें। तो अब ये F_i वृन्द न केवल उन x_k ओं पर बल्कि समय (t) पर भी स्पष्टतया निर्भर करेंगे। अब हमें यह अभियाचना करनी पड़ेगी कि (4) के बनाने में समय अचर रखा जाय। यह शर्त न केवल अनुशेष है कि सत्याभासक भी है क्योंकि हमारे आभासी विस्थापन का समय के बीतने से कुछ संबंध नहीं है। यह अभियाचना (9) की व्युत्पत्ति पर कोई प्रभाव नहीं डालती। परंतु ऊर्जा-समीकरण के रूप के संबंध में एक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है। यदि इस समीकरण को समय-निरपेक्ष नियंत्रणों की स्थिति में व्युत्पन्न करना चाहें तो इस प्रक्रम का अनुसरण करना पड़ता है कि (9) को \dot{x}_k से गुणा कर k ओं का योग कर देते हैं तो बायीं ओर प्राप्त होता है,

$$(9b) \quad dt \sum m_k \dot{x}_k \ddot{x}_k = dt \frac{d}{dt} \sum \frac{m_k}{2} \dot{x}_k^2 = dt \frac{dT}{dt} = dT.$$

दाहिने अंग का प्रथम पद अनुप्रयुक्त बलों द्वारा समय dt में किया हुआ काम प्रदान करता है—

$$(9c) \quad \sum d x_k X_k = dW$$

बाहिरी ओर का द्वितीय पद शून्य हो जाता है। क्योंकि

$$(9d) \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_{i=1}^r \lambda_i dF_i = 0,$$

इसलिए कि F_i केवल x_k पर निर्भर करते हैं, अतएव $F_i = 0$ मृत्तिा करणा है कि

$$(9e) \quad dF_i = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

तो अब (9b,c) से प्राप्त करते हैं

$$(10)^* \quad dT = dW.$$

यदि F_i भी समय (t) पर निर्भर करे तो ऐसा नहीं होता। तब (9d,e) के 0 के स्थान पर रखना होगा, प्रमात्

$$-\sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t} dt \text{ और } -\frac{\partial F_i}{\partial t} dt$$

तो समय-निर्भर सापेक्ष नियंत्रणों के लिए ऊर्जा-समीकरण होगा—

$$(10a) \quad dT = dW - dt \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t}.$$

इसका तात्पर्य यह हुआ कि समय-निर्भर नियंत्रण निकाय पर कर्म करते हैं।

इस सिद्धांत को अधिकतर साकार बनाने के लिए टेनिस की थापी (रैकेट) का उदाहरण लीजिए। यदि थापी स्थिर रखी जाय तो वह गेंद को बिना ऊर्जा-परिवर्तन के परावर्तित कर देती है। इसके बजाय यदि वह पीछे को दब जाय या आगे को गेंद की ओर झूळ जाय तो वह गेंद से ऊर्जा लेती है या उसको देती है।

अपूर्णपदीय निकायों में, (9a) में हुई F_{ik} की t पर स्पष्ट निर्भरता, (10) के रूप में ऊर्जा समीकरण से संगत होगी। परंतु यदि अपूर्णपदीय प्रतिबंध का रूप निम्नलिखित होता

$$\sum F_{ik} dx_k + G_i dt = 0,$$

तो (7.4) के स्थान पर G_i से संबंधित अंगों को (10) से जोड़ना पड़ता और तब (10) का रूप (10a) के अनुरूप हो जाता, अर्थात्

$$(10b) \quad dT = dW - dt \sum_{i=1}^r \lambda_i G_i.$$

अगले अध्याय में दिये गेलीय लोलक के दृष्टांत से हमें मालूम होगा कि λ_i ओं को, पूर्णपदीय किंवा अपूर्णपदीय प्रतिबंधों द्वारा डाले हुए नियंत्रणों के विरुद्ध, निकाय की प्रतिक्रियाएँ कौनसी कैसे होती हैं। वहाँ हम यह भी देखेंगे कि कितने प्रकार भी चुने हुए r लाग्रान्ज-समीकरणों द्वारा λ ओं का निर्धारण नहीं किया जा सकता, यद्यपि इन समीकरणों की व्युत्पत्ति के लिए जो बातें मान ली गयी थीं वे सब अनुज्ञेय थीं। इसके स्थान पर वहाँ λ ओं के निर्धारण के लिए सारे के सारे 311 लाग्रान्ज-समीकरण लेने पड़ेंगे। इस बात का महत्त्व समझ लेना चाहिए कि लाग्रान्ज गुणकों की रीति न केवल प्रथम प्रकार के लाग्रान्ज समीकरणों में ही किन्तु (देखिए अध्याय छठा, प्रकरण ३४) 7c अधिकतर व्यापक समीकरणों में भी महत्त्वशाली भाग लेती है। यांत्रिकी में उनके उपयोग के अतिरिक्त, महत्तमों और अल्पतमों के प्रारम्भिक सिद्धांत में भी, लाग्रान्ज गुणकों का साक्षात्कार करना पड़ता है।

§ १३. संवेग के तथा कोणीय संवेग के समीकरण

इन समीकरणों को विविक्त सहति-बिंदुओं के एक ऐसे निकाय के लिए व्युत्पन्न करेंगे जिसका कि आकाश में, समग्रतः, स्थानांतरण तथा घूर्णन किया जा सकता हो। परंतु एक सीमांत प्रक्रिया द्वारा वे, वैसी ही भली भाँति, किसी स्वतंत्रतया गतिशील दृढ़ पिंड के लिए या किसी भी ऐसे यांत्रिक निकाय के लिए अनुप्रयुक्त किये जा सकते हैं जिसकी गति किन्हीं बाह्य नियंत्रणों द्वारा निरोधित न हो।

आरोपित बलों को हम बाह्य और आंतरिक बलसमूहों में विभाजित करते हैं। यह वर्गीकरण बलों की उत्पत्ति के बारे में कुछ नहीं कहता और इसलिए पृष्ठ ७२ के अनुप्रयुक्त तथा प्रतिक्रिया बलों वाले वर्गीकरण से किसी भाँति सर्वसम नहीं है। प्रस्तुत भेद की केवलमात्र कसौटी यह है कि निकाय के भीतर ही भीतर दिया और प्रतिक्रिया का नियम संतुष्ट होता है या नहीं। प्रथम स्थिति में कहते हैं कि बलसमूह आंतरिक है; दूसरे में, बाह्य। उदाहरणतः, सौर परिवार के आंतरिक बल अनु-

प्रयुक्त बल-समूह है क्योंकि वे गुरुत्वाकर्षणात्मक हैं, परन्तु जो बाह्य बल रेखाओं को चलाता है, वह (जैसा कि प्रकरण १४-२ में देखेंगे) प्रतिप्रियात्रल है, जबकि घूर्णन हुए पहियों पर स्थितिक घर्षण ।

बिंदु k पर आरोपित बाह्य बल को F_k कहेंगे । आंतरिक बल इन बल को दूर करने के लिए F_{ik} कहे जावेंगे कि वे निकाय के भीतर दो बिंदुओं के बीच आरोपित होते हैं और निकाय के भीतर ही न्यूटन के तृतीय नियम

$$(1) \quad F_{ik} = -F_{ki}$$

का पालन करते हैं ।

(१) संवेग का समीकरण

अब (10.5) के रूप में दायाँ-पक्ष में मिश्रित का उपयोग कीजिए । हम F_k के स्थान पर $F_k + \sum_i F_{ik}$ तथा परिभाषा के अनुसार F_k^* के स्थान पर $-p_k^*$

लिखेंगे और सब δs_k ओं को परस्पर बराबर कर देंगे । अतएव निकाय के सभी संहति बिंदुओं को एक जैसा आभासी विस्थापन मिलेगा । यदि योग में सभी i और k ले लें तो (1) के कारण (F_{ik}) निकल जाते हैं, और केवल निम्नलिखित रह जाता है—

$$(2) \quad \delta s. \left(\sum_k F_k - \sum_k \dot{p}_k \right) = 0,$$

योग में सभी k ओं का लेना एक ऊपरी लकीर द्वारा सूचित करेंगे । तो (2) से परिणाम निकलता है कि

$$(3) \quad \dot{\bar{p}} = \bar{F}.$$

\bar{p} निकाय का सारा संवेग है जो कि व्यक्तिगत संवेगों के सदिश योग के बराबर है । हम संहति-केन्द्र-वेग \bar{V} की परिभाषा यह करते हैं कि

$$M\bar{V} = \bar{mv} = \bar{p}, \quad M = \bar{m},$$

और (3) के स्थान पर प्राप्त करते हैं—

$$(3a) \quad M\dot{\bar{V}} = \bar{F}$$

अब एक कोई भी स्वेच्छ, पर स्थिर अभिदेश बिन्दु O चुनते हैं । निकाय के बिन्दुओं की O से दूरी F_k नापते हैं; और संहति केन्द्र की O से दूरी R निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित करते हैं :

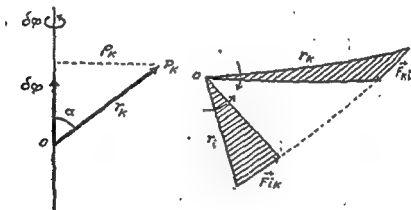
$$(3b) \quad MR = \bar{mr}.$$

समीकरणों (3a, b) की अंतर्वस्तु का सार यह है कि, स्वतंत्रतया गतिशील यांत्रिक निकाय के संहति-केन्द्र की गति एक ऐसे एकाकी संहति बिन्दु की भाँति होती है जिसकी संहति M निकाय की सारी संहति के बराबर है और जो निकाय पर आरोपित सब बाह्य बलों का परिणामी F आरोपित होता है।

(२) कोणीय संवेग का समीकरण

कल्पना कीजिए कि निकाय को बिन्दु O से जाते हुए किसी भी अक्ष के प्रति हम एक आभासी घूर्णन $\delta\phi$ देते हैं। तो निकाय के विभिन्न संहति-बिन्दुओं m_k के विस्थापन δs_k असम होंगे; क्योंकि

$$(4) \quad \delta s_k = \delta\phi \times r_k$$



आकृति १५—आभासी घूर्णन $\delta\phi$ कारित आभासी विस्थापन δs आकृति १६—आंतरिक बलों के पूर्ण जोड़ों में कट जाते हैं।

इसके प्रमाण के लिए आकृति १५ देखिए। वहाँ $\delta\phi$ को घूर्णन-अक्ष पर एक सदिश की भाँति और, साथ-ही-साथ, दक्षिणावर्ती घेच के कायदे से सहमत होते हुए, इस अक्ष के चारों ओर एक वक्र बाण की भाँति भी खींचा गया है। शिददा के गुणनफल के परिभाषा से सदिश δs_k का परिमाण δs_k निम्नलिखित होगा—

$$\delta s_k = \delta\phi / r_k / \sin \alpha = \delta\phi \rho_k,$$

जैसा कि प्रस्तुत घूर्णन के लिए होना चाहिए। इसी प्रकार δs_i के दिशा और माप (4) द्वारा ठीक-ठीक दिये जाते हैं। δs_k रेखाचित्र के तदनुसार दिशा में कागज की ओर होगा।

यदि (4) का (10.5) में उपयोग करें और F^* तथा F को उपप्रकरण (१) की भाँति विस्थापित करें, तो हम तुरंत प्राप्त करते हैं—

$$(5) \quad \sum_k \{F_k + \sum_i F_{ik} - p_k\} \cdot (\delta\phi \times r_k) = 0$$

तदुपरांत हम प्रारंभिक सदिश बीजगणित के निम्नलिखित कायदे का उपयोग करते हैं—

$$(6) \quad A \cdot B \times C = B \cdot C \times A = C \cdot A \times B$$

जो कहता है कि किन्हीं तीन सदिशों A , B , C , द्वारा निर्मित समांतरफलकी का आयतन उसके तीन सलग्न किनारों के "नामों" के चक्रीय क्रमचय के क्रम पर नहीं निर्भर करता।

अतएव (5) के स्थान पर लिख सकते हैं—

$$(7) \quad \delta\phi \cdot \left\{ \sum_k (r_k \times F_k) + \sum_i \sum_k (r_k \times F_{ik}) - \sum_k (r_k \times P_k) \right\} = 0.$$

इस प्रकार $\delta\phi$ और r के बीच का संबंध तोड़ दिया जाता है, ताकि, $\delta\phi$ कुछ भी क्यों न हो, मध्यस्थ कोष्ठकों $\{\}$ में जो पद हैं वह स्वयं शून्य हो जाय। इस पद को अधिकतर सरलतया लिखने के लिए निम्नलिखित संकेतन का उपयोग करते हैं—

$$(7a) \quad L_k = r_k \times F_k \text{ जैसे कि (5.12) में; } \bar{L} = \sum L_k;$$

तथा

$$(7b) \quad M_k = r_k \times P_k, \quad r_k \times \dot{P}_k = \frac{d}{dt} (r_k \times P_k) = \dot{M}_k \text{ जैसे कि}$$

एव

$$(5.14) \text{ में,}$$

$$(7c) \quad \bar{M} = \sum M_k, \quad \dot{\bar{M}} = \sum \dot{M}_k.$$

अतएव \bar{L} है सर्वसामान्य अभिवेशविंदु O के प्रति सारे बाह्य बलों के घूर्णों का योग सदिश; और \bar{M} है उसी अभिवेश विंदु के प्रति निकाय के सब सहति विंदुओं के कोणीय संवेगों का सदिश योग या, अधिकतर संक्षेपतया, O के प्रति निकाय का संपूर्ण कोणीय वेग।

इसके अतिरिक्त, आकृति १६ की सहायता से हम यह दिखलाते हैं कि समी०

(7) के दोहरे योग में सब पद जोड़ो में कट जाते हैं,

अर्थात्

$$(8) \quad \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki} = 0.$$

हम देखते हैं कि इस व्यंजक^१ में तृतीय नियम, समी० (I), अनिवार्यतः आनरिक घल की परिभाषा की भाँति काम करता है।

समी० (8) से परिणाम निकलता है कि (7) का दोहरा योग शून्य हो जाता है। समी० (7a,b,c) को स्मरण में रखते हुए हम (7) से परिणाम निकालते हैं कि

$$(9) \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}.$$

यह समीकरण (3) का ठीक प्रतिरूप है। वह कहता है कि

निकाय के संपूर्ण कोणीय संवेग के परिवर्तन की समय-चाल, बाह्य बलों के परिणामी घूर्ण के बराबर है,

ठीक वैसे ही जैसे कि समीकरण (3) ने कहा था कि

निकाय के संपूर्ण संवेग के परिवर्तन की समय-चाल सब बाह्य बलों के परिणामी के बराबर होती है।

ये दो नियम क्रमात्, कोणीय संवेग और (रेखीय) संवेग के समीकरण (या सिद्धांत) कहे जावेंगे।

जर्मन साहित्य में पहले समीकरण (9) को क्षेत्रफलों का सिद्धांत^१ कहते थे। इस नाम का प्रारंभ केप्लर समस्या में हुआ था। वहाँ हमें प्राप्त हुआ था कि किसी एक ग्रह के लिए क्षेत्रफलीय वेग कोणीय संवेग के समानुपाती है और कोणीय संवेग की दिशा ग्रह-कक्षा-तल के लंबवत् है। ग्रहीय बहुपिंड-समस्या में ऐसा नहीं होता। वहाँ उसके स्थान पर निम्नलिखित होता है—

$$(10) \quad \dot{\mathbf{M}} = \sum 2m_k \frac{d\mathbf{A}_k}{dt},$$

अर्थात् न केवल विभिन्न ग्रह संहतियाँ गुणनखंडों की भाँति आती हैं अपितु ग्रहों के अपने अपने वैयक्तिक क्षेत्रफलीय वेगों का योग सदिशात्मकतया करना पड़ता है। इस प्रकार एक संपूर्ण ग्रहपरिवार के लिए जो क्षेत्रफलीय वेग निकलता है वह, जैसा कि सुविदित है, एक निश्चर तल (एक समतल जो \mathbf{M} का अभिलंब हो, उन) के

लिए निश्चित होता है। वह निश्चर इसलिए है कि ग्रहपरिवार में बाह्य व-समूह नहीं होते और इसलिए $\bar{L}=0$ । तथा, (9) के अनुसार,

$$(10a) \quad \bar{M} = \text{नियत}.$$

व्यापकतया, $\bar{L}=0$ के लिए हम एक विशेष मिद्धात प्राप्त करते हैं, कोणीय संवेग के अविनाशित्व का सिद्धांत। दृढ़ पिंड जैसे अनन्ततया बहु कणों के निकाय के लिए क्षेत्रफलीय वेग की भावना को मनोदृष्ट करना और भी कठिन, इसलिए कम उपयोगी है। अतएव व्यापक व्यवहार के लिए जर्मन शब्द पन्नाचेनसात्ज (क्षेत्रफलों का मिद्धात) त्याग देना चाहिए।

(३) निर्देशांक विधि से प्राप्त प्रमाण

अब हम अपने सिद्धांतों के प्रमाण की एक दूसरी विधि का स्थूल वर्णन करेंगे—कार्तीय निर्देशांकों में विघटित करने की विधि। क्योंकि इन निर्देशांकों का उपयोग करना बहु-प्रचलित है और पुरानी पाठ्य-पुस्तकों को इतना अधिक प्रिय है कि हम इस प्रथा को कुछ-कुछ स्वीकार कर लेना चाहते हैं।

हम निम्नलिखित समीकरणों से प्रारंभ करते हैं—

$$(11) \quad m_k \dot{x}_k = X_k + \sum_i X_{ik} \\ m_k \dot{y}_k = Y_k + \sum_i Y_{ik}$$

जो सहज में ही समझ में आ जाने वाले रूप में लिखे गये हैं। इनमें के पहले समीकरण में $X_{ik} = -X_{ki}$ रखकर, k के लिए योग तुरत ही संवेग के समीकरण का x -घटक प्रदान करता है—

$$(12) \quad \frac{d^2}{dt^2} \sum_k m_k x_k = \sum_k X_k$$

पहले समीकरण को $-y_k$ से, दूसरे को x_k से गुणा कर, गुणनफलों का योग देता है—

$$(13) \quad \sum_k m_k (x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) = \sum_k (x_k Y_k - y_k X_k) + \dots\dots$$

जो पद... लिखे नहीं गये हैं उन सब में ik और ki ओं को जोड़ों में इकट्ठा कर लेते हैं और इस प्रकार आंतरिक वलों, $i \rightarrow k$ तथा $k \rightarrow i$, की दिशा निकल आती है। तब प्राप्त करते हैं—

$$x_k Y_{ki} - y_k X_{ki} + x_i Y_{ik} - y_i X_{ik}$$

$$= \frac{|\mathbf{F}_{ik}|}{r_{ik}} \left[x_k(y_i - y_k) - y_k(x_i - x_k) + x_i(y_k - y_i) - y_i(x_k - x_i) \right].$$

सरलीकरण दिखाता है कि आकृति १६ से सहमत होते हुए यह शून्य के बराबर है। (5.17a) की सहायता से (13) का दक्षिणी अंग निम्नलिखित रह जाता है—

$$\sum_k L_{ks} = L_s.$$

(5.14b) के विचार से बायाँ अंग निम्नलिखित है

$$(13a) \quad \frac{d}{dt} \sum_k m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \sum_k \dot{M}_{ks} = \dot{M}_s$$

तो समीकरण (13) कोणीय संवेग के समीकरण (9) के x -घटक से सर्वसम है।

(४) उदाहरण

रेखीय और कोणीय संवेगों के सिद्धांतों में एक महान् भेद है जिसका स्पष्टीकरण हम एक ऐसी विशेष स्थिति की सहायता से करेंगे जिसमें निकाय पर कोई बाह्य बल आरोपित ही न हों।

समी० (3a) के अनुसार इस स्थिति में संहति-केंद्र का वेग निश्चर रहता है, क्योंकि निकाय में आंतरिक गति के होते हुए भी, गुणनखंड के रूप में विद्यमान सारी संहति M नियत रहती है। अतएव यदि संहति-केंद्र प्रारंभ में स्थिर हो तो स्थिर ही रहना है। आंतरिक बलों में यह योग्यता नहीं होती कि वे संहति-केंद्र को गति प्रदान कर सकें, चाहे कोई नम्य संधियों वाला यंत्र-रचना हो या जीवित शरीर ही हो। अतः संहति-केंद्र चलाने के लिए किसी आधार को धक्का देने की, अतएव बाह्यबल की आवश्यकता होती है।

प्रकट है कि बाह्य बलों की अनुपस्थिति में $\bar{\mathbf{L}}=0$; अतएव (9) देता है—

$$(14) \quad \bar{M} = \text{नियतांक}$$

यदि संवेग-पूर्ण आदि में शून्य हो तो, आंतरिक बल-वृन्द युक्त निकाय के लिए श्री. वह शून्य ही रहता है। परंतु इससे यह परिणाम नहीं निकलता कि निकाय का कोणीय स्थान सदा के लिए वही बना रहेगा। वरन् यह कि यह कोणीय स्थान अपेक्षित, केवल आंतरिक बलवृन्द की सहायता से, किसी बाहरी वस्तु को धक्का लगाये बिना ही बदला जा सकता है।

इसका एक उदाहरण विल्ली है, जो सदैव अपने पैरों के बल ही गिरने का प्राध कर लेती है। अगले पैरों को उचित प्रकार घुमाकर, साथ ही पिछले पैरों को दूसरी ओर घुमाकर वह ऐसा कर लेती है। पैरिस अकाडमी द्वारा १८९४ में प्रकाशित कांत राडघू^१ में पृष्ठ ७१४ पर मुद्रित, शीघ्र-शीघ्र लिये हुए फोटोओ में विल्ली की यह क्रिया चित्रित है।

इस प्रक्रिया की मुख्य-मुख्य बातें, एक आवर्तन-स्टूल के प्रयोगों द्वारा देखी जा सकती है। इस स्टूल में एक क्षैतिज मडलक होता है जो कम से कम घर्पण के साथ एक ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर घूम सकता है। प्रयोग का "साधक" मडलक पर बैठाया जाता है। शुरू में मडलक स्थिर होता है, अतएव

$$M_0 = 0.$$

वह अपनी दाहिनी भुजा उठाकर सामने लाता है और उसको पीछे की ओर घुमाकर ले जाता है।

इस प्रक्रिया में "बुहारे हुए क्षेत्रफल" का संतुलन स्टूल के मडलक समेत शरीर के शेष भाग की प्रतिकूल दिशा में घुमाने से करना होगा। ठीक-ठीक शब्दों में, घुमायी हुई भुजा का सवेग-घूर्ण M_1 , घड़ और मडलक में एक ऐसा सवेगघूर्ण M_2 उत्पन्न करता है कि—

$$M_2 = -M_1.$$

साधक अब अपनी भुजा नीचे कर लेता है। इससे M में कोई परिवर्तन नहीं होता। अब शरीर प्रारंभ की स्थिति में हो गया; और सारी प्रक्रिया फिर की जा सकती है। प्रत्येक पुनःकरण में वही प्रति-घूर्णन M_2 होता है। इस प्रकार की ११ पुनरावृत्तियों के बाद साधक लक्ष करता है कि वह अब आदि से प्रतिकूल दिशा में देख रहा है। संहति-केन्द्र के स्थान से भिन्नतः, कोणीय स्थान प्रारंभ की विराम अवस्था द्वारा नहीं निश्चित होता।

साधक के दाहिने हाथ में एक भारी बोझ थमा कर प्रभाव अधिक किया जा सकता है। वैसा करने से "बुहारा हुआ क्षेत्रफल" एक तरह से, बहुगुणित हो जाता है, जिस कारण प्रति-घूर्णन भी प्रत्यक्षत अधिक हो जाता है।

आइए, दो प्रयोग और करें। साधक स्टूल पर भुजाएँ नीचे किये हुए खड़ा होता है और उसको एक कोणीय सवेग M_0 देते हैं; अब वह दोनों भुजाएँ (यदि चाहे तो

हाथों में भार लिये हुए) एक-एक तरफ उठाता है; तो घूर्णन एकाएक कम हो जाता है। इसके बजाय, स्टूल पर साधक को खड़ा कर, दोनों भुजाएँ इधर-उधर फैला का, मडलक को घुमा देते हैं; अब वह अपनी भुजाएँ नीचे करता है और साधारणतया तिपाई से गिर पड़ता है क्योंकि घूर्णन, विशेषतया यदि भारों का उपयोग किया गया हो, एकाएक बहुत ही बढ़ जाता है।

ऊपर की इन दोनों स्थितियों में

$$M_0 = M_1,$$

और इसलिए समी० (11.6) से

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1.$$

परंतु प्रथम स्थिति में

$$I_0 < I_1, \text{ और इसलिए, } \omega_1 < \omega_0;$$

और द्वितीय स्थिति में

$$I_0 > I_1, \text{ जिस कारण, } \omega_1 > \omega_0.$$

कोणीय सवेग के अविनाशित्व में (अर्थात् एक ही जैसे रहते हुए) अवस्थितिव-घूर्ण की परिवर्तनशीलता का उपयोग खेल-कूद के सभी आश्चर्य-कार्यों में, विशेषतः जिम्नैस्टिक के क्षैतिजदंड के व्यायामों में, बहुतायत से होता है। उदाहरणतः “फॉरवर्ड अपस्विंग” पर विचार कीजिए। झूलन प्राप्त करने के आदि कार्य में दारी फैला हुआ, अवस्थितिव-घूर्ण बढ़ा, और दंड के चारों ओर का कोणीय वेग मजबूत होता है। जब खिलाड़ी आगे की ओर झूलता है, उच्चतम स्थान पर पहुँचने से अर पहले, वह अपने पैर सिकोड़ लेता है, जिससे दंड के प्रति उसका अवस्थितिव घूर्ण का हो जाता है और कोणीय वेग बढ़ जाता है। उसका सहति-केंद्र दंड के ऊपर हो जाता है और खिलाड़ी दंड पर सीधा स्थान ग्रहण करता है। ध्यान दीजिए कि दंड को हाथों से पकड़ने की प्रतिक्रियाओं का कोणीय सवेग पर कुछ बहुत विचारणीय प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि दंड इतना पतला होता है कि प्रतिक्रिया के बलों की उत्तोलक बाहु शून्यप्रायतया छोटी होती है।

“वृत्तों के व्यायाम” (पोछे की ओर के निरंतर वृत्त, घुटनो के वृत्त, इत्यादि) में इन्ही सिद्धांतों का उपयोग होता है। जिम्नैस्टिक, बरफ पर स्कीटिंग (धारदार “जूते” पर सरकना) और स्कीइंग (लकड़ी के विशेष रूप के लंबे एक-एक पट्टे

को प्रत्येक पैर से बांधकर बरफ पर गिराना), ये एक प्रकार में प्रयोगात्मक और सैद्धांतिक यांत्रिकी के पाठ हैं।

(५) जहाजी इंजनों का संहति-संतुलन

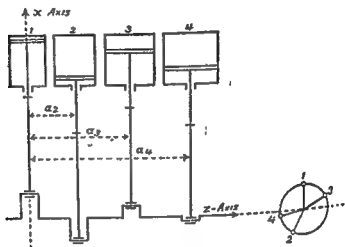
अंत में आइए एक बहुत बड़े उदाहरण पर विचार करें—जहाजी इंजनों की दृष्टतोगामी सहतियों का संतुलन।

पिछली शताब्दी के अंतिम वर्षों में, अपने मध्यम युग में जिसके परिणाम स्वरूप शीघ्रगामी जहाज बनने लगे, जहाज-निर्माण-उद्योग एक धिक्क म्बिति में होकर गुजरता था। शिल्पिक कारणवश मोटर-ईंपा के घूमने की चाल लगभग एक गी प्रति मिनट की गति पड़ती है। पिस्टन इंजनों के अवस्थितित्वीय प्रभाव भी इसी ताल में बदलते हैं और उन्हें जहाज के पिंड में अवशोषित हो जाना होता है। ज्यों-ज्यों जहाज की लंबाई बढ़ायी जाने लगी त्यों-त्यों उसकी "निजी आवृत्ति" कम होती गयी और यह आवृत्ति खतरनाक रूप से अवस्थितित्वीय प्रभावों के ताल के पास आने लगी। यहाँ पर "अनुनाद" शब्द का व्यवहार कर, आइए हम उस विषय की कुछ पूर्वकल्पना कर लें, जिस पर आगामी अध्याय में बहुत कुछ कहा जायगा। इस शब्द का आरंभ ध्वनिकी में हुआ था जहाँ अनुनाद संबंधी घटनाएँ बहुत ही प्रत्यक्ष हैं और जिस संबंध में ही उसका पहले पहल अध्ययन हुआ था।

स्थान की कमी के कारण शीघ्रगामी स्टीमरो के भाप-सिलिंडरो को ऊर्ध्वाधर रखना पड़ता है। विषय को विक्षिप्त करने के लिए हम मान लेंगे कि पिस्टन कुल जमा चार है (आकृति १७) और ये सब एक ही ईंपा में संवर्धित हैं जो जहाज में दैर्घ्यवत्, आकृति में x -अक्ष की दिशा में, व्यवस्थित है। हम देखेंगे कि यदि पिस्टनों की संख्या इससे कम हुई तो प्रथम कोटि तक भी संहति-संतुलन असंभव होगा। यहाँ हम प्रथम कोटि तक ही काम करेंगे। आकृति १७ के निर्देशांक-निर्वाचन में अवस्थितित्व वल समूह x -अक्ष की दिशा में निर्देशित है और केवल y -अक्ष के प्रति ही उनके घूर्ण हो सकते हैं। अवस्थितित्वीय प्रभावों का, जहाज के पिंड में उत्पादित प्रतिक्रियाओं द्वारा, अवशोषण हो जाना चाहिए, जिसमें वे तालबद्ध प्रतिक्रिया उत्पन्न कराते हैं।

यह उन प्रतिमानों में बड़ी सुंदरता से चित्रित है जिन्हें कौसल आटो श्लिक ने अपनी ईजाद के समय म्यूनिख के जर्मन म्यूजियम (अजायबघर) को दान किया था।

इसमें जहाज का पेटा एक लंबे शहतीर द्वारा प्रतिरूपित है। सर्पिल कमानियों द्वारा शहतीर लटकाया हुआ है। कमानियाँ पानी की उत्प्लावकता अनुरूपित करती हैं और “जहाज” को दोलन करने देती हैं। जिस समय शहतीर पर लगे हुए इंजनों के प्रतिमान चलाये जाते हैं तब शहतीर थोड़े आयाम के साथ दोलन करने लगता है।



आकृति १७—ऊर्ध्वाधरतया व्यवस्थित चार सिलिंडरों वाले पिस्टन इंजन का श्लिष्ट कृत सहति-संतुलन। दाहिनी तरफ नीचे की ओर रेखाचित्र चार श्रैक-पिनो के परस्पर आपेक्षिक स्थान दिखाता है।

यदि इंजनों की घूर्णन-चाल बढ़ायी जाय तो शहतीर का कंपन भी बढ़ा हो जाता है, जितना ही घूर्णन-आवृत्ति शहतीर की निजी आवृत्ति के मूल के पास पहुँचती है उतना ही अधिक उसका आयाम होता जाता है (देखिए आकृति १८)। दोलनों के बड़े आयाम जहाज की सुरक्षा पर और यात्रियों के सुख पर भी विपत्तिजनक प्रभाव डालते हैं। सहति-संतुलन का अभिप्राय यह है कि अवस्थितित्व-बल्लो तथा जहाजी इयनों के इतस्ततोमामी सहतियों द्वारा इन तंत्रों का निराकरण हो जाय ताकि जहाज का तब उनके हानिकारक प्रभावों से बचा रहे।



आ० १८—जहाज की निजी आवृत्ति के मूल के प्रतिमानवत् शहतीर की निजी आवृत्ति।

यदि स्वरणों से सीधे स्थान-निर्देशन पर पहुँच जायें तो, अवस्थितित्व बलों की जो सर-र-दिशा में हैं, अभिप्रायना है कि—

$$(15) \quad \sum m_k x_k = 0.$$

संहतियों m_k में न केवल पिस्टन और पिस्टन-दंडों की सहितियाँ वरन्, प्रथम सन्निकटन तक, संबंधक दंडों तथा क्रैंक ईपा के उत्केद्र^१ अगो के कुछ भागों की सहितियाँ भी सम्मिलित हैं।

अवस्थितित्व बलों के घूर्णों का संतुलन भी उतने ही महत्त्व का है। ऊपर कहा जा चुका है और आ० १७ से सत्य सा प्रतीत भी होता है कि यहाँ γ -अक्ष के प्रति के घूर्णवृन्द ही कुछ काम करते हैं। एक बार फिर त्वरणों से सीधे स्थान-निर्देशाकों पर जा पहुँचते हैं, और ऐसा करना अनुज्ञेय है क्योंकि उत्तोलक-बाहुगण, अर्थात् आ० १७ के a -बृंद, नियत हैं। इसके लिए हमारी माँग यह है कि—

$$(16) \quad \sum m_k a_k x_k = 0.$$

अब हम पिस्टन के निर्देशाकों, x_k ओ, को क्रैंकपिन के निर्देशाकों, ϕ_k के पदों में व्यक्त करते हैं। आकृति ९ और समी० (9.6) से, प्रथम सन्निकटन तक, निम्न-लिखित प्राप्त करते हैं—

$$(17) \quad x_k + r_k \cos \phi_k \text{ नियतांक है}$$

प्रथम सन्निकटन^२ से यहाँ यह मतलब है कि हम एक अनन्ततया लम्बे संबंधक दंड की सीमा तक जाते हैं, अर्थात् $r/l \rightarrow 0$. जहाँ-जहाँ r/l का प्रथम घात रख लिया गया है, जैसे कि समीकरणों (9.5) और (9.6) में वहाँ हम द्वितीय कोटि की गणना नहीं करेंगे। सभी पिस्टनों के एक ही ईपा पर काम करने के कारण, समय के विचार से नियत एक कला-स्थानांतर a_k के अतिरिक्त, सब ϕ_k परस्पर समान होंगे। अतएव

$$(18) \quad \phi_k = \phi_1 + \alpha_k,$$

जहाँ $\alpha_1 = 0$ और $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ यथेच्छया चुने जा सकते हैं। समी० (17) और (18) के प्रभाव से, प्रतिबधों (15) और (16) का चर भाग, जिससे ही हमें यहाँ मतलब है, निम्नलिखित देता है—

1. Eccentric

अब प्रथम सन्निकटन संहति-संतुलन को प्रथम कोटि तक निश्चित करता है (अर्थात्, जैसा कि उसे कहते हैं, "प्राथमिक बलों और प्राथमिक बल-युग्मों का संतुलन" करता है)। कारण कि हम प्रथम कोटि तक ही जाना चाहते हैं, द्वितीय सन्निकटन आवश्यक नहीं।

$$(19) \quad \begin{aligned} \sum M_k r_k \cos(\phi_1 + \alpha_k) &= 0, \\ \sum M_k r_k a_k \cos(\phi_1 + \alpha_k) &= 0. \end{aligned}$$

यदि त्रिकोणमितीय फलनों का विस्तार करें तो देखेंगे कि ϕ_1 कुछ भी हो, $\cos \phi_1$ और $\sin \phi_1$ के गुणनखंड अलग-अलग शून्य हो जावेंगे। तो अब हमें परामितियों a_k और α_k के बीच चार समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$(20) \quad \begin{aligned} \sum M_k r_k \cos \alpha_k &= 0, & \sum M_k r_k \sin \alpha_k &= 0, \\ \sum M_k r_k a_k \cos \alpha_k &= 0, & \sum M_k r_k a_k \sin \alpha_k &= 0 \end{aligned}$$

M_k तथा r_k वृद्ध रचना द्वारा निश्चित होते हैं। रह गयीं पाँच राशियाँ—तीन कल-विस्थापन $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ और दो उत्तोलक बाहु अनुपात, $a_2 : a_3 : a_4$ (इन 'a'ओं का निरपेक्ष मान समी० (20) में नहीं आता)। प्रतिबन्धों (20) का पालन करने के लिए इन पाँच राशियों के निर्वाचन में कुछ थोड़ी-सी स्वच्छंदता है। इस स्वच्छंदता के कारण ऐसे साधनों का त्याग कर सकते हैं जो प्राविधिक दृष्टि से उपयुक्त नहीं।

यह विवरण दिखलाता है कि चार सिलिंडर वाले इंजनों में संहति-संतुलन प्रथम कोटि तक किया जा सकता है। वह यह भी दिखलाता है कि परामितियों की कमी के कारण चार से कम सिलिंडरों वाले इंजनों में संहति-संतुलन, जैसा पहले भी कह आये हैं, नहीं किया जा सकता। शिलक^१ संहति-संतुलन विधि की बाह्य लाक्षणिक विशेषता यह है कि चार-सिलिंडर इंजन के पिस्टन समान दूरी पर नहीं होते और न उनके केंद्र-पिंन एक दूसरे से बराबर कोणों पर व्यवस्थित होते हैं। पक्षोक्त लक्षण आकृति १७ के दाहिने निचले कोने में चित्रित है।

शिलक-विधि ने हैम्बर्ग-अमेरिका लाइन के प्रथम अर्वाचीन स्टीमरों में अपना गुण दर्शाया; उसने अनुनाद के भय का निरसन कर दिया। परंतु यह सब है कि जहाज-निर्माण के कार्यों में उसका महत्त्व अल्पकालिक ही रहा, क्योंकि शीघ्र ही पिस्टन इंजनों के स्थान पर वरीवर्तों का व्यवहार होने जा रहा था और इनमें इतनी-गामी संहतियाँ नहीं होती। परंतु आज भी मोटर गाड़ियों तथा विमानों के इंजनों और सबमरीनों (जलामयनरवाहिनी नौकाओं या पनडुब्बियों) के दो-चक्र इंजनों में भी संहति-संतुलन महत्वशाली है।

योग में लेकर, प्राप्त होता है। आपेक्षिकीय यांत्रिकी के आधारीक समीकरण अब हमें बताते हैं कि बंद निकाय के लिए यह चतुःसदिश निश्चर रहता है। प्रसंगवश, एक गुणनखंड ($-ic$) और एक योगात्मक नियतांक के अतिरिक्त, उसका समय घटक गतिज ऊर्जा के बराबर है। इस प्रकार प्राप्त चार समाकल (सवेग और ऊर्जा का अविनाशित्व) समी० (24) में पद $11+1$ द्वारा अनुरूपित हैं। व्यंजन का द्वितीय पद धूर्णों के घनाने में एक समय दो अक्षों के संचय का परिणाम है। प्रकटतया, दो आकाशीय अक्षों का संचय साधारण विचार के कोणीय संवेग के समीकरण प्रदान करता है। दूसरी ओर, समय अक्ष और एक आकाशीय अक्ष के संचय से संहति-केंद्र की गति के द्वितीय समाकल प्राप्त होते हैं जो इस गति की ऋजुरेखीयता सूचित करते हैं। क्योंकि समी० (2.19) के अनुसार, यदि समस्त संहति-विंदुओं को योग में सम्मिलित करता पृष्ठ ९५ की भाँति एक ऊपरी रेखा द्वारा सूचित करें और प्रारम्भ से ही $(1-\beta_2)^{1/2}$ के बजाय एक रख लें, तो निम्नलिखित, हिसाब लगता है—

$$x_1 p_1 - x_2 p_2 = ic(\overline{m_k x_k} - \overline{t m_k x_k}), \quad k=1,2,3.$$

कोणीय संवेगों के अविनाशित्व के सिद्धांत से यह राशि किसी नियतांक के बराबर होनी चाहिए जिसे हम icA_k कह सकते हैं। तो त्रिविमतीय सदिश संकेतन पद्धति में और $(3a,b)$ के संकेतनों के साथ प्राप्त करते हैं—

(25)

$$\mathbf{R} - t\mathbf{V} = \mathbf{A}.$$

\mathbf{V} और \mathbf{A} के निश्चर होते हुए इसका अर्थ यह है कि सचमुच ही संहति-केंद्र एक नियत चाल से ऋजुरेखा में चलता है। (24) की उत्पत्ति के स्पष्टीकरण के लिए ऊपर दिया विवरण पर्याप्त होना चाहिए,; चतुर्विमतीय संमिति ने उसे और भी स्पष्टता प्रदान कर दी है।

अंत में हम (21) और (22) के परिगणन के बारे में खगोल विद्या के क्षेत्र से संबंधित एक टिप्पणी करना चाहते हैं। विख्यात त्रिपिंड समस्या के पूर्णतया समाकलन के लिए, अर्थात् उसके 3×3 निर्देशांकों और 3×3 वेग-घटकों के निर्धारण के लिए

(26)

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

प्रथम समाकलों की आवश्यकता होगी। इनमें का प्रत्येक, जैसा कि (25) में उदाहृत है, स्थान और वेग के निर्देशांकों के बीच एक-एक संबंध देगा जिनके लिए अब एक समाकलनांक चाहिए। परंतु (26) की (21) से तुलना करने पर ज्ञात होता है कि पूर्ण समाकलन के लिए आठ समाकलों की कमी है। इससे भी बढ़कर और हमने

अतिरिक्त, लाग्रान्ज^१ से लेकर प्वांकारे^२ तक बड़े-से-बड़े गणितज्ञों के घोर प्रयत्नों ने दिखलाया है कि तिरोहित समाकल किसी बीजीय रूप (algebraic form) में अप्राप्य हैं। इसका निश्चायक प्रमाण ब्रुंज^३ ने दिया था।

इसी प्रकार का परिगणन द्विपिंड-समस्या के लिए, जो स्वभावतः समनलीन (प्लेन) ही हो सकती है, केवलमात्र

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

और न कि $2 \times 3 \times 3 = 18$ समाकलनाक, पूर्ण समाकलन के लिए माँगता है। इस प्रकार, समीकरण (22) के अनुसार सभी द्वि-विमितीय समस्याओं के लिए प्रत्येक स्थिति में प्राप्य नियतांकों से केवल दो अधिक नियतांकों की आवश्यकता है। और वास्तव में प्रस्तुत स्थिति में ये दो समाकल, अपने अनुरूप, स्वेच्छ नियतांकों के साथ, मिल सकते हैं जैसा कि समीकरणों (6.4) से (6.5) के सक्रमण से विदित है। अतएव द्विपिंड समस्या बिलकुल ठीक-ठीक हल की जा सकती है; त्रिपिंड समस्या साधारणतया असाध्य है, यद्यपि वह भी एकमात्र वैदलेपिक सन्निकटन विधियों द्वारा हल की जा सकती है। गति के प्रकारों के बारे में अत्यन्त विशिष्ट बातें मान कर ही § 32 में त्रिपिंड समस्या का समाधान बद रूप में पा सकेगे।

§ १४. घर्षण के नियम

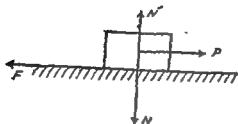
जैसा कि पहले भी, प्रकरण ११, उपप्रक० ४ में, जोर देकर कह आये हैं, किसी किसी निर्दिष्ट प्रक्षेप-पथ पर एक सहति की गति नियंत्रित करने में प्रतिक्रिया के एक ऐसे घटक का पथ की दिशा में प्रवेश होता है जो यांत्रिकी के व्यापक सिद्धांतों से नहीं जाना जा सकता, वरन् जिसे प्रायोगिकतया ही निर्धारित करना पड़ता है। किन्हीं अन्य अनुसंधानकों के कुछ प्रारंभिक कार्य के अतिरिक्त, यह निर्धारण पहले पहल १७८५ में चार्ल्स ए० कूलम^४ के सुप्रसिद्ध, और उस समय के लिए बहुत ही ठीक, प्रयोगों द्वारा किया गया था; स्मरण रहे कि ये वही कूलम हैं, जिनका नाम सदा के लिए वैद्युत-स्थैतिकी तथा चुंबक-स्थैतिकी के आधारिक नियमों के साथ संबंधित रहेगा।

कूलम की भाँति हम भी घर्षण के दो भेद करेंगे—

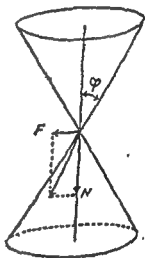
- (क) स्थैतिक घर्षण और
- (ख) गत्यात्मक या सर्पी घर्षण।

(१) स्थैतिक घर्षण

किसी क्षैतिज आधार पर रखे हुए एक पिंड पर विचार करिए (आ० १९)। यदि हम पिंड पर आधार के समांतर एक धीरे-धीरे बढ़ता हुआ कर्षण बल P लगाएँ तो पहले तो किसी गति का प्रादुर्भाव न होगा। अतएव हमें मान लेना पड़ेगा कि एक घर्षण बल F , कर्षण बल P को संतुलित करता होगा। परंतु यदि P एक सुनिश्चित सीमा से अधिक हो तो त्वरण होने लगता है।



आ० १९—समतल आधार पर स्थैतिक घर्षण।



आ० २०—घर्षण कोण और घर्षण शक्ति की रचना।

यह सीमा F_{max} (महत्तम), कूलम (तथा उनके पूर्वगामियों) के अनुसार उस अभिलंब दाव N के समानुपाती है जो, किसी क्षैतिज आधार पर विराम की दशा में स्थित पिंड के भार G के ठीक बराबर है। अतएव

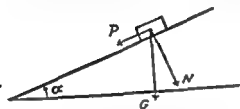
$$(I) \quad F_{max} = \mu_0 N.$$

यह μ_0 स्थैतिक घर्षण का गुणांक है। दोनों रपसी पदार्थों की प्रकृति और उनके रपसी पृष्ठों की दशा पर वह निर्भर करता है। यदि दोनों पदार्थ एक ही हों तो μ_0 विशेषतया बड़ा (अन्तरप्रवेस) होता है।

समीकरण—

$$(2) \quad \mu_0 = \tan \phi \quad (\text{स्पज्या } \phi)$$

के द्वारा एक कोण ϕ का प्रवेग करा सकते हैं जो कि एक "घर्पण के शकु (अप्रेजी कोन)" का शीघ्र कोण समझा जा सकता है (दे० आ० २०)। जब तक दो बलों F

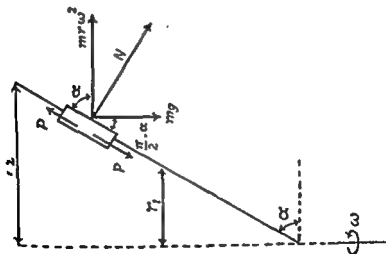


और N का परिणामी शकु के भीतर पड़ता है, गति का प्रादुर्भाव नहीं हो सकता। गति का प्रादुर्भाव तभी होगा जब कि परिणामी शकु के पृष्ठ पर या उसके बाहर पड़ेगा।

आ० २१—नत समतल पर साम्यावस्था।

घर्पण-कोण का अतर्निहित अर्थ नत समतल (आ० २१) के प्रयोगों में प्रदर्शित है, जिनका प्रारम्भ गलिलियो ने किया था। बिना किसी विशेष व्याख्या के हम लिख डालते हैं कि—

$$N = G \cos \alpha, \quad P = G \sin \alpha = -F.$$



आ० २२—चलनशील आस्तीन या दाना एक तिर्छ घूर्णक दंड पर। घर्पण के अधीन साम्यावस्था।

अतएव अब

$$F < F_{\max} = \mu_0 N = N \tan \phi$$

इन समीकरणों से विराम का प्रतिबंध प्राप्त करते हैं कि—

$$G \sin \alpha < \tan \phi \cos \alpha \cdot G,$$

इस कारण

$$\tan \alpha < \tan \phi$$

या

$$\alpha < \phi.$$

नत समतल पर पिंड तभी तक विराम दशा में रहता है जब तक कि $\alpha < \phi$. अतएव घर्षण-कोण ϕ किसी समतल की यह नति है जिस पर स्खलन या सर्पण (sliding) प्रारंभ हो जाय।

निम्नलिखित कुछ कम महत्त्व का उदाहरण है। एक तिरछी भुजा एक ऊर्ध्वाधर धुरी पर $\frac{\pi}{2} - \alpha$ से कम कोण पर लगायी हुई है। इस भुजा पर एक चलनशील आस्तीन या दाना होता है (दे० आ० २२)। जब धुरी घूम न रही हो तब दाना विरामदशा में होगा या गतिशील, यह इस पर निर्भर करेगा कि $\alpha < \phi$ या $\alpha > \phi$. अब यदि धुरी को घुमाने लगे तो अपकेंद्र बल $m r \omega^2$ सदिश तथा गुरुत्व बल mg से जुड़ा जाता है। इन दोनों बलों से निकला हुआ अभिलंब बल N और गति-नियंत्रक बल पर आरोपित कर्षण बल, P , इन दोनों के मान, आकृति से प्रकट है निम्नलिखित होंगे—

$$N = m (g \cos \alpha + r \omega^2 \sin \alpha),$$

$$P = \pm m (g \sin \alpha - r \omega^2 \cos \alpha).$$

P के सामने के दोहरे चिह्न का आशय यह है कि कर्षण चाहे नीचे की ओर हो चाहे ऊपर की ओर, उसे घनात्मक ही मानेंगे ताकि वह विचार में लिया जा सके, दाने का स्खलन ऊपर हो या नीचे।

(1) और (2) से दाना साम्यावस्था में होगा यदि

$$\pm (g \sin \alpha - r \omega^2 \cos \alpha) < \tan \phi (g \cos \alpha + r \omega^2 \sin \alpha)$$

अब < चिह्न को = चिह्न द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं और इस प्रकार "बल स्खलन

होने ही वाला है" इसका प्रतिबंध अर्थात् साम्यावस्था की सीमा प्राप्त करते हैं। त्रिकोण-मितीय रूपांतरण द्वारा हम \pm को दो स्थितियों के लिए जलग-अलग हिसाब लगावेंगे।

चिह्न	स्खलन दिशा	हिसाब
+	नीचे की	$g \sin(\alpha + \phi) = r_2 \omega^2 \cos(\alpha + \phi)$
-	ऊपर की	$g \sin(\alpha - \phi) = r_1 \omega^2 \cos(\alpha - \phi)$

या, दोनों को एक साथ मिला कर,

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{g}{\omega^2} \tan(\alpha \mp \phi).$$

इस प्रकार घर्पण-बल के कारण r के लिए दो अंतर

$$r_1 < r < r_2$$

निकलते हैं जिनके बीच दाना साम्यावस्था में होगा।

यदि $\alpha > \phi$ (दाने का नीचे की ओर स्खलन जब कि $\omega \rightarrow 0$), दोनों r , धनात्मक होंगे; जितना ही कम ω होगा उतना ही अधिक अंतर उनके बीच होगा। यदि $\alpha < \phi$ ($\omega \rightarrow 0$ के लिए, स्थातिक घर्पण के अधीन दाना साम्यावस्था में होगा), तो $r_1 = 0$ (समीकरण के अनुसार ऋणात्मक भी) और केवल r_2 ही धनात्मक होगा; ω के बढ़ने से, r_2 भी शून्य के पास पहुँचता है।

(२) सर्पी या स्खलनिक घर्पण

यहाँ जो घर्पण नियम लागू है वह है

$$(4) \quad F = \mu N$$

सर्पी घर्पण का गुणांक μ (म्यू) स्थूलतया वेग से स्वतंत्र* है और, μ_0 की भाँति, एक नियतांक है जो दोनों पदार्थों की प्रकृति और उनके पृष्ठतलों की दशाओं पर निर्भर करता है। यह सार्वभौम रूप से सच है कि—

$$(5) \quad \mu < \mu_0$$

जिस पथ पर पिंड का स्खलन हो रहा हो, यदि वह (पथ) ऋजुरेखीय हो तो N गुरुत्वबल (या पथ के लंबवत् उसके घटक) के बराबर होगा। यदि पथ वक्र हुआ, तो समी० (II.15) के अनुसार अपकेन्द्र बल का प्रभाव हमें जोड़ देना होगा।

* रेलगाड़ियों के चलने का अनुभव (पहिये और व्हेक झू के बीच सर्पी घर्पण) जतलाता है कि बड़े वेगों v पर गुणनखंड μ एकवदिशतया बढ़ते v पर कम होता जाता है।

समी० (5) को एक वड़े ही आदिम प्रयोग द्वारा प्रदर्शित कराते हैं, परंतु उसका परिणाम बहुत आश्चर्यजनक निकलता है। अपने दायें और बायें हाथों की तर्जनीय एक-दूसरी से थोड़ी दूर रखकर, उन पर एक चिकना बेत या चिकनी छड़ी रखिए। आकृति ११ क से बलों का वितरण निम्नलिखित होगा—

$$A = \frac{b}{a+b} G; \quad B = \frac{a}{a+b} G.$$

अब उँगलियों को पास-पास लाइए। स्खलन पारी-पारी से दायी और बायी उँगली पर होता है; अंत में उँगलियाँ मिल जाती हैं। तो छड़ी पर वे कहाँ मिलती हैं?

समझिए कि आदि में $A > B$, अतएव स्खलन B से प्रारंभ होगा। B बायी उँगली तभी तक गतिशील नहीं रहती जब तक कि $a=b$ हो जाय, वरन् स्थान $b_1 < a$ तक स्खलित होती रहेगी, जहाँ B सर्पी घर्षण A के स्थैतिक घर्षण के बराबर होगा। व्यापकतया प्राप्त होगा कि—

$$F_{B,sl} = \mu_o \frac{G}{a+b}, \quad F_{A,sl} = \mu_o b \frac{G}{a+b}.$$

इन दोनों पदपुंजों को $b=b_1$ के लिए बराबर रखने से प्राप्त होता है

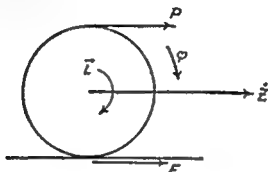
$$\mu a = \mu_o b_1, \quad \frac{a}{b_1} = \frac{\mu_o}{\mu} > 1.$$

इस क्षण, छड़ी A पर चलने लगेगी। तुरंत ही घर्षण $F_{A,sl}$ गिर कर $F_{A,sl} < F_{A,st}$ हो जायगा, जिस कारण b_1 , में घर्षण $F_{B,sl}$ A पर के घर्षण से बढ़ जाता है; अर्थात् B ठहर जाता है और $F_{B,sl}$ बदल कर $F_{B,st}$ हो जाता है।

प्रत्येक आवर्तन स्थान पर यह प्रक्रिया बदलती रहेगी। इससे A और B छड़ी के संहति-केंद्र (जहाँ $a=b=0$) के पास गुणोत्तर श्रेणी में आवेंगे (क्योंकि भागफल $\frac{\mu_o}{\mu}$ प्रत्येक बार आता है)। अंतिम अवस्था में छड़ी मिली हुई उँगलियों पर साम्यावस्था में संतुलित रहेगी।

अब हम फिर स्थैतिक घर्षण को लौटते हैं जो विशुद्ध लुंठन में निदचपात्मक भाग लेता है। यह बात विरोधामासी भले ही जान पड़े, परंतु स्थैतिक घर्षण ही रेलगाड़ी को आगे बढ़ाता है। (यही बात मोटर कार पर लागू है और इसी प्रकार किमलन वाली भूमि पर पैदल चलने वाला भी स्थैतिक घर्षण द्वारा अपने आपको आगे बढ़ाता

है। भाप-दाव एक आन्तरिक बल है और बँगा होने के कारण गाडी के गति-पेंद्र को कदापि आगे नहीं चला सकता। आगे बढ़ाने के लिए एक बाह्य बल की आवश्यकता होती है। यह बाह्य बल रेल की पटरी और पहिये के बीच की प्रतिक्रिया है आगे केवल मात्र स्थैतिक घर्पण।



आकृति २३—पहिये और पटरी के बीच की प्रतिक्रिया। विशुद्ध लुटन के लिए स्थैतिक घर्पण से ही रेलगाडी को आगे चलने का बल मिलता है।

रेल के इंजन के चलते हुए पहिये पर विचार कीजिए (आ० २३)। एक संयुक्त दंड की सहायता से इंजन पहिये को ऐंठ L संचारित करता है। उसका प्राथमिक काम पहिये को एक धूर्णनिक स्वरण प्रदान करना है। यह समी० (II.10) के विशुद्ध लुटन के प्रतिबध

$$(6) \quad \dot{z} = r\omega$$

से असगत है।

मान लीजिए कि रेलगाडी की संहति प्रतिकार्य प्रवर्तित पहिया M है; गति का प्रतिरोध R है (वायु का प्रतिरोध, धुराधारों में घर्पणीय ह्रास, इत्यादि); पहिये का अवस्थितिरत्व धूर्ण I है, और स्थैतिक घर्पण बल F है। तो गति के समीकरण निम्नलिखित हो जाते हैं—

$$(7) \quad M \ddot{z} = F - R;$$

$$I \dot{\phi} = L - Fr,$$

स्थैतिक घर्पण F पहले से ही नहीं निर्धारित किया जा सकता; परन्तु उक्त समीकरणों द्वारा वह निम्नलिखित प्रकार से निकाला जा सकता है। पहले F का निरसन, (7) के तुल्यात्मक निम्नलिखित समीकरणों से करिए—

$$(8) \quad M \ddot{z} = F - R$$

$$M_{red} \ddot{z} = P - F$$

P परिमायी बल है जो ऐठ L के संगत है; और M_{red} (11.8) की भाँति, लघु-कृत (रेड्यूस्ड) सहति है जो अवस्थितित्व घूर्ण I के संगत है, अर्थात्

$$L = P_r, \quad I = M_{red} r^2.$$

हम (8) से प्राप्त करते हैं—

$$(9) \quad (M + M_{red}) \ddot{z} = P - R$$

और, (8) के प्रथम समीकरण के प्रभाव से

$$(10) \quad F = R + \frac{M}{M + M_{red}} (P - R) = \frac{MP + M_{red}R}{M + M_{red}}$$

दालाँवर के सिद्धांत से समी० (9) सीधे ही मिल जाता। प्रथम समी० (8) में हमारे इस निश्चित कथन का मात्रात्मक प्रमाण सन्निहित है कि रेलगाड़ी की क्रिया में स्थैतिक घर्षण F ही चालन बल है। क्योंकि एक-समान गति के लिए वह $R = F$ प्रदान करता है। और, जैसा कि द्वितीय समीकरण (8) दर्शाता है, भाप-दाब से परिणामित परिमायी बल P का केवलमात्र कार्य पटरियों पर काम करने वाले स्थैतिक बल का प्रादुर्भाव कराना है।

इस बात का एक अन्य प्रमाण यह है कि जैसे-जैसे रेलगाड़ियाँ अधिकाधिक शीघ्र-गामी होती गयी हैं या उनमें ले जाने वाले माल का बोझ बढ़ा है, वैसे ही वैसे इन भी अधिकाधिक भारी होते गये हैं। यह परिस्थिति सीधे कूलम के घर्षण नियम, समीकरण (1), की ओर लक्ष्य करती है जो कहता है कि प्राप्य स्थैतिक घर्षण की सीमा अभिलंब दाब N की समानुपाती है। यदि पटरियाँ बहुत चिकनी हो जायें (बरफ के कारण किवा, उदाहरणतः, देशान्तरगामी झिनगो के कुचल जाने से उत्पन्न स्नेह के कारण) तो स्थैतिक घर्षण के असफल होने और फिसलने से हो जाने वाली सुपरिचिंत घात समी० (1) के दूसरे गुणनखंड (समानुपातीयता गुणनखंड) μ_0 को हल करती है जो, जैसा कि जोर देकर कहा जा चुका है, पटरियों के पृष्ठ-तल की दशा पर निर्भर करता है। जब पटरियाँ बहुत अधिक चिकनी हो जाती हैं तब गुणनखंड μ_0 को कृत्रिमतया बढ़ाना पड़ता है। बालू डाल कर ऐसा किया जाता है।

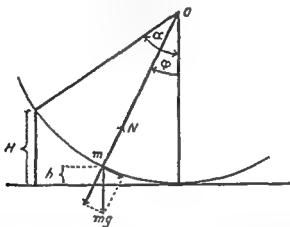
तृतीय अध्याय

दोलन समस्याएँ

आगे दो हुई बातें यांत्रिकी के सिद्धांतों के बारे में हमें कोई नयी चीज नहीं बतानी पड़ेगी। परंतु भौतिकी तथा इंजीनियरी में दोलन की प्रक्रियाओं का इतना अधिक महत्त्व है कि उनका पृथक् रूप से systematic विवेचन हम आवश्यक समझते हैं।

§ १५. सरल लोलक

दोलायमान पिंड एक कण है जिसकी सहति m है और जो l दैर्घ्य के एक भारहीन दृढ़ बंड द्वारा एक स्थिर बिंदु O से लगाया हुआ है। हम अवलवन-बिंदु पर के तथा



आकृति २४—सरल लोलक। गति की दिशा की ओर गुरुत्व का घटक।

वायु के घर्षण की उपेक्षा कर सकते हैं, अतएव जो बल यहाँ काम करता है वह केवल गुरुत्व है जिसका घटक, बढ़ते हुए ϕ की दिशा में, $-mg \sin \phi$ है (देखिए आ० २४)। किसी भी पथ पर नियंत्रित गति का व्यापक समीकरण (II.14), $v = l\dot{\phi}$ (वृत्तीय पथ) के लिए, निम्नलिखित यथार्थ समीकरण प्रदान करता है—

$$(1) \quad ml \frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg \sin \phi$$

पर्याप्त छोटे दोलनों के लिए, $\phi \ll 1$, हम $\sin \phi$ के स्थान पर ϕ रख सकते हैं। स्पष्ट करने पर

$$(2) \quad \frac{g}{l} = \omega^2$$

के साथ, अब हम निम्नलिखित रैखिक लोलक समीकरण^१ प्राप्त करते हैं

$$(3) \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0$$

यह “सरलावर्त दोलनों” का अवकल समीकरण है जैसा कि § ३ (४) में विवक्षित किया गया था। परतत्र चर राशि के नाम के अतिरिक्त, यह समीकरण (3.23) से सर्वसम है। समीकरण (3.22) में परिभाषित वृत्तीय आवृत्ति ω अब ऊपर के समीकरण (2) द्वारा प्रदत्त है। अतएव हम प्राप्त करते हैं

$$(4) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

आप देखेंगे कि T (आवर्त काल) सहित l से स्वतंत्र है। वास्तव में l तो (1) में से ही निकल गया था। अतएव यदि लोलक-दैर्घ्य वही, l , रहे तो विभिन्न सहितों (iii) का आवर्तकाल वही होगा। T पूर्ण आवर्तकाल है अर्थात् इधर से उधर उधर से इधर, पूरे एक झूलन का समय। कभी-कभी, इससे आधे समय को दोलन-काल या दोलन-समय कहते हैं। इस प्रकार एक “एक सेकंडी लोलक” होता है जिसके लिए $\frac{1}{2}T$ एक सेकंड के बराबर होता है। उसका दैर्घ्य (4) से यह निकलता है

$$l = \frac{g}{\pi^2} \approx 1 \text{ मीटर}$$

जहाँ तक समी० (3) वैध है वहाँ तक आवर्त काल झूलन के आग्राम से भी स्वतंत्र है, अर्थात् छोटे-छोटे लोलक-दोलनवृंद तुल्यकालिक होते हैं।

समी० (3) के व्यापक समाधान का रूप निम्नलिखित है—

$$\phi = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

यदि कह दे कि $\phi = 0$ जब $t = 0$, और $\phi = \alpha$ जब $t = \frac{T}{4}$, तो $b = 0$ और $a = \alpha$

रखना पड़ेगा। अतएव

$$(5) \quad \phi = \alpha \sin \omega t.$$

इस प्रकार α हुआ ϕ का आयाम, अर्थात् कोण के मापक (रेडियन) में मापित, कोण का महत्तम विस्थापन।

परिमित आयाम के लिए तुल्यकालिकता नष्ट हो जाती है क्योंकि गमी० (1) अरैथिक् है और इन स्थिति में वही लागू है। (1) का समाकलन करने के लिए उसके दाये और बाये दोनों पार्श्वों को $\frac{d\phi}{dt}$ से गुणा कर दीजिए। ऐसा करना गति-समीकरण से ऊर्जा-समीकरण को जानने के समान है। इसका समाकलन प्रदान करता है

$$(6) \quad \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 \cos \phi + C.$$

C इस प्रतिबंध से निर्धारित किया जाता है कि $\phi = \alpha$ के लिए $\frac{d\phi}{dt} = 0$, अर्थात्

$$C = -2\omega^2 \cos \alpha$$

एकांतरतया, हम सीधे ऊर्जा समीकरण से प्रारंभ कर सकते हैं। आकृति २४ में प्रदर्शित H का आदाय लेकर हम प्राप्त करते हैं—

$$(6a) \quad \frac{m}{2} l^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + mgh = mgH$$

$$\text{जहाँ } \begin{cases} h = l(1 - \cos \phi) \\ H = l(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

जो प्रकटतया (6) से सर्वसम है।

अब निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए

$$\cos \phi - \cos \alpha = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right);$$

इसको (6) में प्रतिस्थापित करे तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(7) \quad \frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \omega dt$$

या

$$(8) \quad \int_0^{\frac{\phi}{2}} \frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \omega t.$$

इस प्रकार एक प्रथम प्रकार के दीर्घवृत्तीय समाकल पर पहुँचते हैं। इस नाम को समझने के लिए हमें प्रसंगवश "दीर्घवृत्त के चापकलन" अर्थात् किसी दीर्घवृत्त के चाप की लंबाई की नाप के बारे में कहना होगा। इसके लिए दीर्घवृत्त के समीकरण का निम्नलिखित परामितीय रूप व्यवहार में लावेंगे—

$$\begin{cases} x = a \sin v \\ y = b \cos v \end{cases}$$

इससे निकलता है

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) dv^2,$$

$$ds = [a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 v]^{\frac{1}{2}} dv.$$

अब रखते हैं,

$$k^2 = + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (< 1 \text{ यदि } a > b),$$

और इस प्रकार दीर्घवृत्त के लघु अक्ष के अंत-बिंदु $v=0$ से दीर्घवृत्त के किसी भी बिंदु v तक के चाप के दीर्घ्य के लिए प्राप्त करते हैं।

$$(9) \quad s = a \int_0^v \left(1 - k^2 \sin^2 v \right)^{\frac{1}{2}} dv.$$

यह एक द्वितीय प्रकार का दीर्घवृत्तीय समाकल है।

फलनवाद^१ के दृष्टिकोण से प्रथम प्रकार का शीघ्रवृत्तीय समाकल^२ द्वितीय प्रकार में सरलतर है। "लेजाइ मानक रूप" में यह है

$$\int_0^v \frac{dv}{\left(1 - k^2 \sin^2 v\right)^{\frac{1}{2}}}$$

अपना समाकल (८) हम इस रूप में निम्नलिखित रूपांतरण द्वारा कर देंगे—

$$\sin \frac{\phi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin v.$$

तो प्राप्त करते हैं

$$(10) \quad \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos v,$$

$$\frac{d \frac{\phi}{2}}{\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)} = \frac{dv}{\cos \frac{\phi}{2}} = \frac{dv}{\left(1 - k^2 \sin^2 v \right)^{\frac{1}{2}}},$$

जहाँ "मापाक"^३ k निम्नलिखित के लिए है—

$$(11) \quad k = \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

यदि आवर्तकाल T ज्ञात करना है तो समी० (८) में

$$t = \frac{T}{4}, \text{ और } \phi = \alpha$$

रखना पड़ेगा। अतएव, (10) के अनुसार, $v = \frac{\pi}{2}$. यह तथोक्त "प्रथम प्रकार का पूर्ण समाकल" प्रदान करता है जो अक्षर K द्वारा सूचित किया जाता है। अतएव

$$(12) \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\left(1 - k^2 \sin^2 v \right)^{\frac{1}{2}}}$$

अब (२) द्वारा ω निश्चित है, तो (८) में आवर्तकाल के लिए

$$(13) \quad T = 4K \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

प्राप्त होता है। अब (12) से सीधे ही पढ़ा जा सकता है कि—

$$K = \frac{\pi}{2}, \text{ यदि } k \rightarrow 0, \text{ जो कि (11) के अनुसार}$$

अतीव लघु आयामों α के लिए है।

$$K = \infty \text{ यदि } k \rightarrow 1, \text{ जो कि (11) के अनुसार } \alpha = \pi$$

अर्थात् ठीक ऊपर 180° के झूलन के लिए है।

प्रथम स्थिति में, जैसी कि प्रत्याशा की जा सकती है, पुराना व्यंजक (4) प्राप्त होता है। द्वितीय स्थिति में इस व्यंजक से विचलन एक चरम सीमा पर पहुँचता है।

व्यापकतया, एक द्विपदीय विस्तार और (12) का पद-प्रति-पद समाकलन निम्नलिखित मान पर पहुँचाता है—

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right)$$

तदनुसार T के लिए निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$(14) \quad T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right)$$

जो कि परिमित-विक्षेप¹ के लिए तुल्य-कालिकता² से विचलन मानात्मक प्रकार देता है।

खगोल निरीक्षण संबंधी बड़ी घड़ियों का लोलक सरल ढग से बना होता है जिसका $\alpha \leq 1\frac{1}{2}^\circ$ आयाम उनके लिए (14) के कोष्टक में दिया हुआ प्रथम संशोधन-पद³ लगभग २०,००० में एक के बराबर होता है।

§ १६. यौगिक लोलक

यह प्रश्न वस्तुतः एक दृढ़ पिंड के किसी स्थिर अक्ष के प्रति घूर्णन का है जो कि §११ के उप प्र० १, में पहले ही दिया जा चुका है; उसमें और प्रस्तुत प्रश्न में भेद केवल इतना ही है कि यहाँ विशिष्टतया कह दिया जाता है कि बाह्य बल गुरुत्वाकर्षण⁴ है। समझिए कि स्थिर अक्ष O (आकृति २५) से गुरुत्व केंद्र G की दूरी s है। (यहाँ “गुरुत्व-केंद्र” पद का जान-बूझकर व्यवहार किया गया है यद्यपि 3.12 में वृत्त-संहति-केंद्र में सपाती है।) यह भी समझिए कि जो कोण अजुरेला OG ऊपर

से बनाती है वह ϕ है। संहति के वैयक्तिक अल्पांगो dm पर आरोपित गुरुत्वीय बलों का संपूर्ण घणं L प्रकटतया निम्नलिखित होगा—

$$(1) \quad L = -mgs \sin \phi$$

यहाँ m सारी संहति है। तो (11.4) में गति-समीकरण निम्नलिखित हुआ

$$(2) \quad I\ddot{\phi} = -mgs \sin \phi$$

सरल लोलक के गति-समीकरण (15.1) में उसके तुलना बताती है कि एक तुल्यात्मक सरल लोलक, अर्थात् ऐसा सरल लोलक जिसका दोलन-काल यही हो जो प्रस्तुत योगिक लोलक का, उसकी लंबाई l निम्नलिखित होगी

$$(3) \quad l = \frac{I}{ms}$$

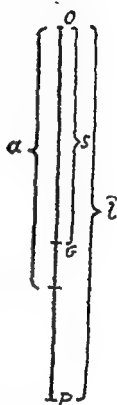
अब I को तथोक्त घूर्णन-त्रिज्या a द्वारा प्रतिस्थापित करिए। घूर्णन-त्रिज्या की परिभाषा यह है कि—

$$(4) \quad I = ma^2$$

मतलब यह कि घूर्णन-त्रिज्या लोलक के अवलंबन-बिंदु O से वह दूरी है जहाँ सारी संहति का एकत्रीकरण करना होगा ताकि वास्तविक संहतिवितरण का अवस्थितित्वपूर्ण प्राप्त हो जाय। ध्यान रहे कि (11.8) में दूरी r के लिए एक ऐसी “लघुकृत संहति” का उपयोग किया गया था जहाँ कि आदि में अज्ञात संहति M_{red} रखी जाने को थी; इसके विपरीत यहाँ संहति m दी हुई है और ऐसी दूरी a मालूम करना है जहाँ यह संहति रखी जाय।

(3) और (4) की तुलना दिखाती है कि a है s और l का गुणोत्तर माध्य¹ अर्थात्

$$(5) \quad a^2 = ls$$



आ० २५—योगिक लोलक

अवलंबन-बिंदु O ; गुरुत्व-केंद्र, G ;
दोलन केंद्र, P , तुल्यात्मक लोलक दीर्घ्य,
 $OP = l$; गुरुत्व केंद्र की दूरी, $OG = s$;
घूर्णन-त्रिज्या, $OR = a$ यह a है, और
 l का गुणोत्तर मध्यमान।

अब आइए तुल्यात्मक लोलक दैर्घ्य l को O से यौगिक लोलक की मध्यरेखा OG पर लगावे। इस प्रकार प्राप्त बिंदु P दोलन-केंद्र कहलाता है (Huygens)। आ० २५ में O , G और P के आपेक्षिक स्थान दिखलाये गये हैं। इस आर्ति से हम s , a और l के अतः संबंधों का चित्रण भी कर सकते हैं।

अब हम निश्चयपूर्वक कहते हैं कि O और P के कार्य विनिमयशील हैं। यहाँ तक O अवलंबन-बिंदु रहा है, P दोलन-केंद्र। अब हम P को अवलंबन-बिंदु मानें और दिखावेंगे कि O दोलन-केंद्र हो जाता है। 'उत्क्रमणीय' लोलक का मौलिक भाव यही है।

नीचे दी हुई सारणी में अवतक आये हुए संकेत दिये गये हैं; आनेवाली बातों के संकेतों को देकर सूची पूर्ण कर दी गयी है।

अवलंबन बिन्दु	दोलन केंद्र	तुल्यात्मक लोलक-दैर्घ्य	अवस्थितित्व घूर्ण	घूर्णन त्रिज्या	संहति केंद्र की दूरी
O	P	l	I	a	s
P	O'	l_p	I_p	a_p	$l-s$

हमारा निश्चित कथन है कि

$$l_p = l \text{ अर्थात् } O' = O$$

प्रमाण—समीकरणों (3) और (4) का संगत नवीन संकेतों में पुनर्लेखन कर उनसे l_p निकालिए तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(6) \quad l_p = \frac{I_p}{m(l-s)} \leq \frac{a_p^2}{l-s}$$

अब इस प्रकरण की शेषपूर्ति के समी० (10) के अनुसार,

$$(6a) \quad a_p^2 = l(l-s)$$

इस कारण (6) का अंतिम अंग सत्य ही l के बराबर है।

पृथ्वीतल पर या उससे नीचे के भिन्न-भिन्न स्थानों पर गुरुत्वीय त्वरण g के निर्धारण के लिए लोलक का उपयोग किया जाता है। चूँकि व्यवहार में सरल लोलक अप्राप्य है और चूँकि यौगिक लोलक के परिकलनों में आया हुआ अवस्थितित्व घूर्ण I यथातथ नहीं जाना जा सकता (न केवल लोलक के मोलक के पेचीदा रूप के कारण

वरन् उसकी आंतरिक असमांगताओं के कारण भी), इसलिए उत्क्रमणीय लोलक द्वारा प्रयोगात्मक विधि में तुल्यात्मक लोलक-दैर्घ्य का निर्धारण करना पड़ता है। हमें कल्पना करनी पड़ेगी कि आकृति २५ के लोलक में अवस्थित बिंदु के लिए दो छुरी की धारें लगी हैं, एक O पर और दूसरी P पर। दोनों धारें एक-दूसरी की ओर होनी चाहिए और दोनों की त्रिकोणीय काटे रेखाचित्र के तल में। P वाली छुरीधार एक सूक्ष्म-माना पेंच द्वारा ऊपर-नीचे की जा सकती है। प्रेक्षण के लिए पर्याप्त समय लेने में दालनों की संख्या यही यथार्थता से गिनी जा सकती है। इस प्रकार O और P के प्रति शोलन-कालों की समानता या असमानता अतीव याथातथ्य के साथ निर्धारित की जा सकती है और, यदि आवश्यकता हुई तो, सूक्ष्ममापी पेंच द्वारा मशोपित भी की जा सकती है।

उत्क्रमणीय लोलक का सिद्धांत भौतिकी की सभी शाखाओं में बार-बार आने वाले एक बहुव्यापक पारस्परिकता सवध के एक प्रकार का प्रथम उदाहरण है। इस भाँति का एक अन्य उदाहरण ध्वनिकी^१ और वैद्युत स्थितिकी में उद्गम बिंदु और क्षेत्र बिंदु की विनिमयशीलता है।

शेपपूर्ति—अवस्थितित्व-घूर्णन संबंधी एक कायदा

हमारे सामने समांतर अक्षों का नियम है, जो कहता है कि III संहति वाले पिंड का किसी भी बिंदु O से जाते हुए अक्ष के प्रति अवस्थितित्व घूर्णन पिंड के संहति केन्द्र G से जाते हुए उक्त अक्ष के समांतर अक्ष के प्रति के अवस्थितित्व घूर्णन और III^s के योग के बराबर है जहाँ s दिये हुए अक्ष और G के बीच की दूरी है।

यदि दिये हुए अक्ष की दिशा y है तथा O से G की दिशा x है तो O से जाते हुए अक्ष में किसी संहति अल्पांश dm की दूरी r निम्नलिखित होगी—

$$r^2 = x^2 + z^2.$$

यहाँ x बिंदु O से मापा गया है। इसके बजाय यदि x बिंदु G से नापा जाय और यदि, आ० २५ की भाँति, $OG = s$, तो

$$r^2 = (x+s)^2 + z^2 = x^2 + z^2 + 2xs + s^2$$

होगा। यदि सब dm ओ को योग में ले लें तो परिणाम निकलता है कि—

$$(7) \quad I = I_G + 2s \int x dm + ms^2.$$

बीच का पद शून्य हो जाता है [मिलाइए, उदाहरणार्थ, समी० (13.3b)] वस्तुें कि समतल $x=0$ संहति-केन्द्र से होकर जाता हो। यदि ऐसी स्थिति हुई तो

$$(8) \quad I = I_G + ms^2$$

जैसा कि ऊपर निश्चयपूर्वक कहा था ।

तदनुसार आ० २५ से प्राप्त करते हैं कि—

$$(8a) \quad I_p = I_G + m(l-s)^2$$

परन्तु (8) और (8a) से

$$I_p - I = ml^2 - 2mls,$$

जो कि, (4) के विचार से, निम्नलिखित प्रकार लिखा जा सकता है—

$$(9) \quad a^2_p - a^2 = l^2 - 2ls;$$

या, (5) के विचार से,

$$(10) \quad a^2_p = l^2 - ls = l(l-s).$$

मह वह संघ है जिसका (6a) में उपयोग किया गया था ।

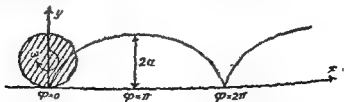
§ १७. वृत्तजातीय लोलक

यह लोलक त्रिदिव्यन हाइगिज की, जो दुनिया के चतुर्तम घड़ी-साब मने जाते हैं, ईजाद है । इस लोलक का तात्पर्य साधारण सरल लोलकों में तुल्यशक्ति की कमी का निरसन करना है । ऐसे संहति-बिंदु को वृत्तीय चाप के स्थावर पर वृत्तजातीय चाप पर चला कर किया गया था । आगे चलकर देखेंगे कि व्यवहार में इस प्रकार की गति कैसे प्राप्त की जा सकती है ।

साधारण वृत्तजात का परामितीय निरूपण निम्नलिखित होता है—

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a(\phi - \sin \phi) \\ y &= a(1 - \cos \phi). \end{aligned}$$

परामिति ϕ उतना कोण है जितना कि a त्रिज्या वाला एक पहिया क्षितिज x -अक्ष पर चलता हुआ अपने आदि के स्थान से घूमा है । पहिये की परिमा पर स्थित एक बिंदु साधारण वृत्तजात का जनन करता है ।



आ० २६—साधारण वृत्तजात का जनन, आगे चलते पहिये की परिमा पर स्थित बिंदु द्वारा । घूर्णन-कोण ϕ का अर्थनिर्देश ।

अपने लोलक के लिए ऐसे वृत्तजान की आवश्यकता है जिसके निम्नलिखित नीचे नहीं ऊपर की ओर हों (देखिए पृ० १२९ पर आ० २७)। ऐसे वृत्तजान का जलन पहिले के x -अक्ष के नीचे चलने में होता है। ऐसे वक्र का x तो वही है जो (1) में दिया है, परन्तु उसका y (1) में दिये y को $2a$ में घटाने से प्राप्त होगा है। तो अब

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= a(\phi - \sin \phi), \\ y &= a(1 + \cos \phi) \end{aligned}$$

प्रक्षेपण (प्रस्तुत स्थिति में वृत्तजात) की स्पष्ट रेखा की ओर का गुत्थ mg का घटक होगा

$$F_s = -mg \cos(y, s) = -mg \frac{dy}{ds}$$

व्यापक संबंध (II.14) इसलिए देता है

$$(3) \quad m\dot{v} = -mg \frac{dy}{ds},$$

जहाँ, ठीक वृत्तीय लोलक की भाँति, संहति m दायें बायें दोनों ओर से कट जाती है। (2) का अवकलन यह देता है—

$$\begin{aligned} dx &= a(1 - \cos \phi) d\phi, \quad dy = -a \sin \phi d\phi, \\ ds^2 &= a^2(2 - 2 \cos \phi) d\phi^2, \quad ds = 2a \sin \phi/2 d\phi \end{aligned}$$

इसलिए प्रस्तुत स्थिति में

$$(4) \quad v = \frac{ds}{dt} = 2a \sin \frac{\phi}{2} \frac{d\phi}{dt} = -4a \frac{d}{dt} \cos \frac{\phi}{2}$$

और

$$(5) \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \phi}{\cos \phi/2} = -\cos \frac{\phi}{2}$$

यदि (3) में (4) और (5) प्रतिस्थापित करें तो प्राप्त करते हैं

$$(6) \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos \frac{\phi}{2} = -\frac{g}{4a} \cos \frac{\phi}{2}.$$

यह समीकरण सरल लोलक के समीकरण (15.3) से केवल उस बात में भिन्न है कि परतत्र चर को अब ϕ के स्थान पर $\cos \frac{\phi}{2}$ कहते हैं। परन्तु इसका (6)

के समाकलन पर कोई परिणाम नहीं होता। अतएव पहले का समीकरण, (15.4) ज्यों का त्यों रहता है, अर्थात्

$$(7) \quad T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ केवल यहाँ } l = 4a,$$

क्योंकि (6) में पहले के l का स्थान $4a$ ने ले लिया है।

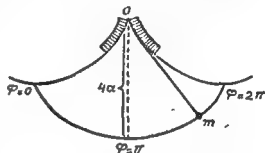
समी० (15.3) सरल लोलक के केवल छोटे-छोटे विस्थापनों का निरूपण करता था और यथार्थ संबंध (15.1) से एक सन्निकटन द्वारा प्राप्त किया गया था। दूसरी ओर, हमारे प्रस्तुत समीकरण (6) और उसके समाकलन से प्राप्त समी० (7) किसी भी आयाम के दोलनों के लिए बिल्कुल ठीक है। तो वृत्तजात लोलक निर्दोष-तया तुल्यकालिक हुआ। उसका आवर्तकाल दोलनों के आयाम से पूर्णतया स्वतंत्र है।*

जिस विधि का उपयोग किया गया है उसके बारे में देखते हैं कि (6) में हमारे कण की गति न तो कार्तीय निर्देशांकों द्वारा और न किसी ऐसी परामिति द्वारा निरूपित की गयी है जिसका वृत्तजातीय वक्र से कोई अति समीप का संबंध हो वह तो वक्रजात का जनन करने वाले पहिये के घूर्णन-कोण ϕ के अक्ष द्वारा ही निरूपित है।

परंतु हम देखते हैं कि यद्यपि इस परामिति का वृत्तजात से जरा दूर ही का संबंध है, फिर भी वह इस समस्या के पास पहुँचने की सरलतम विधि प्रदान करती है। उसका प्रवेश हमें पष्ठ अध्याय की उस व्यापक लाग्रान्ज विधि का पूर्वानुभव कराता है जो गति-समीकरणों में किसी भी (स्वेच्छ) परामिति का परतंत्र चरों की भाँति उपयोग कराने देती है।

* वृत्तजात को समकालवक्र भी कह सकते हैं (वृत्तजात पर किये दोलन-बुंद "परस्पर तुल्यकालिक" होते हैं)। उसे द्रुततम पात-वक्र भी कहते हैं (क्योंकि वह इस प्रश्न का उत्तर देता है कि "नियत गुरुत्वाकर्षणीय बल आरोपित संहति बौल से वक्र पर स्थलित हो ताकि दिये हुए दो अंत-बिन्दुओं के बीच की दूरी तँ करने के लिए वह लघुतम-संभव समय ले?" निकलता यह है कि दोनों बिंदुओं को मिलाने वाली ऋजुरेखा या अन्य किसी वक्र की अपेक्षा वृत्तजात पर चलने में संहति कम समय लगाती है) द्रुततम पातवक्र समस्या और भी अधिक लक्षणीय है। क्योंकि उसी के लिए परिणमन-कलन के प्रथम सिद्धांत विकसित किये गये थे।

वृत्तजात लोलक की तुल्यकालिकता का हाइगिज का आविष्कार जितना ही उल्लेखनीय है उतना ही उल्लेखनीय उनकी वह विधि है जिससे वे वृत्तजात पर गोलक की घर्पणहीन गति करा सके। उन्होंने इस नियम से लाभ उठाया कि वृत्तजात का केन्द्र^१ एक दूसरा वृत्तजात होता है जो जनक वृत्तजात के बराबर है। अतएव यदि $l=4a$ लंबाई की डोरी आकृति २७ के बिंदु O से बांधे (इस आकृति में ऊपर के दो वृत्तजातीय चाप एक निश्चिताग्र^२ बनाते हैं), और यदि डोरी कम कर लीची हुई हो कि वह वृत्तजात के दाहिने भाग से सटी होकर ठहरे (या बायीं ओर के भाग से, यदि विक्षेप उधर की ओर हो) तो डोरी का अंत-बिंदु P नीचे का वृत्तजातीय चाप रचता है। इस प्रकार से लटकाये हुए गोलक का वृत्तजात पर चलन उतना ही घर्पणहीन होगा जितना कि सरल लोलक के गोलक का वृत्तीय चाप पर चलना।



आ० २७—हाइगिज का तुल्यकालिक वृत्तजातीय लोलक।

वास्तव में, लोलक-घड़ियों के निर्माण के व्यापार में हाइगिज के इस विचार का त्याग कर दिया गया है। बेसल^३ तथा अन्यो^४ के अनुसंधानों के अनुसार, लोलक के ऊपरी सिरे पर एक कमान^५—साधारणतया एक छोटा सा प्रत्यास्थ पटल^६—लगा देना पर्याप्त है। यदि पटल की लंबाई और गोलक की सहति उचित प्रकार से निर्वाचित की जायें तो तुल्यकालिकता की पर्याप्त मात्रा प्राप्त हो जाती है।

§ १८. गोलीय लोलक

यहाँ लोलक को इस प्रकार लटकाने की आवश्यकता है कि सहति बिंदु m एक गोलीय पृष्ठ पर स्वच्छंदतापूर्वक चल सके। गोले की त्रिज्या $=l$ —लोलक की लंबाई। ऐसी परिस्थिति में वह निम्नलिखित नियंत्रण प्रतिबंध के बश में होगा—

$$(1) \quad F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - l^2) = 0,$$

जहाँ गुणनखंड $\frac{1}{2}$ सुविधा के लिए लगा दिया गया है।

1. Evolute 2. Cusp 3. Bessel
4. Elastic lamina

यहाँ नियंत्रण के प्रतिबंधों की संख्या r एक है तथा $X_1 = X_2 = 0, X_3 = -mg$; अतएव प्रथम प्रकार के लाग्रान्ज समीकरण (12.9) निम्नलिखित रूप धारण करते हैं

$$(2) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda x, \\ m\ddot{y} &= \lambda y, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda z. \end{aligned}$$

समीकरणों (13.13) और (13.13a) के विचार से, (2) के प्रथम दो समीकरणों से λ का निरसन z -अक्ष के प्रति कोणीय घूर्ण का अचरत्व या, जो कि वही बात हुई, क्षेत्रफलीय वेग का अविनाशित्व, प्रदान करता है, अर्थात्

$$(3) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} = C \quad (S = \text{प्रभावित क्षेत्रफल})$$

दूसरी ओर, यदि लाग्रान्ज समीकरण (2) को $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ से गुणा करें तो ऊर्जा समीकरण प्राप्त करते हैं; क्योंकि प्रतिबंध (1) t से स्वतंत्र है (दे० पृष्ठ ९१)। योग प्रदान करता है

$$(4) \quad m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}) = -mg\dot{z} + \lambda(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z})$$

परंतु (1) से

$$-\frac{dF}{dt} = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = 0.$$

दूसरी ओर, प्रकटतया,

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}.$$

तो (4) का t के लिए समाकलन प्रदान करता है

$$(5) \quad \frac{m}{2} v^2 = -mgz + \text{नियतांक},$$

जिसे नीचे दिये रूप में लिखेंगे

$$(5a) \quad T + V = E, \text{ जहाँ } V = mgz.$$

लाग्रान्ज समीकरणों को अब अंततः क्रमशः x, y, z से गुणा करिए। (1) की सहायता से इस प्रकार λ जान सकते हैं—

$$\lambda l - mgz = m(\ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}z)$$

या,

$$(6) \quad \lambda l = mg \frac{\ddot{z}}{l} + m \left(-\frac{\ddot{x}}{l} x + \frac{\ddot{y}}{l} y + \frac{\ddot{z}}{l} z \right)$$

अब किमी गोल के तल के x, y, z बिंदु पर अभिलम्ब की दैर्घिक कोटिज्याएँ $\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}$ होती हैं, अतएव चिह्न को छोड़कर दाहिने पार्श्व का द्वितीय पद गोलीय तल के लम्बवत् अवस्थितिस्वीय बल F_n^* है, इसी प्रकार दाहिने पार्श्व का प्रथम पद, चिह्न को छोड़कर, गुरुत्व बल का उमी दिशा में घटक F_n है। दालीयेर के अनुसार इन दोनों के योग का सतुलन गोल के तल की परिप्रिया R_n को, अर्थात्, भीतिवृत्तया, लोलक के अवलम्बन के तनाव को, करना चाहिए। अतएव समीकरण (6) का अर्थ निम्नलिखित समीकरण द्वारा संक्षेपतः प्रकट किया जा सकता है

$$(7) \quad \lambda l = -(F_n + F_n^*) = R_n$$

देखिए कि एक गुणनखंड l के भीतर ही भीतर, λ वह नियंत्रण है जो कि गति पर (1) के प्रभाव में पड़ता है और यह नियंत्रण गति की दिशा के लम्बवत् आरोपित होता है। व्यापक स्थितियों में, जहाँ नियंत्रण के कई प्रतिबन्ध हों और इसलिए कई लाग्रान्ज गुणक विद्यमान हों, वहाँ इसी प्रकार की अभ्युक्तियाँ लागू होंगी।

समीकरण (5) का द्वितीय समाकलन करने के लिए निम्नलिखित गोलीय निर्देशांकों का उपयोग करेंगे—

$$x = l \cos \phi \sin \theta,$$

$$y = l \sin \phi \sin \theta,$$

$$z = l \cos \theta.$$

इनसे निम्नलिखित बनते हैं—

$$\dot{x} = l \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta - l \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta,$$

$$\dot{y} = l \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta + l \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta,$$

$$\dot{z} = -l \dot{\theta} \sin \theta.$$

कोणीय गवेग के अविनाशित्व का गमीकरण (3) निम्नलिखित हो जाता है—

$$(8) \quad 2 \frac{dS}{dt} = xy - yx = l^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi} = C$$

और ऊर्जा गमीकरण (5a),

$$(9) \quad \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta = E$$

द्वार राशियों का एक और निम्नलिखित परिवर्तन—

$$u = \cos \theta; \quad \dot{\theta} = -\left(\frac{1}{1-u^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{dt}$$

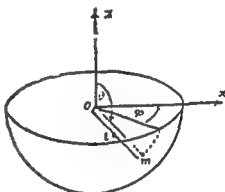
(8) को (10) में

$$(10) \quad \dot{\phi} = \frac{C}{l^2(1-u^2)}$$

और (9) को (11) में

$$(11) \quad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = U(u)$$

$$= \frac{2}{ml^2}(E - mgl u)(1 - u^2) - \frac{C^2}{l^4}$$



आकृति २८

त्रिज्या l के गोलीय वृष्ठ पर गुरुत्व बल के अधीन चलते हुए सहति बिंदु m की तरह माना गया गोलीय लोचक।

रूपांतरित कर देता है। t और u का यह सम्बन्ध हमें t को u के फलन की भाँति प्राप्त करवाता है—

$$(12) \quad t = \int \frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}$$

समी० (10) भी अब इसी प्रकार समाकलित रूप में लिखा जा सकता है क्योंकि (10) और (11) से

$$\frac{d\phi}{du} = \phi \quad \frac{dt}{du} = \frac{C}{l^2(1-u^2)} \cdot \frac{1}{U^{\frac{1}{2}}}$$

इस कारण प्राप्त होता है

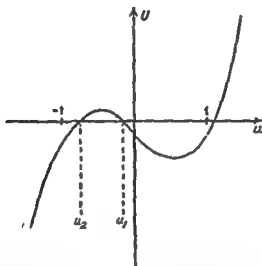
$$(13) \quad \phi = \frac{C}{l^2} \int \frac{du}{1-u^2} \cdot \frac{1}{U^{\frac{1}{2}}}$$

$U, u = \cos \theta$ में तृतीय घात का फलन है। $U^{\frac{1}{2}}$ केवल $U > 0$ के लिए ही वास्तविक होगा। तो यदि समीकरण के नियतांक किसी वास्तविक भौतिक समस्या के हो तो अंतर

$$-1 < u < +1$$

में $u = u_2 < u = u_1$ ये दो मान होने चाहिए जिनके बीच U धनात्मक होगा (देखिए आ० २९)।

$u_1 = \cos \theta_1$ और $u_2 = \cos \theta_2$ ये वे दो अक्षांश हैं जिनके बीच संहति बिंदु इधर-उधर दोलन करता है। जब (I2) या (I3) का समाकलन u की



आकृति २९—तृतीय घात का वक्र $U(u)$ और उसकी भुजाक्ष के साथ काटें $u = u_1$ और $u = u_2$. $u_2 < u_1 < 0$ का अर्थ है कि प्रक्षेपण निचले अर्द्धगोल में स्थित है।

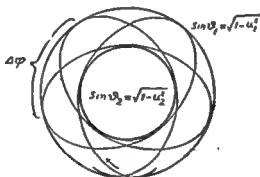
इन दो में से एक सीमा पर पहुँचता है तब न केवल समाकलन की दिशा में धरन् $U^{\frac{1}{2}}$ के चिह्न में भी परिवर्तन होगा ताकि समाकल वास्तविक और धनात्मक रहे। दो परस्परानुगामी आवर्तन स्थानों के बीच पूरे आवर्तकाल का चौथाई भाग व्यतीत होता है, अर्थात्

$$(I4) \quad \frac{T}{4} = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}$$

देखिए कि दोलन अब आकाश में आवर्ती^१ नहीं रहता जैसे कि एक ही समतल में गति वाले लोलक में होता है, वरन् उसमें धीरे-धीरे एक पुरःसरण होता रहता है। पुरःसरण कोण^२ $\Delta\phi$, का हिसाब जिससे कि संहति एक पूर्ण आवर्तकाल T में आगे बढ़ती है (या पीछे हटती है), (13) से लगाया जा सकता है और निम्न लिखित निकलता है—

$$(15) \quad 2\pi + \Delta\phi = \frac{4C}{I^2} \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{(1-u^2) U^{\frac{1}{2}}}$$

यह पुर सरण आकृति ३० में रेखांकित है जो वेबस्टर^३ से लिया गया है।



आकृति ३०—गोलीय लोलक के पुरसरण पथ का “विहगम-दृष्ट” अर्थात् ऊपर से देखा दृश्य। पुरःसरण कोण $\Delta\phi$ है θ_1 से θ_2 और फिर θ_1 को लौटने का समय अर्द्ध आवर्तकाल हुआ अतएव $\Delta\phi$ पूरे चक्कर के लिए हुआ।

समाकल (12) प्रथम प्रकार का ठीक वैसे ही दीर्घवृत्तीय समाकल है जैसा कि सरल लोलक के लिए (15.8) दीर्घवृत्तीय समाकल था। यह ऐसे समाकलों का जातिनाम है जिनके समाकल्यों^४ के ह्रो के समाकलन की चर राशियों में तीसरे या चौथे घात के बहुपदी का वर्गमूल हो। यह बात कि समीकरण (15.8) इस

1. Periodic
2. Angle of precession
3. A. G. Webster, “Dynamics of Particles,” Leipzig, Teubner (1912) p. 51.
4. Integrand

जाति में आता है, रूपान्तरण $u = \sin \frac{\phi}{2}$ का प्रवेश कराने से देखा जा सकता है

ताकि u कलन की चरराशि हो जाय। इसके अतिरिक्त यदि $a = \sin \frac{\alpha}{2}$ रख दे तो (15.8) निम्नलिखित हो जाता है—

$$\int \frac{du}{[(a^2 - u^2)(1 - u^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

विशेषतया, T का व्यंजक (14), ठीक (15.12) की भाँति, प्रथम प्रकार का पूर्ण समाकल है। दूसरी ओर समाकल (13), जिसके हर में $U^{\frac{1}{2}}$ के अतिरिक्त दो अन्य गुणनखंड $(1 \pm u)$ हैं, “तृतीय प्रकार का दीर्घ वृत्तीय समाकल” है, और (15) “तृतीय प्रकार का पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकल” है।

प्रश्न (III. 1) दिखलाता है कि अत्यन्त दोलनों के लिए गोलीय लोलक की गति को व्यक्त करने वाला समीकरण प्रारम्भिक हो जाता है और पुरस्रण-कोण

$$\Delta\phi \rightarrow 0.$$

§ १६. विविध प्रकार के दोलन

स्वतंत्र और प्रणोदित, अवमदित तथा अनवमदित दोलन

स्वतंत्र, अनवमदित दोलनों की विवृति § ३, उपप्र० क० ४, में दी जा चुकी है। उन्हें मरलावर्त दोलन कहा गया था। इस स्थान पर हम पहले-पहल

अनवमदित प्रणोदित दोलनबन्ध

पर विचार करेंगे। उनका अवकल समीकरण निम्नलिखित लगे—

$$(1) \quad m\ddot{x} + kx = c \sin \omega t$$

जहाँ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ प्रणोदक अर्थात् चालन बल की वृत्तीय आवृत्ति है।

यहाँ हमने अवकल समीकरण को परतंत्र चरराशि x के लिए रैखिक बनाया है। यह अनुज्ञेय है, कम से कम लघुदोलनों के लिए। (मिलाइए, सरल लोलक) यही बात इस और आगामी प्रकरण के अन्य दृष्टान्तों के लिए भी लागू है।

1. Expression 2. Infinitesimal 3. Precession angle
4. Forced 5. Damped

प्रत्यानयन^१ बल, (3.19) की भाँति, $-kx$ है; समी० (1) का c हमारे कण को दोलायमान करने वाले चालक बल का आयाम^३ है।

दाहिने अंग के होने के कारण, (1) असमांग रैखिक अवकल समीकरण हो जाता है। बाये अंग को 0 के बराबर रखने से समी० समांग अवकल समीकरण प्राप्त होता है जैसा कि पहले ही समी० (3.23) के संबंध में कहा जा चुका है।

इस असमांग अवकल समीकरण का एक विशिष्ट हल निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है—

$$x = C \sin \omega t,$$

जहाँ C को नीचे दिया समीकरण संतुष्ट करना चाहिए

$$C(k - m\omega^2) = c$$

यदि, (3.20) के नमूने पर, हम रख लें कि—

$$(2) \quad \omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

तो प्राप्त करते हैं

$$(3) \quad C = \frac{c/m}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

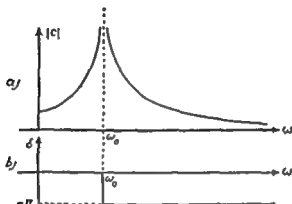
समी० (1) का व्यापक हल इस विशिष्ट हल से और संगी समांग समीकरण के व्यापक साधन (हल) से बनता है—

$$(4) \quad x = C \sin \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

प्रथम पद का आयाम C बढ़ते हुए ω के साथ अधिक होता है और $\omega = \omega_0$ पर अनन्त हो जाता है। यहाँ पहुँचकर वह ऋणात्मक अनन्तराशि की तरफ चला जाता है तथा निरपेक्ष मान में धीरे-धीरे कम होता रहता है और ω के ∞ को पहुँचने पर ($\omega \rightarrow \infty$) शून्य हो जाता है।

वास्तव में जब C ऋणात्मक हो जाता है तब आयाम का चिह्न नहीं बदलता क्योंकि आयाम परिभाषा से ही ऋणात्मक नहीं होते। अतएव आयाम को $|C|$

द्वारा ही सूचित करने रहेंगे और चिह्न का जो परिवर्तन होता है उसे गुणनखंड ज्या में रख देंगे जहाँ वह $\delta = \pm \pi$ के कला-परिवर्तन की भांति आवेगा।



आ० ३१ क, ए—अनवमदित प्रणोदित दोलनों के आयाम और कला।

ये बातें आकृति ३१ में (a) और (b) पर चित्रांकित की गयी हैं जहाँ ω के फलनों की भांति आयाम $|C|$ स्थान (a) पर और कला $[\delta]$ स्थान (b) पर आलेखित किये गये हैं।

आकृति ३१ख में पहले से ही यह निर्णय नहीं कर सकते कि $\omega > \omega_0$ के लिए कला आगे है या पीछे; अर्थात् δ को $+\pi$ या $-\pi$ ले। परन्तु हम थोड़ी सी पूर्व भावना कर लेंगे और अनवमदित कणों को अवमदित कणों की सीमात स्थिति समझ लेंगे (नीचे देखिए)। यह हमें $-\pi$ के पक्ष में निर्णय करवाता है, जिस कारण (4) का पहला पद निम्नलिखित प्रकार में सविस्तार लिख सकते हैं—

$$(4a) \quad x = \frac{c/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega t - \pi) \quad (\omega > \omega_0)$$

यह बात कि $\omega = \omega_0$ होने पर आयाम अनंत हो जाता है, स्वतंत्र और प्रणोदित दोलनों के बीच अनुनाद की घटना को चित्रित करती है। यह एक ऐसी घटना है जो भौतिकी के सारे क्षेत्रों में अति महत्त्व के काम करती है। (3) और (4a) का हर, जिसके शून्य हो जाने के कारण आयाम अनंत हो जाता है, “अनुनाद हर” कहलाता है। यह अतर्जानत. स्पष्ट होगा कि दोलायमान निकाय की निजी आवृत्ति जितनी ही चालन बल की आवृत्ति के निकट होगी उतनी ही भली भांति निकाय इस बल का अनुसरण करेगा।

परंतु हमें यह सदा मन में रखना चाहिए कि अनुनाद के अनंत आयाम का निगमन करने में हम अतीव बहिर्वेशन^१ के दोषी होते हैं क्योंकि प्रायः सभी स्थितियों में हमारा रैखिक अवकल समीकरण अत्यणु दोलों के लिए ही लागू है।

अब तक हमने अपना सारा ध्यान समी० (४) के दाहिने अंग के प्रथम पद पर ही लगाया है। अन्य दो पद आदि के प्रतिवर्धों द्वारा निर्धारित किये जाते हैं। इनके लिए मान लीजिए कि—

$$t=0 \text{ पर } x=0, \dot{x}=0.$$

इस कारण

$$A=0, \omega C + \omega_0 B=0, \text{ अतएव } B=-\frac{\omega}{\omega_0} C.$$

परिणामतः,

$$(5) \quad x=C \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

इस समीकरण की अंतर्वस्तु को, आइए, आवृत्तियों ω और ω_0 के निकट अनुनाद की विशेष स्थिति पर विचार कर, अधिकतर स्पष्ट कर दें। इसके लिए हम

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

रखकर निम्नलिखित विस्तार करते हैं—

$$\begin{aligned} \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t &= \sin \omega_0 t + t \Delta\omega \cos \omega_0 t \\ &\quad - \sin \omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

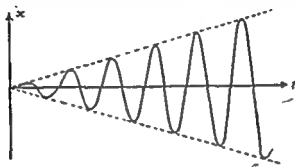
तो अब समी० (५) प्रदान करता है

$$x=C\Delta\omega \left(t \cos \omega_0 t - \frac{t}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

और (३) के विचार से, सीमा $\Delta\omega=0$ पर,

$$(6) \quad x = \frac{c}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t).$$

इस प्रकार का दोलन, जो आकृति ३२ में चित्रित, अब आवर्ती नहीं रहता जैसा कि स्वतंत्र दोलन था। क्योंकि (6) में t दीर्घकालीन पद की भांति आता है अर्थात् अब वह त्रिकोणमितीय फलन में केवलमात्र आयामांक की भांति ही नहीं आता। यहाँ $t \rightarrow \infty$ के लिए आयाम का मान $C = \infty$ के निकट पहुँचता है जैसा कि आ० ३१ में $\omega = \omega_0$ के लिए सूचित किया गया था।



आ० ३२—स्वतंत्र और प्रणोदित दोलनों के अनुनाद। आयाम की दीर्घकालिक वृद्धि।

स्वतंत्र, अयमवित दोलनघट

इनका अवकल समीकरण निम्नलिखित होता है

$$(7) \quad m\ddot{x} + kx = -wx.$$

दायें पादर्व का जो पद है वह घर्षण सबधी है और वेग का समानुपाती है। यह एक ऐसा अनुमान है जो घर्षण गामी, पटलीय (अर्थात् अप्रचंड) बहाव (वामव प्रतिरोध) की द्रव-गतिकी से समर्यनीय है।

समी० (7) समांग रैखिक अवकल समीकरण है। पहले की भांति हम—

$$(7a) \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, [\omega_0 = \text{अनवमदित निजी आवृत्ति}]$$

रख लेते हैं। निम्नलिखित सुविधा कर सकेतन-परिवर्तन भी कर लीजिए

$$(7b) \quad \frac{\omega}{m} = 2\rho, \rho > 0.$$

तो अब समी० (7) नीचे दिया रूप धारण करता है—

$$(8) \quad \ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

समी० (3.23) के नीचे जिस विधि का वर्णन किया गया है वह अब अपना पूरा गुण प्रकट करती है। वहाँ की भांति हम (8) में

$$(8a) \quad x = C e^{\lambda t}$$

का प्रतिस्थापन करते हैं और इस प्रकार λ में

लाक्षणिक समीकरण प्राप्त करते हैं अर्थात्

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

इसके निम्नलिखित दो मूल हैं—

$$\lambda = -\rho \pm (-\omega_0^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}.$$

अतएव व्यंजक (8a) को निम्नलिखित में व्याप्त कर देना चाहिए

$$(8b) \quad x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

अब दो स्थितियों को ध्यान में लाना चाहिए

$$1. \rho < \omega_0; \quad 2. \rho > \omega_0$$

पहली स्थिति वह है जो साधारणतया व्यवहार में प्रचलित होती है। यहाँ गति आवर्ती दोलन की होती है जिसका आयाम घटता रहता है। दूसरी स्थिति तीव्र या “अनावर्ती” अवमंदन की है। दोनों स्थितियों में गति को इस प्रतिबंध से विशिष्ट कर देगे कि $t=0$ पर $x=0$, जिससे, (8b) के अनुसार, $C_2 = -C_1$ हो जाता है।

$$\text{प्रथम स्थिति} \quad \rho < \omega_0, \quad \lambda = -\rho \pm i(\omega_0^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$x = 2C_1 e^{-\rho t} \sin (\omega_0^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} t.$$

लघु ρ के लिए आवर्त काल

$$T = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

अनवमंदित दोलनों के आवर्तकाल से नहीं के बराबर भिन्न होगा। $e^{-\rho t}$ अवमंदन गुणनखंड है; ρT लघुगुणकीय अपघट्य

दूसरी स्थिति 2. $\rho > \omega_0$ यहाँ λ_1, λ_2 दोनों वास्तविक हैं और प्राप्त करते हैं

$$x = 2C_1 e^{-\rho t} \sinh (\rho^2 - \omega_0^2)^{\frac{1}{2}} t$$

अहाँ \sinh (साइन) अतिपरबलयिक ज्या (ज्याति) है।

अन्त में इस प्रकार के दोलन का विवरण देगे जिसमें अब तक दिये हुए प्रकार के दोलन सम्मिलित हैं, अर्थात्

अवमंदित, प्रणोदित दोलनबंध

इनका अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में दे सकते हैं

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = c \sin \omega t,$$

या (7a, b) में दी हुई सदिष्टिकाओं के साथ,

$$(9) \quad \ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{2mi} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

समांग समीकरण के व्यापक समाकल (8b) में अब नीचे दिये हुए रूप में लिखित एक विशिष्ट साधन का योग कर देंगे।

$$x = |C| \sin (\omega t + \delta) = \frac{|C|}{2i} (e^{i(\omega t + \delta)} - e^{-i(\omega t + \delta)})$$

आइए इसे (9) में प्रवेश करावे। बायें और दायें पार्श्वों के $c \pm \omega$ के गुणनखंडों की तुलना निम्नलिखित प्रदान करती है—

$$|C| (-\omega^2 + 2ip\omega + \omega_0^2) e^{i\delta} = \frac{c}{m},$$

$$\text{तथा } |C| (-\omega^2 - 2ip\omega + \omega_0^2) e^{-i\delta} = \frac{c}{m}.$$

इन दो संवधों का गुणन और विभाजन प्रदान करता है, क्रमात्,

$$|C|^2 = \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2}$$

$$\text{और } e^{2i\delta} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ip\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ip\omega}$$

सदनुसार,

$$(10) \quad |C| = \frac{c}{m} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

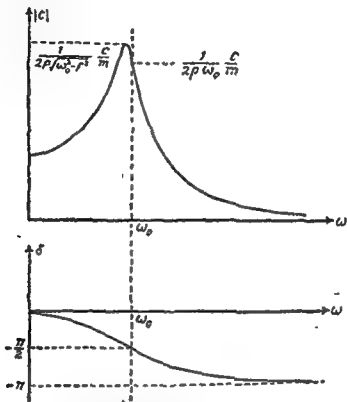
एवं

$$(11) \quad \tan \delta = \frac{ie^{2i\delta} - 1}{ie^{2i\delta} + 1} = -\frac{2p\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

m के इन दो फलनों के आकृति ३३ में दिये हुए आलेखनों की आ० ३१ क, ख से तुलना कीजिए।

आकृति ३३ दिखाती है कि पहले का अनन्त अनुनाद-महत्तम¹ अवमंदन के कारण एक परिमित मान के रूप में कम हो गया है। प्रसंगवश यह भी देखिए कि

महत्तम मान अब ठीक $\omega = \omega_0$ वाले स्थान पर नहीं आता, वरन् कुछ तनिक कम ω पर। देखिए प्रश्न III 2।



आ० ३३—अवमदित प्रणोदित दोलनों के आयाम तथा कला।

आकृति ३३ यह भी दिखाती है कि बढ़ते हुए ω के साथ, δ का मान $\omega=0$ पर 0 होकर ऋणात्मक हो जाता है; $\omega=\omega_0$ पर उसका मान ठीक $-\frac{1}{2}\pi$ होता है और जब $\omega \rightarrow \infty$ वह $-\pi$ के पास पहुँचता है। इस प्रकार हम अपने पहले के $\pm\pi$ के बीच के निर्वाचन (आ० ३१) को ठीक ठहरा देते हैं, जहाँ हम अनवमदित की स्थिति ले रहे थे। वास्तव में हम अब देखते हैं कि दोलन की कला सदैव प्रणोदक अर्थात् चालन बल की कला के पीछे ही रहती है। प्रणोदित दोलनों के ओर दृष्टांतों के लिए देखिए प्रश्न संख्या III.3 और III.4.

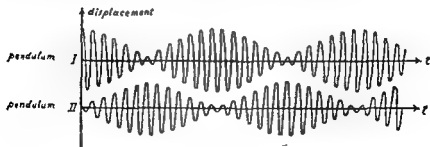
§ २० सहानुभूति-जनित दोलन

अब तक जिन प्रकारों के दोलनों का वर्णन हुआ है उनमें केवल एक संहति विदु आता है। अब हम दोलनों के उन प्रकारों का वर्णन करेंगे जिनमें दो दोलनीय सहतिपाँ

आती हैं और दोनों सहनियों में परस्पर हलका युग्मन होना है। सहानुभूति जनित दोलन कई वर्षों में वैद्युत मापनों में महत्त्वग्राही हो गये हैं। वहाँ एक प्राथमिक परिपथ होता है और दूसरा गौण। पश्चोक्त साधारणतया पूर्वोक्त में "प्रेरणतया" युग्मित होता है। प्राथमिक परिपथ में दोलन उत्पन्न कराये जाते हैं (पथ "उत्तेजित" किया जाता है)। ऐसा करने पर गौण परिपथ में भी वैसा ही होने लगता है, विशेषतया यदि अनुनाद तीव्रता से होने लगे। सच तो यह है कि रेडियो में बहुतायत से व्यवहृत "द्विगुणतया समस्वरित युग्मन मचिका" में केवल एक प्राथमिक और एक इससे समस्वरित गौण परिपथ होता है। यहाँ पर हम, स्वाभाविकतया, युग्मित यांत्रिक दोलनवृद्ध की ही बात करेंगे जिनका कि उपयोग बहुधा वैद्युत दोलनों के लिए नमूनों की भाँति हुआ है।

सहानुभूति-जनित दोलनों का एक विशेषरूप से शिक्षाप्रद दृष्टांत तयोक्त "युग्मित लोलकद्वय" प्रस्तुत करते हैं। अनुनाद की स्थिति में दो एक-जैसे लये और एक ही जैसे भारी लोलक होते हैं। उनका मनश्चित्रण सरल ढंग से करने के लिए उन्हें एक ही समतल में दोलन करते हुए समझ सकते हैं। उनका युग्मन एक सर्पिकार कमानी द्वारा किया जा सकता है। जैसे कि आ० ३५ में इंगित किया गया है। दोनों लोलकों की आपेक्षिक गति में यदि कमानी थोड़ा-सा ही प्रतिरोध डाले तो युग्मन को दुर्बल कहते हैं, कमानी का तनाव और अधिक होने की स्थिति में युग्मन सबल कहलाता है। हम मान लेंगे कि हमारे लोलकों का युग्मन दुर्बल है। यदि दोनों लोलकों की लंबाई या उनका भार बिल्कुल एक-जैसा न हो तो कहेंगे कि वे "मिले हुए नहीं" हैं या "बेमेल" हैं।

पहले उन बातों का वर्णन करेंगे जो अनुनाद की स्थिति में होती हैं।



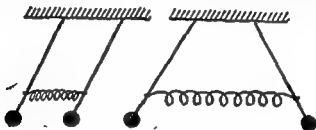
आ० ३४—युग्मित लोलक-द्वय अनुनाद की स्थिति में।

1. Doubly tuned coupling stage

समझिए कि पहला लोलक उत्तेजित है, दूसरा शुरू में विराम अवस्था में है। आकृति ३४ में परिणामित दोलनों का चित्रण किया गया है।

प्रत्येक लोलक के दोलन मूच्छनागत (माँझूलेटेड) होंगे।

ऊर्जा एक लोलक से दूसरे में पारी-पारी से जायेगी। जिस समय एक लोलक महत्तम आयाम के साथ दोलन करता है, उस समय दूसरा विराम दशा में होता है।



आ० ३५—अनुदान में युग्मित लोलकों के दो प्रकृत दोलन-ढंग।

इसके स्थान पर, यदि दोनों लोलक एक ही साथ एक ही प्रबलता से गतिशील कर दिये जायें (देखिए आ० ३५), या तो दोनों एक ही ओर (आ० ३५ बायाँ पार्श्व) या प्रतिकूल दिशाओं में (आ० ३५, दायाँ पार्श्व), तो ऊर्जा का विनिमय नहीं होता। हमारे दो स्वतंत्रता-संख्याओं वाले इस युग्मित निकाय के इन दो दोलन ढंगों को दोलन के प्रकृत ढंग कहते हैं। व्यापक नियम है कि n स्वतंत्रता-संख्याओं वाले दोलनशील निकाय के n प्रकृत दोलन ढंग होते हैं।

दूसरी ओर, यदि लोलक बेमेल हों तो निश्चय ही ऊर्जा विनिमय अब भी होता है; परंतु विनिमय इस प्रकार का होगा कि प्रथम उत्तेजित दोलन का लघुतम आयाम शून्य से भिन्न होगा। केवल वही लोलक जो आदि में विराम दशा में होगा, गति चक्र में फिर विराम दशा को पहुँचेगा। इस प्रकार, ठीक मिले हुए n होने के कारण दोनों लोलकों की “सहानुभूति” में बाधा पड़ जाती है।

अब हम पूर्ण अनुनाद के सिद्धांत का स्थूल-वर्णन करेंगे। इसके लिए सरलतम अनुमान ही करेंगे और अवमंदन की विलकुल उपेक्षा कर देंगे तथा गोलकों के वृत्तीय प्रक्षेप-पथों का उनके निम्नतम बिंदुओं पर खींची हुई स्पर्शरेखाओं द्वारा सन्निकटन करेंगे, जैसा करना पर्याप्ततया लघु विस्थापनों के लिए अनुज्ञेय है।

समझिए कि लोलक I का दोलन आयाम x_1 है, लोलक II का x_2 ; यह भी समझिए कि k है “युग्मन गुणांक”, अर्थात् ब्रामानी में एक मात्रक दैर्घ्य के दीर्घा-

करण कारित तनाव का किसी एक लोलक की सहनि द्वारा भागफल। समन्वय के युगपत् अवकल समीकरण ये होंगे।

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -k(x_1 - x_2), \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

यदि (1) में

$$(2) \quad z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = x_1 + x_2,$$

का उपयोग करे तो घटाने और जोड़ने से प्रकृत ढंगों के लिए ये दो समीकरण मिलते हैं—

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -2kz_1 \text{ अर्थात् } \ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2k)z_1 = 0$$

$$(3) \text{ और } \ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0$$

कृतात् तदनुसार आवृत्तियाँ हुई

$$(4) \quad z_1 \text{ के लिए } (\omega = \omega_0^2 + 2k)^{\frac{1}{2}} \cong \omega_0 + \frac{k}{\omega_0};$$

$$z_2 \text{ के लिए } \omega' = \omega_0$$

समीकरण (3) के व्यापक हल ये हैं—

$$(5) \quad z_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t,$$

$$z_2 = a_2 \cos \omega' t + b_2 \sin \omega' t.$$

उत्तेजन के क्षण, $t=0$ पर समझिए कि

$$(6) \quad x_2 = \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad x_1 = C,$$

जो देते हैं—

$$(7) \quad \dot{z}_1 = z_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = C$$

तो परिणाम निकलता है कि—

$$(8) \quad b_1 = b_2 = 0, \quad a_1 = a_2 = C$$

इस कारण

$$z_1 = C \cos \omega t, \quad z_2 = C \cos \omega' t$$

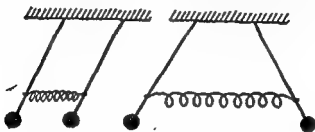
अतः

$$(9) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{z_2 + z_1}{2} = C \cos \frac{\omega' - \omega}{2} t \cdot \cos \frac{\omega' + \omega}{2} t \\ x_2 &= \frac{z_2 - z_1}{2} = -C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t \end{aligned}$$

समझिए कि पहला लोलक उत्तेजित है, दूसरा शुरु में विराम अवस्था में है।
आकृति ३४ में परिणामित दोलनों का चित्रण किया गया है।

प्रत्येक लोलक के दोलन मूच्छनागत (मॉड्युलेटेड) होंगे।

ऊर्जा एक लोलक से दूसरे में पारी-पारी से जायेगी। जिस समय एक लोलक महत्तम आयाम के साथ दोलन करता है, उस समय दूसरा विराम दशा में होता है।



आ० ३५—अनुदान में युग्मित लोलकों के दो प्रकृत दोलन-ढंग।

इसके स्थान पर, यदि दोनों लोलक एक ही साथ एक ही प्रबलता से गतिशील कर दिये जायें (देखिए आ० ३५), या तो दोनों एक ही ओर (आ० ३५ बायाँ पार्श्व) या प्रतिकूल दिशाओं में (आ० ३५, दायाँ पार्श्व), तो ऊर्जा का विनिमय नहीं होता। हमारे दो स्वतंत्रता-संख्याओं वाले इस युग्मित निकाय के इन दो दोलन ढंगों को दोलन के प्रकृत ढंग कहते हैं। व्यापक नियम है कि n स्वतंत्रता-संख्याओं वाले दोलनशील निकाय के n प्रकृत दोलन ढंग होते हैं।

दूसरी ओर, यदि लोलक बेमेल हो तो निश्चय ही ऊर्जा विनिमय अब भी होता है; परंतु विनिमय इस प्रकार का होगा कि प्रथम उत्तेजित दोलन का लघुतम आयाम शून्य से भिन्न होगा। केवल वही लोलक जो आदि में विराम दशा में होगा, गति चक्र में फिर विराम दशा को पहुँचेगा। इस प्रकार, ठीक मिले हुए न होने के कारण दोनों लोलकों की “सहानुभूति” में बाधा पड़ जाती है।

अब हम पूर्ण अनुनाद के सिद्धांत का स्थूल-वर्णन करेंगे। इसके लिए सरलतम अनुमान ही करेंगे और अवमंदन की बिल्कुल उपेक्षा कर देते तथा गोलकों के वृत्तीय प्रक्षेप-पथों का उनके निम्नतम बिंदुओं पर खींची हुई स्पर्शरेखाओं द्वारा सन्निकटन करेंगे, जैसा करना पर्याप्ततया लघु विस्थापनों के लिए अनुज्ञेय है।

समझिए कि लोलक I का दोलन आयाम x_1 है, लोलक II का x_2 ; यह भी समझिए कि k है “युग्मन गुणांक”, अर्थात् कमानी में एक मात्रक दैर्घ्य के दीर्घी-

करण कारित तनाव का किसी एक लोलक की सहति द्वारा भागफल। समस्या के युगपत् अवकल समीकरण ये होंगे।

$$(1) \quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -k(x_1 - x_2), \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -k(x_2 - x_1).$$

यदि (1) में

$$(2) \quad z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = x_1 + x_2,$$

का उपयोग करें तो घटाने और जोड़ने से प्रकृत ढंगों के लिए ये दो समीकरण मिलते हैं—

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -2kz_1 \quad \text{अर्थात्} \quad \ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2k)z_1 = 0$$

$$(3) \quad \text{और} \quad \ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0$$

क़मात् तदनुसार आवृत्तियाँ हुईं

$$(4) \quad z_1 \text{ के लिए } (\omega = \omega_0^2 + 2k)^{\frac{1}{2}} \cong \omega_0 + \frac{k}{\omega_0};$$

$$z_2 \text{ के लिए } \omega' = \omega_0$$

समीकरण (3) के व्यापक हल ये हैं—

$$(5) \quad z_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ z_2 = a_2 \cos \omega' t + b_2 \sin \omega' t.$$

उत्तेजन के क्षण, $t=0$ पर समझिए कि

$$(6) \quad x_2 = \dot{x}_2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = C,$$

जो देते हैं—

$$(7) \quad \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = C$$

सो परिणाम निकलता है कि—

$$(8) \quad b_1 = b_2 = 0, \quad a_1 = a_2 = C$$

इस कारण

$$z_1 = C \cos \omega t, \quad z_2 = C \cos \omega' t$$

अतः

$$(9) \quad x_1 = \frac{z_2 + z_1}{2} = C \cos \frac{\omega' - \omega}{2} t \cdot \cos \frac{\omega' + \omega}{2} t \\ x_2 = \frac{z_2 - z_1}{2} = -C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t$$

(4) के अनुसार, दुर्बल युग्मन की स्थिति में,

$$\frac{\omega - \omega'}{2} \cong \frac{k}{2\omega_0} \ll 1.$$

अतएव (9) के दक्षिणी अंगो के प्रथम गुणनखंड समय के साथ धीरे-धीरे ही बढ़ते हैं। यही वह बात है जो आ० ३४ में चित्रित दोलनों में संकरों को उत्पन्न करती है।

यदि दोनों लोलकों में समस्वरता न हो अर्थात् यदि $l_1 \neq l_2$ या x और $m_1 \neq m_2$ तो वाद^१ इतना सरल नहीं रहता। अब मात्रक दीर्घाकरण के कारण कमानी में तनाव को c मान कर हम

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_2}, \quad k_1 = \frac{c}{m_1}, \quad k_2 = \frac{c}{m_2}$$

रख देते हैं और आदि के समीकरण (1) के स्थान पर निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$(10) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -k_1(x_1 - x_2), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

यहाँ फिर दो प्रकृत ढग होते हैं जो कि (3.24) में दी हुई विधि को बढ़ाने से प्राप्त किये जा सकते हैं। [समी० (1) में हम एक अधिकतर सुविधाजनक विधि का व्यवहार कर सके थे जो कि उस स्थिति के लिए विशेषतया उपयुक्त थी; यह विधि व्यापक तथा लागू नहीं है।] हम निम्नलिखित प्रतिस्थापन करते हैं—

$$(11) \quad x_1 = Ae^{\lambda t}, \quad x_2 = Be^{\lambda t}$$

और (10) से ये दो लाक्षणिक समीकरण प्राप्त करते हैं—

$$(12) \quad \begin{aligned} A(\omega_1^2 - \lambda^2 + k_1) &= k_1 B \\ B(\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2) &= k_2 A. \end{aligned}$$

(12) से प्राप्त तथोक्त दीर्घकालिक समीकरण* λ^2 में वर्गात्मक^१ है, क्योंकि

$$(13) \quad \frac{B}{A} = \frac{\omega_1^2 - \lambda^2 + k_1}{k_1} = \frac{k_2}{\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2},$$

जिस कारण

$$(14) \quad \{\lambda^2 - (\omega_1^2 + k_1)\} \{\lambda^2 - (\omega_2^2 + k_2)\} = k_1 k_2.$$

लघु k_1, k_2 के लिए (14) के ये दो सन्निकट मूल हैं

(*) इस शब्द का जन्म खगोलीय यांत्रिकी के स्थान-व्युत्ति वाद में हुआ था।

1. Theory

2. Quadratic

$$(15) \quad \lambda^2 = \begin{cases} \omega_1^2 + k_1 + \frac{k_1 k_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ \omega_2^2 + k_2 \frac{k_1 k_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{cases}$$

दीर्घकालिक समीकरण के इन दो मूलों का नामकरण ω^2 और ω'^2 करने हैं। अपिच, रैखिक अवकल समीकरणों के साधनों के अध्यारोपण वाले सिद्धांत का उपयोग करते हुए, हम परीक्षा मूलक साधन (11) का व्यापकीकरण उसी प्रकार कर देते हैं, जैसे कि (3.24b) में किया था। वास्तविक रूप में लिखा हुआ व्यापक साधन निम्नलिखित है —

$$(16) \quad \begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t + b \sin \omega t + a' \cos \omega' t + b' \sin \omega' t \\ x_2 &= \gamma a \cos \omega t + \gamma b \sin \omega t + \gamma a' \cos \omega' t + \gamma b' \sin \omega' t. \end{aligned}$$

यहाँ γ और γ' राशि $\frac{B}{A}$ के वे विशिष्ट मान हैं जो (13) से क्रमात् $\lambda^2 = \omega^2$

और $\lambda^2 = \omega'^2$ के लिए प्राप्त होते हैं।

आइये एक बार फिर उत्तेजन के प्रतिबंध लें कि $t=0$ पर

$$x_2=0, \dot{x}_2=0; \dot{x}_1=0, x_1=C.$$

यह प्रदान करता है

$$(17) \quad \begin{aligned} \gamma a + \gamma' a' &= 0, \quad \gamma \omega b + \gamma' \omega' b' = 0, \\ \omega b + \omega' b' &= 0, \quad a + a' = C \end{aligned}$$

जिनसे निम्नलिखित प्राप्त होते हैं—

$$b = b' = 0$$

और

$$a = \frac{\gamma'}{\gamma' - \gamma} C, \quad a' = \frac{\gamma}{\gamma - \gamma'} C$$

यदि ये मान (16) में प्रतिस्थापित कर दे तो हम प्राप्त करते हैं

$$(18) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} (\gamma' \cos \omega t - \gamma \cos \omega' t) \\ x_2 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} \gamma \gamma' (\cos \omega t - \cos \omega' t). \end{aligned}$$

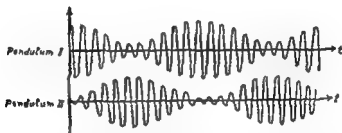
x_2 के समीकरण में (9) में व्यवहृत त्रिकोणमितीय रूपांतरण कर निम्नलिखित प्राप्त कर सकते हैं —

$$(19) \quad x_2 = \frac{2\gamma\gamma'}{\gamma - \gamma'} C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t$$

तो देखते हैं कि दूसरा लोलक अब भी निम्नलिखित समयों पर विराम दशा में पहुँचता है —

$$\frac{\omega' - \omega}{2} t = n\pi$$

परन्तु प्रथम लोलक ऐसा नहीं करता। जिस समय x_2 का आयाम महत्तम होता है उस समय x_1 शून्य नहीं, किंतु परिमित मान का होता है (देखिए समी० (18) का पहला और आकृति ३६)। दोय युक्त समस्वरण (मिलाने) का परिणाम होता है ऊर्जा का अपूर्ण स्थानांतरण।



आ० ३६—थोड़े से बेमेल, युग्मित लोलकों का दोलन-लेख्य।

यदि उपर्युक्त वाद में वैद्युत घटनाओं को लगाना चाहें तो उसे इस प्रकार बढ़ाना होगा कि लोलकों का अवमंदन उसमें आ जाय। अवमंदन की वैद्युत सद्श-वस्तु ओमिक^१ प्रतिरोध है (हमारा त्वरण संबंधी पद आत्म-प्रेरण के और हमारा प्रत्या-नयन बल^२ वैद्युत धारितात्मक^३ प्रभावों के अनुरूप है)। और भी यह कि युग्मित परि-पथों में वैद्युत दोलनों का विश्लेषण अभियाचना करता है कि हम स्थानीय “युग्मन” [k और $\pm(x_2 - x_1)$ का गुणनफल] के अतिरिक्त “त्वरण और वेग युग्मन” का भी प्रवेश करावें। अपनी यांत्रिक समस्या में केवल स्थान युग्मन को ही विचार में लेना पड़ा था।

प्रश्न संख्या III-5 में प्रायोगिकतया सुविधाजनक एक ऐसी व्यवस्था की गति का अनुसंधान करेंगे जिसमें लोलक एक नम्यतार से लोलक द्विसूत्रीतया लटकाये होंगे और उनका दोलन उनकी विराम दशा के समतल में नहीं, किन्तु उसके लंबवत् होगा।

1. Ohmic
2. Restoring force
3. Capacitive

एक चित्ताकर्षक व्यवस्था जिगमें कि दोनो युग्मित लोख, कहिए कि, एक ही पिंड में उपलब्ध हो जाते हैं, दोलायमान सर्पाकार कमानी* की है।

इस प्रकार की कमानी (देखिए आकृति ३७) न केवल अपनी अक्ष की दिशा में दोलन (y) कर सकती है, वरन् इसी अक्ष के प्रति घूर्णक-दोलन (ψ) भी कर सकती है। परिमित विस्थापनों के लिए इन दो गतियों के बीच युग्मन कमानी स्वयं उत्पन्न करती है। क्योंकि जब कमानी ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर खींची जाती है तब एक पार्श्विक बल का अनुभव होता है, और कमानी अपने को खोलने के लिए अपने तई तार की दिशा की ओर खींच लेने का यत्न करती है। दूसरी ओर, यदि कमानी को लपेटकर ऊपर की ओर करते हैं तो वह अपने तई y अक्ष की दिशा में छोटा कर लेने का यत्न करेगी। दूसरे शब्दों में यदि दोलन y -दिशा में उत्पन्न किये जायें तो एक x -दोलन प्रेरित हो जाता है और इसका उल्टा। (जहाँ तक कि तार के द्रव्य पर प्रत्यास्य प्रतिबल का संबंध है, y -दोलन ऐंठनी अर्थात् ऐंठन का, x दोलन विक्षेप का। इनके बारे में व्योरो के लिए इस ग्रन्थमाला की द्वितीय पुस्तक देखिए)।



समंजनीय सहति Z द्वारा ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज आकृति ३७-सपिल दोलन ठीक-ठीक या पाम-पास अनुनाद में लाये जा सकते कमानी के ऐंठनी और हैं। अब यदि दोनों में से कोई एक दोलन उत्तेजित कर विक्षेपी दोलन दिया जाय तो आ० ३४ या आ० ३६ में दिखलाया आयाम-विनिमय होता है।

३.२१. युगल लोलक

जैसा कि पिछले प्रकरण के प्रारंभ में किया गया था, पहले प्रस्तुत विषय सन्नधी आनुभविक बातों का वर्णन करेंगे।

(*) व्योरो के लिए पाठक को देखना चाहिए, Wüllner Festchrift, Teubner (1905): Lissajous Figures and Resonance Effects of Oscillating Helical springs; Their Use in the Determination of the Poisson Ratio, दोलायमान सर्पाकार कमानियों को लोसाज आकृतियाँ और (उनके) अनुनाद प्रभावबंद; प्वासों अनुपात के निर्धारण में उनका उपयोग।

अंगदान करना है जिम्मा स्पॉन्-रेखा की ओर का घटक $-mg \cos \psi \cdot \sin (\phi - \psi)$ जितनी मात्रा का है। इस प्रकार हम निम्नलिखित गति-समीकरणों पर पहुँचते हैं—

$$(2) \quad M\ddot{X} = -M\frac{g}{L}X + mg\left(\frac{x-X}{l} - \frac{X}{L}\right)$$

$$m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}(x-X),$$

या, अधिकतर सुविधाजनक रूप में

$$(3) \quad \ddot{X} + \left(\frac{g}{L} + \mu\frac{g}{l} + \mu\frac{g}{L}\right)X = \mu\frac{g}{l}x,$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}X.$$

आगे से $L=l$ रख देंगे और संक्षिप्तिका

$$(4) \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

का उपयोग करेंगे। तो अब हमारे समीकरणद्वय (3) ये हो जाते हैं—

$$(5) \quad \ddot{X} + \omega_0^2(1+2\mu)X = \mu\omega_0^2x,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2X$$

ये गति-समीकरण कहते हैं कि ऊपरवाला लोलक निचले के साथ निचले के ऊपरवाले की अपेक्षा, μ बार कम दुर्बलता से युग्मित है।

समी० (5) को समाकलित करने के लिए हम (20.11) जैसे नीचे दिये प्रतिस्थापन का व्यवहार करते हैं

$$(6) \quad x = Ae^{\omega t}; \quad X = Be^{\omega t}$$

अतएव (5) से निम्नलिखित निकलता है

निर्धारण करने के लिए हम निम्नलिखित प्रकार से तर्क करते हैं : हलके गोलक अवलंबन में तनाव मुख्य तथा अवस्थितित्वीय बल (अपकेन्द्रीयबल) से संतुलित है। पश्चोक्त द्वितीय कोटि की लघुराशि है और इसलिए उपेक्षणीय है। इस परिस्थिति में $S = mg \cos \psi$. जैसा कि ऊपर कहा गया है।

किसी भारी लोलक (जैसे कि भाड़-फानूस) से प्रायः उसी दोलन काल का एक हलका लोलक लटका देते हैं। आइए भारी लोलक को एक सुनिश्चित आवेग दें। तो हलके लोलक में प्रबल गति का प्रादुर्भाव हो उठता है जो कि एकाएक शांत हो जाती है और थोड़ी देर के लिए शून्य ही रहती है। इस समय देखते हैं कि भारी लोलका, जोकि अब तक विराम-प्राय दशा में ही रहा था, अब लक्षणीय आयाम से दोलन करने लगता है। परन्तु यह दोलन धीरे-धीरे बंद हो जाता है और अब हलका लोलक फिर काफी प्रबलता से चलने लगता है; इसी तरह यह बारी-बारी से होता रहता है।

जैसा कह आये है, अभियाचना यह है कि इन दो गोलकों की संहतियाँ M और m बहुत ही असम हों, परन्तु उनके तुल्यात्मक दीर्घ्य, L और l लगभग एक जैसे ही हों तो समझिए कि—

$$\frac{m}{M} = \mu \ll 1$$

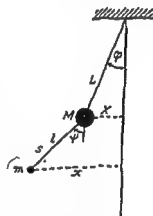
हम भारी लोलक के विस्थापन X और हलके लोलक के विस्थापन x , दोनों को लघु राशियाँ समझेंगे, ताकि यहाँ भी वृत्तों के चापों का उनकी स्पर्श-रेखाओं द्वारा सन्निकटन कर सकें। परिणामवश, कोणों ϕ और ψ को भी छोटा रखना पड़ेगा (दे० आकृति ३८, जिसमें ψ आपेक्षिक विस्थापन $x-X$ के लिए है)। अतएव कह सकते हैं कि—

$$\sin \phi \approx \phi = \frac{X}{L}; \quad \sin \psi \approx \psi = \frac{x-X}{l}$$

$$(1) \quad \text{और} \quad \sin(\psi - \phi) \approx \psi - \phi = \frac{x-X}{l} - \frac{X}{L};$$

$$\text{एवं, } \cos \phi \approx \cos \psi = \cos(\phi - \psi) \approx 1$$

ऊपर वाले लोलक पर न केवल गुरुत्व बल का वरन् निचले लोलक का भी प्रभाव पड़ता है। डोरी का तनाव* $S \approx mg \cos \psi$ भी M की गति को कुछ



आ० ३८—युगल लोलक की रेखांकित व्यवस्था।

(*) प्रस्तुत प्रारंभिक विवृति में हमें इस तनाव S का एक वर्णनात्मक सहायक राशि की भाँति उपयोग करना पड़ता है। आगे चलकर जब हम यही समस्या व्यापक लाग्रान्ज विधि द्वारा विश्लेषित करेंगे, तो प्रस्तुत प्रक्रम निष्प्रयोजन हो जावेगा। S का

अंशदान करना है जिसका स्पर्श-रेखा की ओर का घटक $-mg \cos \psi \cdot \sin (\phi - \psi)$ जितनी मात्रा का है। इस प्रकार हम निम्नलिखित गति-समीकरणों पर पहुँचते हैं—

$$(2) \quad M\ddot{X} = -M\frac{g}{L}X + mg \left(\frac{x-X}{l} - \frac{X}{L} \right)$$

$$m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}(x-X);$$

या, अधिकतर सुविधाजनक रूप में

$$(3) \quad \ddot{X} + \left(\frac{g}{L} + \mu\frac{g}{l} + \mu\frac{g}{L} \right)X = \mu\frac{g}{l}x,$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}X.$$

आगे से $L=l$ रख देंगे और संक्षिप्तिका

$$(4) \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

का उपयोग करेंगे। तो अब हमारे समीकरणद्वय (3) ये हो जाते हैं—

$$(5) \quad \ddot{X} + \omega_0^2(1+2\mu)X = \mu\omega_0^2x,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2X$$

ये गति-समीकरण कहते हैं कि ऊपरवाला लोलक निचले के साथ निचले के ऊपरवाले की अपेक्षा, μ बार कम दुर्बलता से युग्मित है।

समी० (5) को समाकलित करने के लिए हम (20.11) जैसे नीचे दिये प्रतिस्थापन का व्यवहार करते हैं

$$(6) \quad x = Ae^{i\lambda t}; \quad X = Be^{i\lambda t}$$

अतएव (5) से निम्नलिखित निकलता है

निर्धारण करने के लिए हम निम्नलिखित प्रकार से तर्क करते हैं; हलके गोलक अवलंबन में तनाव मुख्य तथा अवस्थितित्वीय बल (अपकेन्द्रीयबल) से संतुलित है। पश्चोक्त द्वितीय कोटि की लघुराशि है और इसलिए उपेक्षणीय है। इस परिस्थिति में $S = mg \cos \psi$. जैसा कि ऊपर कहा गया है।

$$(7) \quad \begin{aligned} A(\omega_o^2 - \lambda^2) &= B\omega_o^2 \\ B[\omega_o^2(1 + 2\mu) - \lambda^2] &= A\mu\omega_o^2. \end{aligned}$$

इन दो समीकरणों से प्राप्त B/A के दो मानों को यदि बराबर रख दें तो λ^2 में निम्नलिखित वर्गात्मक समीकरण पर पहुँचते हैं—

$$(8) \quad (\lambda^2 - \omega_o^2)^2 + 2\mu\omega_o^2(\omega_o^2 - \lambda^2) = \mu\omega_o^4.$$

इस समीकरण के दो मूलों को $\lambda^2 = \omega_o^2$ और $\lambda^2 = \omega'^2$ कहेंगे। μ के ऊँचे घातों को छोड़ देने से सुगमतापूर्वक इनके ये सन्निकट मान प्राप्त होते हैं—

$$(9) \quad \left. \begin{matrix} \omega \\ \omega' \end{matrix} \right\} = \omega_o \left(1 \pm \frac{1}{2}\mu^{\frac{1}{2}} \right)$$

तो वास्तविक रूप में लिखा हुआ, (5) का व्यापक हल निम्नलिखित है

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + b \sin \omega t + a' \cos \omega' t + b' \sin \omega' t, \\ X &= \gamma a \cos \omega t + \gamma b \sin \omega t + \gamma' a' \cos \omega' t + \gamma' b' \sin \omega' t. \end{aligned}$$

§ 20 की भाँति, यहाँ γ और γ' , B/A के वे मान हैं जो (7) से क्रमात् $\lambda^2 = \omega^2$ और $\lambda^2 = \omega'^2$ के लिए निकलते हैं, अर्थात्

$$(11) \quad \gamma = -\mu^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma' = +\mu^{\frac{1}{2}}; \text{ और इसलिए } \gamma' - \gamma = 2\mu^{\frac{1}{2}}.$$

अब समझिए कि निकाय के उत्तेजन के समय, $t=0$ पर,

$$(12) \quad x=0, \quad \dot{x}=0; \quad X=0, \quad \dot{X}=C.$$

तो परिणाम निकलता है कि—

$$\left. \begin{aligned} a+a' &= 0 \\ \gamma a + \gamma' a' &= 0 \end{aligned} \right\} a=a'=0.$$

$$\left. \begin{aligned} \omega b + \omega' b' &= 0 \\ \gamma \omega b + \gamma' \omega' b' &= C \end{aligned} \right\} b = \frac{C}{\omega(\gamma - \gamma')} ; \quad b' = \frac{C}{\omega'(\gamma' - \gamma)}.$$

अतएव हम अंतिम साधन ये प्राप्त करते हैं—

$$x = \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin \omega' t}{\omega'} \right)$$

(13)

$$X = \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t - \frac{\gamma'}{\omega'} \sin \omega' t \right).$$

आइए अब हम (11) को ध्यान में रखते हुए इनमें वेगों v और \dot{X} को पहचानें। तो अंत में हम प्राप्त करते हैं—

$$x = \frac{C}{2\mu^{\frac{1}{2}}} (\cos \omega' t - \cos \omega t),$$

(14)

$$\dot{X} = \frac{C}{2} (\cos \omega' t + \cos \omega t)$$

अतएव यदि कला वही हो तो भारी ऊपर वाले गोलक का वेग हलके निचले की अपेक्षा $\mu^{\frac{1}{2}}$ बार छोटा होगा। यह भी लक्ष्य करिए कि (14) हमारे प्रारम्भिक प्रतिबंधों (12) का पालन करते हैं। यही बात स्वयं विस्थापनों के लिए भी कही जा सकती है। वेगों की भांति, ω और ω' के मानों के पाम-वास होने के कारण, इनमें सकर होते हैं। समीकरणों (13) और (14) को समी० (209) के रूप के सदृश लिखकर यह मूर्च्छना स्पष्ट रूप में दिखलायी जा सकती है।

इस अध्याय को एक ऐसा प्रश्न देकर समाप्त करेंगे जो युग्मित दोलनों की श्रेणी में आता है और जिसमें कि ऊपर दिये हुए दोलनों के बहुत ही सदृश दोलन उत्पन्न होते हैं। परंतु तत्त्वबद्धी परिकलन के लिए एक सरलतर गणितीय विधि का उपयोग करेंगे जो § १९ के प्रणोदित* अवमदित दोलनों की विधि-जैसी होगी, ताकि दो युगपत् समीकरणों के स्थान पर केवल एक ही अवकल समीकरण के समाकलन का सामना करना पड़े।

तो आइए अपनी जेबघड़ी एक चिकनी कील पर इस प्रकार टांग दें कि घड़ी बिल्कुल स्वच्छंद लटके और घर्षण कम से कम हो। अपनी उँगलियों से या किसी कपड़े के टुकड़े से धीरे-धीरे झूकर घड़ी को बिल्कुल विराम की अवस्था में ले आइए। छोड़ने पर घड़ी तुरत ही गतियुक्त हो जाती है और विराम-दशा की ऊर्ध्वाधर स्थिति के प्रति बढ़ते हुए दोलन करने लगती है। ये दोलन एक गरल महत्तम आयाम के

* हम बिल्कुल ध्यापकतया कह सकते हैं कि किसी निकाय में बाह्य बल द्वारा दोलनों का उत्तेजन एक ऐसे अन्य निकाय के साथ युग्मन के तुल्य है, जिस पर पहला निकाय कोई प्रतिक्रिया नहीं करता। जिस स्थिति का वर्णन किये जाने को है उसके लिए तो निश्चय ही यह सच है कि दोलन-पहिये पर लोलकीय दोलन की प्रतिक्रिया शून्यप्राय कम होगी।

होकर कम होने लगते हैं और एक बार फिर विरामदशा में पहुँचते हैं। तत्पश्चात् पुराना प्रक्रम फिर चलता है।

घड़ी के इन दोलनों में हमें प्रकटतया उस गति का सामना करना पड़ता है, जो घड़ी के दोलन-पहिये के ताल के विरुद्ध प्रतिश्रिया द्वारा बनती है, अर्थात् कोणीय संवेग के अविनाशित्व वाले सिद्धांत की अभिव्यक्ति का। दूसरी ओर, दोलन आयामों के उच्चावचन का कारण व्यतिकरण है—गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्र में घड़ी के स्वतंत्र लोलकीय दोलन और दोलन-पहिये द्वारा उत्तेजित प्रणोदित दोलनों के बीच व्यतिकरण^१।

अपनी सचेतन-पद्धति में हम § १३, उप प्रक० २ का अनुसरण करेंगे। तदनुसार समझिए कि निकाय की संपूर्ण गति का कोणीय संवेग M है। इसे हम इन दो घटकों में विघटित कर लेते हैं, लोलक गति का कोणीय संवेग (p) और दोलन-पहिये का कोणीय संवेग (b); इस प्रकार

$$(15) \quad M = M_p + M_b$$

M_p अवलंबन बिंदु O (कील) के प्रति निकाला जाता है, M_b दोलन-पहिये के केंद्र (B) के प्रति। पश्चोक्त अनुज्ञेय है, क्योंकि विशुद्ध कोणीय संवेग (अर्थात् जो ऐसी गति द्वारा कारित होता है जिसमें निकाय का संहति-केंद्र स्थिर रहता है) ठीक बल युग्म की भांति (§ २३, समी० ९) अपने समतल में स्वेच्छया खिसकाया जा सकता है।* वास्तव में, दोलन पहिये की केंद्र B के प्रति समिति के कारण, उसकी अवस्थितिस्वीय क्रिया विशुद्ध संवेग-पूर्ण की होती है। समझिए कि दोलन-पहिये की वृत्तीय आवृत्ति ω है, वह दोलन-कमानी के कड़ेपन द्वारा निर्धारित होती है। समझिए कि लोलकीय दोलनों की शांत अर्थात् निजी वृत्तीय आवृत्ति ω_0 है। (11.6) और (16.4) के अनुसार हम

1. Fluctuation 2. Interference 3. Balance wheel

४ यह इस तथ्य का सीधा परिणाम है कि किसी दिये हुए अक्ष के प्रति किसी निकाय का कोणीय संवेग इन दो कोणीय संवेगों के योग में विघटित किया जा सकता है—संहति-केंद्र से जाते हुए समान्तर अक्ष के प्रति निकाय का कोणीय संवेग और दिये हुए अक्ष के प्रति संहति-केंद्र का (जिसमें निकाय की सारी संहति हो) कोणीय संवेग। प्रस्तुत स्थिति में उत्तर्युक्त पद शून्य हो जाता है, क्योंकि दोलन-पहिये के संहति-केंद्र का वह कोणीय संवेग जो सारी घड़ी के दोलन के कारण हुआ था, M_p में सम्मिलित कर लिया गया था।

(16) $M_p = I \dot{\phi}^2$, $I = m_p a^2$
 रख देते हैं। m_p घड़ी की भारी गड़्ढि है और a उसकी O से भारी हुई धरा-
 त्रिज्या है।¹ दोलन-पहिये के दोलनों को हम स्वीकृतनया ज्यामितीय मान लेंगे,
 जिन्हें इस कारण $\phi_b = x \sin \omega t$
 द्वारा वर्णित करेंगे। कोण ϕ_b का दीर्घ B है। तो दोलन-पहिये का कोणीय
 वेग होगा

(17) $M_b = m_b \omega b^2 x \cos \omega t$,
 जहाँ m_b दोलन-पहिये की संहति है और b उसकी, B से भारी गर्त, धरा-
 त्रिज्या।

जैसे कि योगिक लोलक में [समी० (16.1)], बाह्य बल का घूर्ण है—

(18) $L = -m_p g s \phi$,
 जहाँ, साधारण प्रधानुसार, छोटे ϕ के लिए सन्निकटन कर दिया है। यहाँ s घड़ी
 के गुरुत्वकेंद्र की O से दूरी है और ϕ वह कोण है जो O पर गुरुत्वकेंद्र में जाती
 हुई रेखा ऊर्ध्वाधर में बनाती है। अब हम (13.9) का अनुप्रयोग करते हैं, उसमें
 (15), (16), (17) और (18) में दिये हुए मानों का उपयोग करते हैं, और
 अपने निकाय के लिए निम्नलिखित गति-समीकरण प्राप्त करते हैं—

$$(19) \quad \ddot{\phi} + \frac{g s}{a^2} \phi = \frac{m_b}{m_p} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \alpha \omega^2 \sin \omega t$$

यह समीकरण उस प्रकार के दोलन को निरूपित करता है जिसकी विवृति
 § १९ में अनवमदित प्रणोदित दोलन की भाँति की गयी थी। हम फिर

$$\frac{g s}{a^2} = \omega_o^2$$

रख लेंगे जहाँ, याद होगा, ω_o लोलकीय गति की निजी आवृत्ति है। इसके अति-
 रिक्त निम्नलिखित संक्षेप भी कर लीजिए—

$$\epsilon = \frac{m_b}{m_p} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \alpha \omega^2 \ll 1.$$

तो अब समीकरण (19) हो जाता है

$$(20) \quad \ddot{\phi} + \omega_o^2 \phi = \epsilon \sin \omega t$$

आदि के प्रतिबंधों को सन्तुष्ट करनेवाला माधन कि $t=0$ पर $\phi=0$, $\dot{\phi}=0$ निम्नलिखित है

$$(21) \quad \phi = \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

नियतांक e इतना छोटा है (गुणनसंख्य m_b/m_p) कि दोलन दृश्य परिमाण का केवल तभी होगा जब कि संयंघ $\omega_0 = \omega$ का मभिन्नकटन होना हो, अर्थात् जब बाह्य लोलकीय दोलनों और दोलन-पट्टियों के आंतरिक दोलनों के बीच लगभग अनुनाद विद्यमान हो। आश्चर्य की बात यह प्रकट होती है कि यह अनुनाद न्यूनाधिकतया तभी होता है जबकि जेबपट्टी का आकार बहुत छोटा न हो (रमणियों की घड़ियाँ हम काम के लिए ठीक नहीं होती)।

समीकरण (21) और भी बतलाता है कि आयाम की मूर्च्छना और अनुनाद की पहुँचना ($\omega \rightarrow \omega_0$) दोनों साथ ही साथ चलते हैं। संकरो का आवर्तकाल T हम अभियाचना द्वारा निर्धारित होता है कि

$$(22) \quad \omega T = \omega_0 T \pm 2\pi,$$

और इसलिए उसका मान होगा

$$(22a) \quad T = \frac{2\pi}{|\omega - \omega_0|}$$

संकरो के दो निष्पदों के बीच होनेवाले लोलकीय दोलनों को गिनकर वह बहुत ही ठीक-ठीक निकाला जा सकता है और इसलिए वह अनुनाद के अंश की सुलभ और यथार्थ माप उपलब्ध कराता है। इस बारे में हम आकृति ३२ को देख सकते हैं जो, जैसा कि कह आये हैं, वैसा ही अबकल समीकरण को प्रदर्शित करती है, जैसा कि समी० (20)। परंतु यह याद रखना चाहिए कि रेखाकृति में हमने पूर्ण अनुनाद अर्थात् $T = \infty$ मान लिया था।

यदि घड़ी की थोड़ी देर के लिए अपने आप पर छोड़ दें तो देखेंगे कि संकर समाप्त हो जाते हैं। इसका कारण प्रकटतया घर्षण है (अवलंबन-स्थान पर और वायु का घर्षण), जिनकी अब तक उपेक्षा हुई है। यह घर्षण घड़ी की गति में स्वतंत्र लोलकीय दोलनों के अशदान को अवमदित कर देता है, केवल दोलन-पट्टिया-प्रणोदित दोलन रह जाते हैं; केवल इस, उत्थुक्त, अशदान के आयाम में घर्षण के कारण कुछ कमी हो जाती है (मिलाइए, उदाहरणतः, आकृति ३३)। हम इसका

कारण यों बता सकते हैं—आदि में प्रणोदित दोलन अपनी पूरी माया में विद्यमान होता है और स्वतंत्र लोलकीय दोलन इनकी माया में उत्तेजित होता है कि $t=0$ पर वह प्रणोदित दोलन को शून्यीकृत कर कर देता है, जो कि आदि के प्रतिपक्षों से सहमत है कि $\phi=\phi'=0$ वास्तव में, घड़ी की आदि की गतिहीन दशा एक ऐसे आवेग के कारण समझी जा सकती है जो कि दोलन-पहिया-कारित दालनों को ठीक शून्यीकृत कर देता है। इस आवेग के प्रभाव को घर्षण धीरे-धीरे नष्ट कर देता है, जिस कारण दोलन-पहिया-कारित केवल प्रणोदिन दोलन ही रह जाते हैं।

घड़ी का दृष्टांत इन बातों के साहित्य में पहले-पहल मन् १९०४ के "एलेक्ट्रो टेक्नीश जाइटशिफ्ट" में, तुल्यकालिक यंत्रज्ञान के "आखेट" की घटना के संबंध में, प्रकाशित किया गया था। यह बात उन दिनों के लिए समयानुरूप एवं आश्चर्यजनक थी। दो तुल्यकालिक प्रत्यावर्त्तक एक ही विद्युत्पथ को समांतरतया विद्युत्-शक्ति पहुँचाते हुए, अनुनाद होने के समय, अपनी गतियों तथा धाराओं में अवाछित उच्चावचन दिखाते हैं। हमारी घड़ीके संकरो का तथा जिन युग्मित दोलनों का हम अभी विश्लेषण कर चुके हैं, उनके युग्मन और अनुनाद का ये बहुत ही आवधिक चित्र प्रस्तुत करते हैं।

चतुर्थ अध्याय

दृढ़ पिंड

§ २२. दृढ़ पिंडों की चल-गतिकी

प्रकरण ७ के प्रारंभ में हमने देखा था कि दृढ़ पिंड छः स्वतंत्रता-संख्याओं से संपन्न है; इन्हें हम स्थानांतरण की तीन और घूर्णन की तीन संख्याओं में उपविभाजित करेंगे।

पहले हम पिंड की दो विभिन्न अवस्थाओं पर विचार करें—“आदि स्थान” और “अंतिम स्थान” की अवस्थाओं पर। पिंड के किसी भी एक बिंदु को “अभिदेश बिंदु” O निर्वाचित कर लेते हैं, और उसके चारों ओर (कहिए कि मात्रक त्रिज्या का) एक अभिदेश गोल^१ खींच लेते हैं। इस गोल पर दो बिंदु A और B चिह्नित कर लेते हैं। एक बार ये तीन बिंदु, O, A, B अपने आदि स्थानों से अंतिम स्थानों को ले जाये गये तो दृढ़ पिंड के अन्य सभी बिंदु उसी प्रकार अपने-अपने अंतिम ठिकानों पर पहुँच गये।

पहले हम बिंदु O को उसके आदि स्थान O_1 से उसके अंतिम स्थान O_2 को ले जाते हैं। समझिए कि यह एक समांतर विस्थापन अर्थात् स्थानांतरण द्वारा प्राप्त किया जाता है, जिसमें पिंड का प्रत्येक बिंदु उसी अक्षरेखीय विस्थापन $O_1 \rightarrow O_2$ के वश होता है। इस प्रकार स्थानांतरण की तीनों स्वतंत्रता-संख्याएँ हो गयीं।

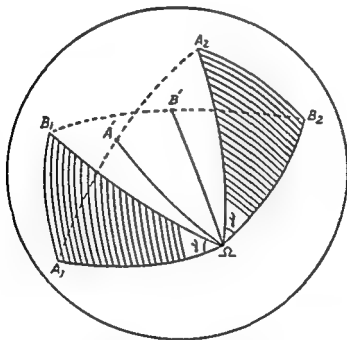
गोला K_1 जो O_1 के चारों ओर खींचा गया था, अब O_2 के चारों ओर रचित समतल गोले K_2 से संपात में^२ है। परंतु, व्यापकतया, A, B बिंदुओं के स्थानों के लिए ऐसा नहीं होगा। गोले K_1 पर इनके स्थानों को A_1, B_1 कहेंगे, गोले K_2 पर A_2, B_2 । अब दिखायेंगे कि बिंदु $O_1 = O_2$ के प्रति एक ऐसा निश्चित घूर्णन है जो A_1, B_1 बिंदुओं को A_2, B_2 तक पहुँचा देगा। इस घूर्णन का अक्ष और कोण, घूर्णन की तीनों स्वतंत्रता-संख्याएँ देते हैं जो स्थानांतरण की तीन स्वतंत्रता-संख्याओं से जोड़नी होगी।

1. Unit radius 2. Sphere of reference
3. In coincidence,

घूर्णन-अक्ष की रचना के लिए, अर्थात् उम बिन्दु Ω के निर्धारण के लिए जहाँ अक्ष मातृक गोले को काटना है, A_1 को A_2 में तथा B_1 को B_2 में घूर्णन वृत्तों के चापों द्वारा मिला दीजिए। इन चापों के केंद्रों A और B पर उन चापों के दो लम्बवत् द्विगटक गटे करिए। इन दोनों को काट ही उस बिन्दु Ω है। घूर्णन-कोण, जिसे Ω भी कहेंगे, निर्णयित होमा—

$$(1) \quad \Omega = \angle A_1 \Omega A_2 = \angle B_1 \Omega B_2$$

इन दो कोणों की समता, आकृति ३९ में गैरान्वित ग्यान द्वारा दिखाये गये गोलीय त्रिकोणों (त्रिभुजों), $A_1 \Omega B_1$, $A_2 \Omega B_2$ की सरांसममता का परिणाम है।



आ० ३९—बिन्दु Ω के लिए रचना।

एक स्थिर बिन्दु O के प्रति घूर्णन करते हुए दृढ़ पिंड के लिए घूर्णन-अक्ष बिन्दु Ω ही निर्धारित करता है। यह रेखाचित्र यह भी इंगित करता है कि दो परिमित घूर्णनों का परिणामो कैसे निकाला जा सकता है।

इन दोनों त्रिकोणों की संगत भुजाएँ परस्पर बराबर हैं। इससे निकलता है कि आ०

1. Perpendicular bisectors

३९ में γ द्वारा दिखाया जा चुका है कि दो कोण एक दूसरे के बराबर हैं। इन दोनों कोणों के किसी एक को यदि पूरे कोण A_1 और B_2 से घटा दें तो समी० (१) का दाहिना या बायाँ अंग प्राप्त होता है। यह समीकरण प्रकट करता है कि वही घूर्णन Ω न केवल बिंदु A_1 को A_2 पर पहुँचाता है, बल्कि बिंदु B_1 को भी B_2 पर पहुँचा देता है।

यहाँ तक स्थानांतरण के परिणाम और दिशा काफी दूरस्थ सीमाओं के बीच में रहते हुए अभी कुछ भी कह सकते हैं, क्योंकि अभिदेश बिंदु O के निर्वाचन में हमें पूर्ण स्वतंत्रता है। दूसरी ओर, घूर्णन का परिमाण और अक्ष अभिदेश बिंदु के निर्वाचन से स्वतंत्र है। क्योंकि समक्ष O के स्थान पर किसी अन्य अभिदेश बिंदु O' का निर्वाचन कर लेते हैं। दृढ़ पिंड के किसी दिये हुए पूर्ण विस्थापन के लिए O और O' से किये हुए स्थानान्तरणों का अंतर भी स्थानांतरण ही होगा। परंतु यह उत्तरोक्त स्थानांतरण K_1 और K_2 गोलों पर A, B बिंदुओं के स्थानों पर कोई प्रभाव नहीं डालता। इसका परिणाम यह निकला कि आ० ३९ की रचना बिना किसी परिवर्तन के प्रस्तुत स्थिति के लिए भी लागू है और न केवल वही पहले का घूर्णन कोण Ω प्रदान करती है, बल्कि अभिदेश बिंदु O' से जाता हुआ एक घूर्णन-अक्ष भी, जो पहले प्राप्त किये हुए अक्ष के समांतर होगा।

दृढ़ पिंड के परिमित विस्थापनों से कहीं अधिक महत्व के उसके वे अत्यणु^१ विस्थापन हैं, जो किसी परिमित गति के होने के लिए, एक के बाद दूसरे, अनवरत होते रहते हैं। इस लिए अब हम यह मान लेंगे कि स्थानांतरण का परिमाण O_1O_2 और घूर्णन कोण Ω स्वेच्छया छोटे हैं। उनको तदनुसार छोटे कालांतर Δt से भाग दे दीजिए। इस प्रकार हम स्थानांतरण का वेग u और घूर्णन का कोणीय वेग^२ ω प्राप्त करते हैं—

$$(2) \quad u = \frac{O_1O_2}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Delta t}.$$

१. प्रकरण २३ की शेषपूर्ति में देखेंगे कि हम, विशेषतया, स्थानांतरण की दिशा को घूर्णन अक्ष के समांतर कर सकते हैं। इसको “वेच विस्थापन” (स्कू डिसप्लेस-मेण्ट) कहते हैं।

1. Reference point

2. Infinitesimal

3. Angular velocity

पहले की भाँति, कोणीय वेग अभिदेश बिंदु O के निर्वाचन में स्वतंत्र है। परन्तु इस दम निर्वाचन पर निर्भर करता है। मोटा टाइप यह सूचित करता है कि ω को भी सदिश समझना होगा, जो न केवल कोणीय वेग का परिमाण, वरन् घूर्णन की अक्षीय दिशा भी व्यक्त करता है।

हम यह सहज ही दिखा सकते हैं कि ω में सदिश के लक्षण अवश्य होने हैं। पृष्ठ १६ की आ० १५ और समी० (13.4) में आभासी घूर्णन पर विचार-आलोचना करते हुए हमने यह संबंध व्युत्पन्न किया था कि—

$$(3) \quad \delta s = \delta \Phi \times r.$$

यदि अब हम आभासी घूर्णन $\delta \Phi$ से कोणीय वेग $\omega = \frac{d\Phi}{dt}$ को जा पहुँचें और घूर्णन कारित आभासी विस्थापन δs से वेग $w = \frac{ds}{dt}$ को, तो (3) से प्राप्त करते हैं कि—

$$(4) \quad w = \omega \times r$$

जैसे कि आ० १५ में r , घूर्णन अक्ष पर स्थित अभिदेश बिंदु O से बिंदु P तक की सदिश त्रिज्या है, जिसका वेग w निर्धारित करना है।

अब दृढ़ पिंड के बिंदु P की गति पर दो परस्परानुगामी अत्यणु घूर्णनों $\omega_1 dt$ और $\omega_2 dt$ के पूरे प्रभाव पर विचार कीजिए। यहाँ अभिदेश बिंदु O दोनों ω_1 और ω_2 के अक्षों के लिए उभयनिष्ठ है। हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$(4a) \quad w_1 = \omega_1 \times r, \quad w_2 = \omega_2 \times r,$$

$$w_1 + w_2 = (\omega_1 + \omega_2) \times r$$

इन समीकरणों के सबसे पिछले में बायाँ अंग वह वेग w_r है जो w_1 और w_2 से बनता है। (4) से तुलना करने पर देखते हैं कि—

$$(5) \quad \omega_r = \omega_1 + \omega_2$$

उसी भाँति परिणामी कोणीय वेग है जो दृढ़ पिंड पर अपने प्रभाव में दो घूर्णनों $\omega_1 dt$ और $\omega_2 dt$ के तुल्य है। इससे परिणाम निकलता है कि कोणीय वेगों का योग सदिशों की भाँति होता है। जैसा कि सदिशों में होता है, योग में उनका क्रम निष्प्रयोजनीय है अर्थात् उनका योग क्रमविनिमयशील^१ है, क्योंकि—

$$(6) \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1$$

इन दोनों नियमों में से कोई भी परिमित पूर्णनों के लिए र्थ नहीं है। उनका संयोजन गदिन-बीजगणि के मरन् नियमों का अनुसरण नहीं करना, किन्तु हैमिल्टन द्वारा आविष्कृत घनसंयोजनोप बीजगणित का। जो भी यह कि दो परिमित पूर्णनों का प्रभाव उनके क्रम पर निर्भर करता है। इस प्रकार के दो पूर्णनों का क्रमविनिमय नहीं होता।

इस स्थान पर ध्रुवीय और अक्षीय गदिनों के भेद पर विचार-आलोचना करना सुविधाजनक है।

ध्रुवीय सदृशों के उदाहरण हैं—वेग, त्वरण, बल, गदिन प्रिज्या, इत्यादि। ये तीराप्रयुक्त निर्देशित राशों द्वारा निरूपित किये जा सकते हैं। निर्देशांक प्रणाली के पूर्णन में उनके समकोणिक घटकों का ह्रासण निर्देशांकों की ही भांति होता है, अर्थात् $+1$ सारणिक के लवकोणीय रूपांतरण की व्यवस्था के अनुसार निर्देशांक प्रणाली के मूल बिंदु से होकर किये हुए प्रतिलोमीकरण में, जिनमें x, y, z क्रमात् $-x, -y, -z$ द्वारा प्रतिस्थापित किये जाते हैं, और रूपांतरण का सारणिक -1 होता है, ध्रुवीय सदृशों के घटकों के चिह्न बदल जाते हैं।

कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, घूँट और कोणीय सवेग अक्षीय सदृशों के उदाहरण हैं। अपनी-अपनी प्रकृति के अनुसार वे एक अक्ष द्वारा निरूपित किये जाते हैं, जिस पर पूर्णन का परिमाण और उसकी दिशा सूचित होती है (उदाहरणतः, एक वक्र तीर और एक सख्या द्वारा)। इसके स्थान पर यदि उन्हें अक्ष पर लगाये हुए एक संगत परिमाण के तीर द्वारा निरूपित करें तो तीर की दिशा के बारे में कोई कैसा भी समझौता कर लेना होगा, जैसे कि दक्षिणावर्त पेच का कायदा। निर्देशांक प्रणाली के शुद्ध पूर्णन में अक्षीय सदृशों के समकोणिक घटक अपने संगी तीरों के घटकों की भांति रूपांतरित होते हैं, अर्थात् लवकोणीयतया। परंतु निर्देशांकों के मूलबिंदु से होकर किये हुए प्रतिलोमीकरण में ये समकोणिक घटक चिह्न नहीं बदलते। इस प्रकार के रूपांतरण में दक्षिणावर्त पेच के कायदे के स्थान पर वामावर्त पेच का कायदा लेना होगा। यह इस बात के अनुरूप है कि मूलबिंदु से होनेवाले प्रतिलोमीकरण में दक्षिणावर्त निर्देशांक प्रणाली वामावर्त हो जाती है।

1. Algebra of quaternions

2. Rectangular components

4. Right handed screw

3. Determinant

5. Inversion

दो ध्रुवीय सदिशों का सदिश-गुणनफल एक अक्षीय सदिश होता है (उदाहरणतः, बल का घूर्ण)। अक्षीय सदिश और ध्रुवीय सदिश का सदिश गुणनफल ध्रुवीय सदिश होता है [यथा, समी० (४) में वेग \mathbf{w}]। निर्देशांकों के प्रतिलोमीकरण के अधीन इन गुणनफलों के आचरण की पड़ताल कर, पाठक सहज ही इस बात में अपना निश्चय कर सकता है*।

इन अप्रासंगिक बातों के बाद हम दृढ़ पिंड की चल-गतिकी को लौटते हैं। उसके प्रत्येक बिंदु की गति समी० (२) के स्थानान्तरण सवधी वेग \mathbf{u} और घूर्णन सवधी समी० (४) के वेग \mathbf{w} , इन दो वेगों की बनी होती है। अतएव दृढ़ पिंड के किसी भी बिंदु का वेग \mathbf{v} होगा—

$$(7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

अभिदेश बिंदु O का निर्वाचन पूर्णतया हमारे हाथों में है। उसके लिए

$$(7a) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}$$

होता है। बहुत-सी बातों के लिए O को संहति^३ केन्द्र G पर रख लेना लाभकारी होता है। यह प्रकट हो जायगा यदि, उदाहरणतः, हम पिंड की गतिज ऊर्जा निकालना चाहे। यहाँ

$$(8) \quad T = \int \frac{dm}{2} v^2.$$

इसके लिए (७) की सहायता से निम्नलिखित समीकरण बनाते हैं—

$$(8a) \quad v^2 = u^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + 2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

और तदनुसार T को तीन भागों में तोड़ देते हैं—

$$(9) \quad T = T_{transl} + T_{rot} + T_m$$

$$\left[= T_{\text{स्थानात}} + T_{\text{घूर्णन}} + T_{\text{मिश्रित}} \right],$$

* इससे आगे हम केवल मात्र ऐंठ L और कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ का उल्लेख करेंगे, यहाँ पाठक को याद रखना चाहिए कि इससे क्रमात् ऐंठ और कोणीय वेग के निष्पन्न अक्षीय सदिशों का मतलब है। दूसरी ओर, जब ऐंठ के समतल और कोणीय वेग के समतल का उल्लेख होगा तब उनसे, स्वभावतः, अक्षीय सदिशों, क्रमात् L और $\boldsymbol{\omega}$ के लंबवत् समतलों का मतलब होगा।

जहाँ T_m "मिश्रित" ऊर्जा है जो स्थानांतरण और घूर्णन के मेल से निर्धारित होती है।

कारण कि u का मान सभी बिंदुओं dm के लिए वही है, हम प्रकटतया प्राप्त करते हैं —

$$(10) \quad T_{transl} = \frac{u^2}{2} \int dm = \frac{m}{2} u^2.$$

T_m निकालने के लिए हम निम्नलिखित रूपांतरण करते हैं —

$$(11) \quad \begin{aligned} T_m &= \int u \cdot \omega \times r \, dm \\ &= u \cdot \omega \times \int r \, dm \\ &= mu \cdot \omega \times R, \end{aligned}$$

जहाँ R बिंदु O से सहति-केंद्र G तक का निर्देशित सदिश है —

$$(11a) \quad R = \frac{1}{m} \int r \, dm$$

जैसे समी० (13.3b) में। अब यदि O को G से सपाती कर दे, तो $R=0$ और,

$$(11) \quad \begin{aligned} (11b) \quad T_m &= 0, \end{aligned}$$

तो अब गतिज ऊर्जा T केवल-मात्र स्थानांतरण कारित ऊर्जा T_{transl} और घूर्णन कारित ऊर्जा T_{rot} का योग हो जाती है। चलते-चलते, यह भी लक्ष्य कीजिए कि यदि पिंड किसी स्थिर बिंदु के प्रति घूर्णन करता है और यदि वही बिंदु अभिदेश बिंदु O निर्वाचित कर लिया जाय तो न केवल T_m वरन् T_{transl} भी शून्य हो जाता है (क्योंकि दोनों स्थितियों में $u=0$), अतएव

$$(11c) \quad T = T_{rot}$$

अब गतिज ऊर्जा के घूर्णनीय अंशदान पर हम ध्यान केंद्रित करेंगे। यदि $\omega \times r$ के घटको का वर्ग करें तो (8a) के मध्यपद से प्राप्त करते हैं —

$$(12) \quad \begin{aligned} 2 T_{rot} &= \omega_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \omega_y^2 \int (z^2 + x^2) dm \\ &\quad + \omega_z^2 \int (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - 2 \omega_x \omega_y \int yz dm - 2 \omega_x \omega_z \int zx dm - 2 \omega_y \omega_z \int xy dm. \end{aligned}$$

निम्नलिखित संकेतन

$$(12a) \quad \begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm \dots \\ I_{xy} &= \int xy dm \dots \end{aligned}$$

के साथ, (12) देता है

$$(12b) \quad 2T_{rot} = I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 \\ - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y.$$

(11.3) में प्रविष्ट परिभाषा के अनुसार, I_{xx} है सहति-वितरण का अवस्थितत्व घूर्णन x -अक्ष के प्रति। I_{yy} और I_{zz} के लिए भी सगत बात लागू है। I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} को हम अवस्थितत्व गुणनफल कहेंगे (कभी-कभी इनके लिए “अपकेन्द्र घूर्णन” नाम का पर्यायतया व्यवहार किया जाता है)। I_{xx} को भी बिना किसी द्व्यर्थकता के हम I_x में संक्षिप्त कर सकते हैं।

(11.5) के अनुसार (12) के बाये अंग को $I\omega^2$ रख देते हैं और संक्षिप्तिकाओं

$$(13) \quad \frac{\omega_x}{\omega} = \alpha, \quad \frac{\omega_y}{\omega} = \beta, \quad \frac{\omega_z}{\omega} = \gamma,$$

के साथ प्राप्त करते हैं —

$$(13a) \quad I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha - 2I_{xy}\alpha\beta.$$

α , β , γ सदिश ω की दैशिक कोज्याएँ हैं और ω का अक्ष दृढ़ पिंड में कहीं-भी स्थापित कर दिया जाता है। (13a) में परिणाम निकलता है कि एक बार छः परिमाण I_{ik} दे दिये जायें तो किसी अक्ष के प्रति अवस्थितत्व घूर्णन पूर्णतया निर्धारित हो जाता है।

हमारे I_{ik} के प्रकार के परिमाण-पष्ठक^१ को टेन्सर (Tensor तानक) या, अधिक ठीक तरह से, समित या ससमित टेंसर कहते हैं। इस नाम का जन्म प्रत्यास्यतावाद में हुआ था जहाँ प्रतिबल और कर्ष^२ के टेन्सर प्रधान भाग लेते हैं। व्यापकतया, टेंसर अति उपयुक्ततया एक वर्ग अनुसूची की भाँति लिखा जाता है। प्रस्तुत स्थिति में यह निम्नलिखित होगा—

$$(13b) \quad I_{ik} \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yz} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{xy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

जहाँ $I_{xy} = I_{yx} \dots$

प्रारम्भिक दृष्टिकोण से टेन्सरों का गणित सदृशों के गणित से कम साकार और सुयोध है। सदिश को रेखाखंड द्वारा निरूपित करते हैं, परंतु टेन्सर के ज्यामितीय निरूपण के लिए हमें द्वितीय घात के तल की धरण लेनी पड़ेगी। प्रस्तुत स्थिति में यह “टेन्सर तल” इस प्रकार प्राप्त होता है कि हम —

से भिन्न निर्देशांक प्रणाली में रचा जाय तब मन ही मन में मुख्य अक्षों की तीन दैर्घिक परामितियाँ जोड़ लेनी चाहिए। इस प्रकार फिर समिति^१ टेमर के लक्षण बनानेवाले छः परिमाणों पर पहुँचते हैं।

सहति वितरण के प्रत्येक समिति-समतल स्वभावतया घूर्णीय दीर्घवृत्तज के भी समिति-समतल होते हैं। घूर्णीय समिति वाले सहति वितरण का एक घूर्णीय परिक्रमण-दीर्घवृत्तज होता है, अर्थात् "आकृतीय अक्ष" की ओर मुख्य अक्ष होन के अतिरिक्त उसके अनन्ततया अनेक अन्य "निरक्षीय"^२ मुख्य अक्षमृन्द होते हैं। दृष्टान्त की भाँति हम दो प्रकार के लट्टुओं का जिक्र कर सकते हैं—एक तो शकु के आकार का, जो खिलौने की भाँति काम में आता है, और दूसरा गणिचालक चक्र के रूप का, जो बहुधा निदर्शनकार्यों के लिए व्यवहार में लाया जाता है (आ० ४० ए और बी)। प्रथम प्रकार में, पिंड के अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण लघुतम होता है। अतएव सगत मुख्य अक्ष निरक्षीय अक्षों से अधिक लंबा होता है (समथ $I = I^{\frac{1}{2}}$ के विचार से)। यहाँ एक उच्चक्ष उपगोल^३ प्राप्त होता है। दूसरे प्रकार में आकृतीय अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण महत्तम होता है। अतएव सगत मुख्य अक्ष, उसी कारणवश, निरक्षीय अक्षों से छोटा होता है और परिणाम होता है निम्नाक्ष उपगोल।^४

प्रसंगवश, घूर्णीय दीर्घवृत्तज परिक्रमण दीर्घवृत्तज हो जाता है, न केवल घूर्णीय समिति वाले सहति वितरण के लिए, अपि च जब कभी भी दो में अधिक समिति-समतल किसी अक्ष से होकर जाते हैं, यथा उदाहरणार्थ, वर्ग या पञ्चभुजीय समपाद्वर्ग^५ में।

इसी प्रकार दीर्घवृत्तज भ्रष्ट होकर गोल बन जाता है, न केवल गोलीयतया समिति वितरण में, वरन्, उदाहरणार्थ, घनात्मक वितरण जैसी स्थितियों में भी, क्योंकि यहाँ टेमर तल के दीर्घवृत्तजीय रूप में सगत जितने समतल हो सकते हैं, उनसे अधिक समितिसमतल विद्यमान होते हैं। ऐसी स्थिति में हम "गोलीय लट्टू" की बात करते हैं। गोलीय लट्टू (दे० आ० ४० सी) में कोई भी अक्ष मुख्य अक्ष है।

§ २२ दृढ़ पिंडों की स्थैतिकी

यह विषय निर्माण संबंधी यांत्रिकी के संपूर्ण क्षेत्र, अर्थात् सेतुओं, पुस्तों, मेहरावों आदि की रचना का सैद्धांतिक आधार है। अतएव यांत्रिक इंजीनियरी की

- | | |
|---------------------|--------------------|
| 1. Symmetrical | 2. Equatorial |
| 3. Prolate spheroid | 4. Oblate spheroid |
| | 5. Prism |

$$(14) \quad \alpha = \frac{\xi}{\rho}, \quad \beta = \frac{\eta}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\zeta}{\rho},$$

रख देते हैं जहाँ ξ, η, ζ से कार्तीय निर्देशांकों का मतलब है। अतएव

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$$

को बिंदु O से सदिश विज्या समझना चाहिए। ρ का अब $I^{-\frac{1}{2}}$ के बराबर रख देते हैं और O होकर जाते हुए प्रत्येक अक्ष पर I नहीं, बरन् $I^{\frac{1}{2}}$ का व्युत्क्रम जितना दैर्घ्य लगा देते हैं (नहीं तो द्वितीय घात का तल न प्राप्त होगा)। इस प्रकार (13a) से प्राप्त करते हैं—

$$(15) \quad 1 = I_{xx}\xi^2 + I_{yy}\eta^2 + I_{zz}\zeta^2 - 2I_{xy}\eta\xi - 2I_{xz}\xi\zeta - 2I_{yz}\xi\eta.$$

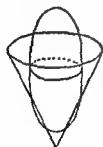
संभावित भ्रष्टताओं को छोड़कर यह दीर्घवृत्तज का समीकरण है, क्योंकि परिमित संहति वितरण के लिए I व्यापकतया धून्य से अधिक होता है। समी० (15) द्वारा निरूपित तल 'पूर्णिय दीर्घवृत्तज' कहाता है।

यदि निर्देशांकों का रूपांतरण इस भाँति कर दें कि वे दीर्घवृत्तज के मुख्य अक्षों से संपाती हो जायें तो इस रूप का समीकरण प्राप्त होता है—

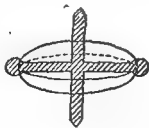
$$(15a) \quad 1 = I_1\xi_1^2 + I_2\xi_2^2 + I_3\xi_3^2,$$

जहाँ I_1, I_2, I_3 तीन मुख्य अवस्थित्व धूणें हैं। मुख्य अक्षों के लिए अवस्थित्व गुणनफल धून्य हो जाते हैं, और इसे मुख्य अक्षों की एक परिभाषा समझ सकते हैं।

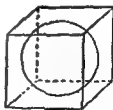
(13b) की टेन्सर अनुसूची विकर्ण के रूप की रह जाती है। जब टेन्सर मुख्य अक्षों



a)



b)



c)

आ० ४० ए-सी.—(ए) खेल के लट्टू का धूर्णिय दीर्घवृत्तज; (बी) गतिपालक चक्रलट्टू का धूर्णिय दीर्घवृत्तज; (सी) गोलीय लट्टू का एक उदाहरण।

से भिन्न निर्देशांक प्रणाली में रचा जाय तब मन ही मन में मुख्य अक्षों की तीन दैशिक परामितियाँ जोड़ लेनी चाहिए। इस प्रकार फिर समित^१ टेनर के लक्षण बतानेवाले छः परिमाणों पर पहुँचते हैं।

महति वितरण के प्रत्येक समिति-समतल स्वभावतया घूर्णीय दीर्घवृत्तज के भी समिति-समतल होते हैं। घूर्णीय समिति वाले महति वितरण का एक घूर्णीय परिक्रमण-दीर्घवृत्तज होता है, अर्थात् “आकृतीय अक्ष” की ओर मुख्य अक्ष होने के अतिरिक्त उसके अनन्ततया अनेक अन्य “निरक्षीय”^२ मुख्य अक्षवृन्द होते हैं। दृष्टांत की भाँति हम दो प्रकार के लट्टुओं का जिक्र कर सकते हैं—एक तो शकु के आकार का, जो खिलौने की भाँति काम में आता है, और दूसरा गतिचालक चक्र के रूप का, जो बहुधा निदर्शनकार्यों के लिए व्यवहार में लाया जाता है (आ० ४० ए और बी)। प्रथम प्रकार में, पिंड के अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण लघुतम होता है। अतएव सगत मुख्य अक्ष निरक्षीय अक्षों में अधिक लंबा होता है (मवध $\rho = I^{\frac{1}{2}}$ के विचार से)। यहाँ एक उच्चाक्ष उपगोल^३ प्राप्त होता है। दूसरे प्रकार में आकृतीय अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण महत्तम होता है। अतएव सगत मुख्य अक्ष, उसी कारणवश, निरक्षीय अक्षों से छोटा होता है और परिणाम होता है निम्नाक्ष उपगोल।^४

प्रसंगवश, घूर्णीय दीर्घवृत्तज परिक्रमण दीर्घवृत्तज हो जाता है, न केवल घूर्णीय समिति वाले सहति वितरण के लिए, अपि च जब कभी भी दो में अधिक समिति-समतल किसी अक्ष से होकर जाते हैं, यथा उदाहरणार्थ, वर्ग या पद्भुजीय समपाश्वर्य^५ में।

इसी प्रकार दीर्घवृत्तज भ्रष्ट होकर गोल बन जाता है, न केवल गोलीयतया समिति वितरण में, वरन्, उदाहरणार्थ, घनात्मक वितरण जैसी स्थितियों में भी, क्योंकि यहाँ टेनर तल के दीर्घवृत्तजीय रूप से सगत जितने समतल हो सकते हैं, उनसे अधिक समितिसमतल विद्यमान होते हैं। ऐसी स्थिति में हम “गोलीय लट्टू” की बात करते हैं। गोलीय लट्टू (दे० आ० ४० सी) में कोई भी अक्ष मुख्य अक्ष है।

§ २३ दृढ़ पिंडों की स्थैतिकी

यह विषय निर्माण संबंधी यांत्रिकी के संपूर्ण क्षेत्र, अर्थात् सेतुओं, पुस्तों, मेहराबों आदि की रचना का सैद्धांतिक आधार है। अतएव यांत्रिक इंजीनियरों की

1. Symmetrical

2. Equatorial

3. Prolate spheroid

4. Oblate spheroid

5. Prism

पाठ्य पुस्तकों में गणितीयतया एवं लेखाचित्रीयतया दोनों भाँति, उसकी अतीव व्योरेवार विवृति होती है। यहाँ हम विषय की केवल व्यापक बातें ही लेंगे।

(१) साम्यावस्था के प्रतिबंध

साम्यावस्था के सभी प्रश्नों की भाँति ये प्रतिबंध भी आभासी कर्म के सिद्धांत के अंतर्गत हैं। कारण कि यह सिद्धांत दालांबेरे सिद्धांत की एक विशेष स्थिति समझा जा सकता है जिसमें अवस्थितित्व बल शून्य है, इसलिए हमारा प्रस्तुत विश्लेषण § १३ के रेखीय और कोणीय संवेगों के सिद्ध तत्त्वों के नमूने पर किया जा सकता है। वास्तव में जिन आभासी विस्थापनों (स्थानान्तरण और घूर्णन) का वहाँ व्यवहार किया गया है वे प्रकटतया दृढ़ पिंड के आंतरिक संबंधों से संगत हैं और पिछले प्रकरण में विचारे हुए दृढ़ पिंड की व्यापक गति के दो घटक भागों के अनुरूप हैं।

समीकरणों (13.3) और (13.9) में अवस्थितित्व बलों को हटा देने से हम दृढ़पिंड की साम्यावस्था के व्यापक प्रतिबंधों को निम्नलिखित रूप में प्राप्त करते हैं—

$$(1) \quad \Sigma F_k = 0, \quad \Sigma L_k = 0.$$

ये F_k दृढ़ पिंड के किन्हीं भी बिंदुओं P_k पर आरोपित बाह्य बलबुन्द हैं। प्रथम समीकरण (1) हमसे बल सदिशों को, उनके अनुप्रयोग-बिंदुओं पर ध्यान दिये बिना ही, सिरों से सिरा लगाकर किसी भी क्रम में रखने को, और पारिणामिक बल बहुभुज^१ पर विचार करने को कहता है। समीकरण (1) के अनुसार साम्यावस्था के लिए बलों के बहुभुज को बंद होना चाहिए।

L_k इन F_k के एक ऐसे अभिदेश बिंदु O के प्रति के घूर्ण हैं जिसका निर्वाचन कुछ भी हो सकता है, परंतु जो सभी F_k के लिए वही हो। दूसरा समीकरण (1) हमसे इन L_k ओं को उनके (अक्षीय)सदिश निरूपकों द्वारा प्रतिस्थापित करने को (देखिए पृ. ४९) और ऐंठों के उस बलभुज पर विचार करने को कहता है जो इन सदिशों का सदिक् योग करने से बनता है। द्वितीय समीकरण (1) के अनुसार, ऐंठ-बहुभुज भी, साम्यावस्था प्राप्त करने के लिए, बंद होना चाहिए।

समीकरणों (13.12) और (13.13) के सादृश्य में, हम (1) के दो समीकरणों से निम्नलिखित छ. घटक समीकरणों को पहुँच सकते हैं—

$$(2) \quad \begin{aligned} \Sigma X_k &= \Sigma Y_k = \Sigma Z_k = 0 \\ \Sigma (y_k z_k - z_k y_k) &= \Sigma (z_k x_k - x_k z_k) \\ &= \Sigma (x_k y_k - y_k x_k) = 0. \end{aligned}$$

1. Force polygon

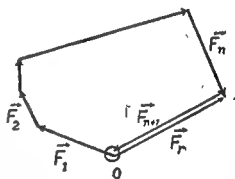
ये निर्देशांक अक्षों पर सदिश समीकरणों (I) के प्रक्षेपों को निरूपित करते हैं। ये x_k, y_k, z_k , बिंदु O को मूल बिंदु मान कर, वहाँ से मापे हुए अनुप्रयोग बिंदुओं के निर्देशांक हैं।

(२) सामर्थ्य-तुल्यता; बल निकायों का लघुकरण

यदि बाह्य बलवृन्द (या ऐंठे) साम्यावस्था न उत्पन्न करते हों तो हम पूछ सकते हैं कि क्या कोई ऐंठे गुणों का एकाकी बल (या एकाकी ऐंठ) हो सकता (या सकती) है कि केवल उसी के कारण दृढ़ पिंड उसी प्रकार चले जैसे कि दिये हुए बलों (या ऐंठों) के निकाय की क्रिया के अधीन चलता है?

यह प्रश्न उठाना, अन्य बातों के साथ-साथ, इस बात के लिए भी उपयोगी है (यद्यपि व्यापकतया वह उसके लिए पर्याप्त न भी हो) कि यदि दृढ़ पिंड पर ऐसे बलों का निकाय आरोपित हो जो स्वयं साम्यावस्था नहीं उत्पन्न करा सकते, तो उन बलों का निर्धारण किया जा सके जो दृढ़ पिंड पर उसके आधारों द्वारा डाले जाते हैं।

प्रस्तुत स्थिति में “खुले हुए” बहुभुज F_1, F_2, \dots, F_n (आ० ४१) को बद करने वाले खंड को एक बार उम दिशा में जिसमें कि बहुभुज बनाया गया था (F_{n+1}) और एक बार इससे विपरीत दिशा में खींचने में, F_r परिणामी बल, हमें उक्त प्रश्न का उत्तर मिलता है। इसमें, (अर्थात्



विपरीत दिशाओं में एक ही खंड की आकृति ४१.—एक “खुले हुए” बलों के बहुभुज का परिणामी बल निकालने के लिए रचना।

एक बद बल बहुभुज, $F_1 \dots F_{n+1}$, और एक एकाकी बल F_r है। इन दोनों को माय-माय लेना “खुले हुए” बल-बहुभुज $F_1 \dots F_n$ के सामर्थ्य-तुल्य है। परंतु बल वृन्द $F_1 \dots F_{n+1}$ साम्यावस्था में है और उनकी उपेक्षा की जा सकती है। अतएव एकाकी बल F_r दिये हुए बलों $F_1 \dots F_n$ के निकाय के सामर्थ्य-तुल्य है। गणितीयतया,

$$(3) \quad \mathbf{F}_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$$

इसी प्रकार का तर्क "खुले हुए" ऐंठ-बहुभुज के साथ भी किया जा सकता है। इससे एक परिणामी बल-घूर्ण \mathbf{L} प्राप्त होता है जो दिये हुए घूर्णों $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$ के निकाय के सामर्थ्यतुल्य है, अर्थात्

$$(4) \quad \mathbf{L}_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k.$$

चलते-चलते यह भी कह देना चाहिए कि एकाकी बल \mathbf{F}_r के उसी बिंदु O पर आरोपित करने में हमें कोई रोक नहीं है जो घूर्णों \mathbf{L}_k का हिमाव करने के लिए अभिदेश बिंदु लिया गया था। यह निर्वाचन आ० ४१ में इंगित है।

(३) अभिदेश बिंदु का परिवर्तन

समी० (3) तुरत ही दिखला देता है कि \mathbf{F}_r अभिदेश बिंदु O के निर्वाचन से बिल्कुल स्वतंत्र है। अतएव यदि किसी दूसरे अभिदेश बिंदु O' के लिए एकाकी परिणामी \mathbf{F}'_r हो तो

$$(5) \quad \mathbf{F}'_r = \mathbf{F}_r$$

दूसरी ओर, समी० (4) से, \mathbf{L}'_r के तदनुसार अर्थ होने हुए, हमें प्राप्त होता है

$$(6) \quad \mathbf{L}'_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{L}'_k \text{ जहाँ } \mathbf{L}'_k = \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k$$

यहाँ \mathbf{r}'_k बिंदु O' से \mathbf{F}_k के अनुप्रयोग-बिंदु P_k तक मापी हुई सदिश त्रिज्या है। समझिए कि O' से O तक की सदिश दूरी \mathbf{a} है। तो,

$$(6a) \quad \mathbf{r}'_k = \mathbf{a} + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{L}'_k = \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k + \mathbf{L}_k$$

अतएव

$$(6b) \quad \mathbf{L}'_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k$$

$$= \mathbf{a} \times \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k + \mathbf{L}_r$$

परंतु (3) के विचार से

$$\mathbf{a} \times \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k = \mathbf{a} \times \mathbf{F}_r$$

अतएव हम प्राप्त करते हैं—

$$(7) \quad L'_r = L_r \times a \times F_r$$

४—चल-गतिकी और स्थैतिकी की तुलना

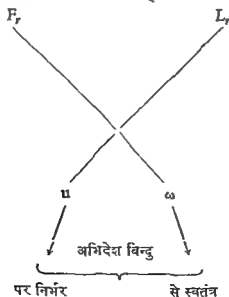
जैसा कि मसौ० (22.2) के मवध में कहा गया था, चलगतिकी में ω अभिदेश बिन्दु के निर्वाचन में स्वतंत्र होता है, परन्तु u उस निर्वाचन पर निर्भर करता है। हम लिखते हैं कि—

$$(8) \quad \omega' = \omega$$

और, (22.7) से, $v = u'$ तथा $r = a$ रखकर

$$(9) \quad u' = u + \omega \times a.$$

इस समीकरण की वही बनावट है जो (7) की, बसतों कि मदितीय गुणनफल में गुणन-तइों के क्रम पर ध्यान न दे। यदि समीकरणों (5) और (6) को भी विचार में ले तो स्थैतिकी और चलगतिकी के बीच हम एक विलक्षण पारस्परिकता पर पहुँचते हैं जो नीचे दिये हुए ढग में व्यक्त की जा सकती है—



यह कैचीवत् पारस्परिकता¹ बल-युग्म और घूर्णन-युग्म की धारणाओं के बीच भी होती है जिसका वर्णन अब किया जायगा।

बल-युग्म (या, संक्षेप में, “युग्म”) प्रारंभिक स्थितिकी में एक मौलिक तत्त्व है। जैसा कि भली भाँति ज्ञात है, एक युग्म में दो समांतर तथा प्रतिकूल, एक ही परिमाण के बल, $\pm F$, होते हैं जिनकी क्रिया की रेखाएँ एक दूसरे से परिमित दूरी, कहिए कि l , पर होती है। यदि इस प्रकार के युग्म का लघुकरण उपप्रकरण (2) के भाव में करें तो हमें प्राप्त होता है—

$$(10) \quad \vec{F}_r = 0; \quad \vec{L}_r = \vec{L}; \quad \left| \vec{L} \right| = |F| l,$$

जहाँ सदिश \vec{L} को दोनों बलों के समतल से लंबवत् दिशा में समझना चाहिए। परंतु जहाँ, पहले का \vec{L}_r अभिवेश बिंदु O से, कहना चाहिए कि, लगा हुआ था, तहाँ हमारा प्रस्तुत \vec{L} सभी अभिवेश बिंदुओं के लिए वही होगा और आकाश में चलने के लिए पूर्णतया स्वतंत्र होगा; अर्थात् दो दिये हुए युग्म समितीयतया जोड़े जा सकते हैं और एक तीसरा युग्म प्रदान करते हैं; दो सम तथा प्रतिकूल घूर्णों के, समांतर समतलों में आरोपित, युग्म कट जाते हैं, इत्यादि।

आइए, घूर्णन-युग्म की परिभाषा कर अपनी उक्त विधि द्वारा इंगित कँचीवत् पारस्परिकता का कुछ और अध्ययन करें। घूर्णन-युग्म से मतलब है दो सम और प्रतिकूल घूर्णनकारी वेगो $\pm \omega$, का जिनके अक्ष परस्पर समांतर पर कुछ दूरी, l , पर हों। जोड़ने के कायदे (23.5) के अनुसार, घूर्णन-युग्म के लघुकरण से एक परिणामी घूर्णनकारी वेग $\omega_r = 0$, प्राप्त होता है। अतएव हमारा दोनों घूर्णन-युग्म घूर्णन अक्षों के समतल के लंबवत् एक शुद्ध स्थानांतरण को जन्म देता है। इस स्थानांतरण के

वेग का परिमाण सहज ही $|\vec{u}| = \omega l$ पाया जाता है। अतएव अपनी पारस्परिकता विधि के भाव में समीकरणों (10) से सादृश्य बिलकुल पूरा हो गया। हमारा पहले का \vec{u} तो अभिवेश बिंदु O के निर्वाचन पर निर्भर करता था, परंतु घूर्णन-युग्म के तुल्य का

\vec{u} अभिवेश बिंदु से स्वतंत्र है और अपने तई गमातर रखते हुए आकाश में किसी भी प्रकार स्थानांतरित किया जा सकता है। इससे यह निकलता है कि दो स्वेच्छया

स्थित घूर्णन-युग्म, ठीक अपने स्थानांतरण वेग \vec{u} की भाँति, सदिशीयतया जुड़ते हैं; दो समान और प्रतिकूल घूर्णों के, समांतर समतलों में स्थित, घूर्णन-युग्म कट जाते हैं, इत्यादि।

शेषपूर्ति : रिच' और पेच-विस्थापन

समी० (7) में देगते हैं कि L_r अभिदेश बिंदु पर निर्भर करता है। अतएव इस बिंदु का निर्वाचन इस तरह करने को मन होना है कि L_r और F_r समांतर हो जायें। तब हम रिच नामक बलनिकाय का एक विशेषतया मूल चित्र प्राप्त करते हैं, अर्थात् एक एकाकी बल और इस बल के प्रति काम करना हुआ एक पूर्ण या, तुल्यात्मकतया, उग बल के लंबवत् समतल में स्थित एक युग्म। यदि आदि का अभिदेशबिंदु हो O , तो रिच के लिए आवश्यक O' का स्थान इस प्रकार प्राप्त किया जाता है। समी० (7) में हम L_r को F_r के समांतर L_p तथा उगके लंबवत् L_n में विघटित कर लेते हैं और a को निम्नलिखित समीकरण में निर्धारित करते हैं —

$$(11) \quad L_n = -a \times F_r,$$

तो अब (5) और (7) में अभिदेश बिंदु O' के लिए प्राप्त करते हैं —

$$F' = F_r, \quad L' = L_p \parallel F_r.$$

जैसा कि रिच की परिभाषा की अभिधाचना है। समी० (11) कहता है कि इस काम के लिए अभिदेश बिंदु O को निम्नलिखित दूरी a से F_r और L_n के लंबवत् विस्थापित करना होगा—

$$a = - \frac{|L_n|}{|F_r|}.$$

पिछली विवृति के भाव का, पर उगका ठीक अनुलोम, तर्क पेच-विस्थापन को पहुँचाता है। समी० (9) को प्रारम्भ-स्थल लेकर हम ω को ω के समांतर ω_p और उसके लंबवत् ω_n में विघटित कर लेते हैं। पेच के लिए अभिदेशबिंदु का जो विस्थापन a चाहिए वह निम्नलिखित समीकरण निर्धारित करता है —

$$(12) \quad \omega_n = -\omega \times a.$$

तो अब (8) और (9) से निम्नलिखित अभिदेश बिंदु O' प्राप्त करते हैं —

$$(13) \quad \omega' = \omega, \quad u' = \omega_p \parallel \omega,$$

जो, वास्तव में, एक पेच-विस्थापन समीकरण निरूपित करता है। समीकरण (12) कहता है कि यही अभिदेश बिंदु O कुछ दूरी द्वारा ω और ω_n से लंबवत् विस्थापित होना चाहिए।

१७४

थापन की धारणा चित्ताकर्षक तो है, परंतु घूर्णन संबंधी विशिष्ट
मे उसका कोई बड़ा व्यावहारिक मान नहीं है। इसीलिए उनकी
रिच और पेच-वि^र छोड़ दी गयी थी।

समस्याओं के उपचार^र के रैखिक तथा कोणीय संवेग। रैखिक और कोणीय
वात शेषपूर्ति^र के लि

१ २४. दृढ़ पिंड

वेग से उनका संबंध

कि किसी दृढ़ पिंड को एक स्थानांतरण-संवेग (रैखिक संवेग,
ह घूर्णन संवेग (सवेग-घूर्णन, आवेगी ऐंठ) दे दिये गये हैं। इन में

कल्पना कीजिए: p और पश्चोक्त को M कहिए।

आवेगी बल) और आवेगों $dp = v dm$ के योग से निकाला जाता है, अर्थात्
से प्रथमोक्त को अक्षर

$$p \text{ सारे रैखिक } \vec{p} = \int d\vec{p} = \int v dm.$$

की सहायता से प्राप्त करते हैं—

$$(1) \quad \vec{p} = u \int dm + \omega \times \int \vec{r} dm;$$

तो समी० (22.7) व \vec{p} की सदिश त्रिज्या का प्रवेश कराकर [देखिए (22.11a)],

$$\vec{p} = m\vec{u} + m\omega \times \vec{R}.$$

या, O में संहति केंद्र त: G निर्वाचित करे तो $R=0$ और प्राप्त करते हैं —

$$(2) \quad \vec{p} = m\vec{u}.$$

विशेषतया, यदि O पिंड का कोणीय संवेग M उन मय रैखिक संवेगों के अल्पांशों

(3) से मायं अभिदेग बिंदु O के प्रति दिये जाने हैं। अतएव हम
दूसरी ओर, दृढ़।

के पूर्णों से बनता है $\vec{M} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int dm (\vec{r} \times \vec{v})$,
प्राप्त करते हैं—

$$(4) \quad \vec{M} = \int dm (\vec{r} \times \vec{u}) + \int dm \vec{r} \times (\omega \times \vec{r}) = m\vec{R} \times \vec{u} + \int dm \vec{r} \times (\omega \times \vec{r}).$$

इसमें, (22.7) और $\vec{M} = \vec{G}$ के लिए तथा $\vec{u}=0$ के लिए भी शून्य हो जाता

$$(5) \quad \vec{M} = \int dm (\vec{r} \times \vec{v})$$

दक्षिणी पारव का प्रय $\vec{M} = \int dm \vec{r} \times (\omega \times \vec{r}).$

है। अतएव इन दोनों

$$(6) \quad 2. \text{ Common}$$

इस समीकरण का मान निम्नलिखित के लिए हम घटक को किसी भी तीन मदिशों A, B, C के लिए चयन विगुणित कोणी-गुणनफल के निम्नलिखित मदिशों के समुच्चय का स्मरण कराने हैं कि—

$$(7) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

इसमें परिणाम निम्नलिखित है कि—

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = v^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r});$$

और इसलिए, \mathbf{L} -घटक को उसीरूप के लिए लेते हुए,

$$\begin{aligned} M_x &= \int [\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})]_x dm \\ (8) \quad &= \omega_y \int (x^2 + y^2 + z^2) dm - \omega_z \int x^2 dm \\ &\quad - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm. \end{aligned}$$

(22.12a) में अवस्थितिक के पूर्णों और गुणनफलों का उपयोग करके हम अब

(6) को निम्नलिखित रूप में दे सकते हैं—

$$\begin{aligned} (9) \quad M_x &= I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ M_y &= -I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ M_z &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned}$$

इस प्रकार हम गत्यात्मक मदिश \mathbf{M} और चलात्मक मदिश $\boldsymbol{\omega}$ के बीच एक रैखिक संबंध को पहुँचते हैं। यह समझ समीकरण (22.13b) के टेन्सर I द्वारा प्राप्त हुआ है। अतएव कहते हैं कि \mathbf{M} है $\boldsymbol{\omega}$ का “रैखिक मदिश फलन”। इस प्रकार के रैखिक मदिश फलन टेन्सर फलन-मानित के सभी अंशों में महत्वपूर्ण भाग लेते हैं, विशेषतया प्रत्यास्थता बाद में (देखिए हम ग्रन्थावली की द्वितीय पुस्तक)।

घूर्णन की गतिज ऊर्जा के व्यंजक (12.12b) के उपयोग में समीकरण (9) विधाप्रद रूप में रखे जा सकते हैं। क्योंकि तब हम केवल निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$(10) \quad M_i = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_i}, \quad i=x, y, z.$$

और भी देखिए कि यह पद-सुख न केवल (9) में पहले से ही मान ली हुई स्थिति $\mathbf{O}=\mathbf{G}$ या $\mathbf{u}=0$ के लिए बल्कि $\mathbf{u} \neq 0$ तथा \mathbf{O} के किसी भी स्थान के लिए भी वैध है। क्योंकि अधिकतर व्यापक स्थिति में केवल इस बात की आवश्यकता है कि

$[T_{rot}$ पूर्णन] के लिए जो पदबुंज (22.12b) है वह T_m के व्यंजक (22.11) को जोड़ देने से पूरा कर दिया जाय। तो पद

$$\frac{\partial T_m}{\partial \omega_i} = m(R \times u)_i$$

समी० (10) के दाएँ ओर जुड़ जाता है। परंतु यह m वही पद है जो M के समीकरण (5) के दाहिनी ओर आता है जब कभी भी O और G सपाती नहीं होते। अंत में, संपूर्ण गतिज ऊर्जा T और $T_{rot} + T_m$ में केवल पद T_{trans} [T स्थानांत] भर का भेद है जो ω से स्वतंत्र है [देखिए (22.9) और (22.10)], इसलिए (10) को निम्नलिखित रूप में व्यापकीकृत कर सकते हैं—

$$(10a) \quad M_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i}, \quad i=x, y, z,$$

जो O के किसी भी स्थान के लिए वैध है।

जो कुछ कोणीय संवेग M के लिए कहा गया है वह रैलिक संवेग p के लिए भी वैध है। यहाँ सीधे ही व्यापक स्थिति $O \neq G$ पर विचार करते हैं और समीकरणों (22.9), (22.10) तथा (22.11) से निम्नलिखित संबंध

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = mu_i + m(\omega \times R)_i$$

बना लेते हैं जो p के समीकरण (2) से सहमत है। अतएव (10a) का पूरक समीकरण होगा—

$$(11) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial u_i}, \quad i=x, y, z.$$

समीकरण (10a) और (11) किसी भी यांत्रिक निकाय के संवेग और वेग निर्देशांकों के संबंधक बहुत ही अधिकतर व्यापक संबंध की विशेष स्थितियाँ हैं। इसका प्रमाण अध्याय ६, § ३६ तक स्थगित करना पड़ेगा। यहाँ केवल समी० (10) का ज्यामितीय अर्थ ही बतावेंगे जो हमें प्वंसो^१ की विख्यात ज्यामितीय रचना को पहुँचा देता है। प्वंसो की विधि हमें यह बताती है कि किसी दिये हुए अक्ष के संबंध में कोणीय संवेग M का अक्ष किस प्रकार जाना जाय। इस विधि के बारे में वही कहा जा सकता है जो ऊपर आये हुए समीकरण के बारे में कि वह

केवल दृढ़ पिंड के लिए ही नहीं, वरन् जहाँ भी समित टेन्सर आवे वहाँ भी लागू है। यह टेन्सर एक द्वितीय घात के टेन्सर तल द्वारा निरूपित किया जाता है और फिर इस टेन्सर द्वारा दिये हुए रैखिक सदिश फलन को निकालना पड़ता है।

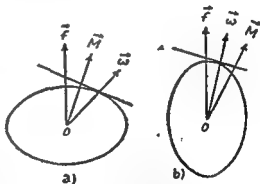
प्वंसो रचना इस प्रकार की जाती है—घूर्णीय दीर्घवृत्तज के केंद्र O से (आ० ४२) कोणीय वेग का सदिश ω , खींच लिया जाता है और जहाँ ω इस दीर्घ-वृत्तज के पृष्ठ को काटता है वहाँ दीर्घवृत्तज के स्पर्श समतल की रचना की जाती है। O से इस स्पर्श समतल पर डाला हुआ रज्ज, M की दिशा देता है। प्रमाण के लिए केवल यह स्मरण करने की आवश्यकता है कि किसी भी तल, $f(\xi, \eta, \zeta) = \text{नियत}$, के लिए, उसके स्पर्श समतल के अभिलंब की दैक्षिक कोज्याएँ

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

के समानुपाती होती हैं। हमारे लिए $f(\xi, \eta, \zeta)$ नियत, घूर्णीय दीर्घवृत्तज का समीकरण (22.15) है और ξ, η, ζ के लिए उनके अवकलज सचमुच ही समीकरण (9) के M के घटकों के समानुपाती हैं।

प्वंसो रचना को हम समीकरण (10) का साक्षात् ज्यामितीय व्यंजन समझ सकते हैं, क्योंकि घूर्णीय दीर्घवृत्तज सारत. तल $T_{rot} = \text{नियत}$ के सर्वसम है।

आकृतियाँ ४२ ए, बी संमित घूर्णीय दीर्घवृत्तज की वह स्थिति निरूपित करती हैं जहाँ ω , M और संमिति अक्ष ("आकृति का अक्ष") F एक ही समतल में हैं। अतएव स्पर्श समतल दीर्घवृत्तज के उक्त तल के अनुप्रस्थ काट वाले दीर्घवृत्त की स्पर्शरेखा द्वारा निरूपित होगा। आकृति ४२ बी के उच्चाक्ष परिक्रमण-दीर्घवृत्तज (अर्थात् उच्चाक्ष उपगोल) में



आकृति ४२—प्वंसो रचना।

दो स्थितियों में जहाँ घूर्णीय दीर्घवृत्तज (a) उच्चाक्ष उपगोल और (b) निम्नाक्ष उपगोल में ग्रह्य हो जाता है। कोणीय वेग ω और कोणीय संवेग M की आपेक्षिक स्थितियाँ यहाँ दिखलायी गयी हैं।

M और f , अर्थात् अक्ष, ω के इधर उधर स्थित हैं। आकृति ४२ ए के निम्नाक्ष उपगोल में M की स्थिति ω और f के बीच में है। दीर्घवृत्तज, जिसमें तीनों अक्ष असम हों, एक अधिकतर कठिन लेखाचित्रीय समस्या प्रस्तुत करता है।

यह प्रकरण समाप्त करते हुए हम जोर देकर कहते हैं कि इस प्रकरण में विवेचित संबंध सारतः दृढ़पिंड को पहुँचायी हुई इस न्यूटनीय परिभाषा के अतिरिक्त और कुछ नहीं कि "गति की मात्रा ही उसकी माप है, जो वेग और द्रव्य की मात्रा के मिलाव से उत्पन्न होती है।" हमारे प्रस्तुत सबधों के, एक एकाकी कण के वेग और संवेग के बीच के संबंध से, कही अधिक जटिल होने का कारण यह है कि कण-यांत्रिकी में "द्रव्य की मात्रा" अर्थात् सहित आँदश है, परंतु दृढ़ पिंड की स्थिति में सहित के स्थान में आनेवाला अवस्थितित्वपूर्ण टेन्सर है।

§ २५. दृढ़ पिंड का गतिविज्ञान, उसकी गतियों के रूपों का सर्वेक्षण

आइए, पहले आकाश में स्वतंत्रतापूर्वक चलते हुए दृढ़ पिंड पर विचार करें। अभिदेश बिंदु के लिए उसके सहित-केन्द्र को निश्चित करेंगे और, § 23 के प्रवेशन से सहमत होते हुए, जो सब बलबृन्द पिंड पर आरोपित हों उनका, इस बिंदु पर आरोपित होने के लिए, लघूकरण करेंगे। तब हमें केवल एक एकाकी परिणामी बल F और एक एकाकी परिणामी ऐंठ L से ही काम करने की आवश्यकता होगी। गति-समीकरण § १३ के सवेग के और सवेग-घूर्णन के समीकरण होंगे, जो ये हैं—

$$(1) \quad \dot{P} = F,$$

तथा

$$(2) \quad \dot{M} = L.$$

यत्तः एक दृढ़ पिंड की केवल छः स्वतंत्रता-मह्यार्ण होती है, अतः ये दो सदिश समीकरण ही पिंड की गति की दशा को पूर्णतया निश्चित करने के लिए पर्याप्त होंगे।

जब कभी भी F कोणीय वेग से स्वतंत्र हो और L स्थानांतरणीय वेग से स्वतंत्र हो, तब समीकरणों (1) और (2) को अलग-अलग ले सकते हैं। उदाहरणार्थ, प्रक्षेप्यो के विज्ञान में ऐसा नहीं होता। यदि ऐसा होता हो तो (1) शुद्ध कण-यांत्रिकी की और (2) एक स्थिर बिंदु के प्रति घूर्णन की समस्या हो जाती है, या, जैसा कि हम सक्षिप्तता के लिए कहेंगे, "नचाने के लट्टू वाली समस्या" की।

इस स्थान पर हमारा कुतूहल मुख्यतया पस्चोमन में होगा। अभिदेश विंदु का उपर्युक्त प्रकार से निर्वाचन कर लेने पर, हम गुणत्व बल की उपेक्षा कर सकते हैं, क्योंकि उसका संहति-केन्द्र के प्रति कोई घूर्णन नहीं होता। वरन्, यदि वायु-प्रतिरोध, घर्षण और ऐसी बातों की भी उपेक्षा कर दे तो हमें बिना किन्हीं बलों के अधीन नचाने के लट्टू वाग्यी समस्या का सामना करना पड़ता है। इस प्रकार कार्टेन^१ अवलंबन में मश घूर्णाक्षस्याधी (दे० आगे आ० ४७) बिना किन्हीं बलों के अधीन लट्टू होगा, वशतः कि गतिपालक चक्र की संहति की तुलना में जिम्बलो^२ (लटकाने के छल्लो आदि की युक्ति) की संहति की उपेक्षा कर दी जाय, जैसा कि माधारण रचनाओं में होता है। अन्यथा बहुत अधिक जटिल गणितीय समस्या का सामना करना पड़ेगा।

संहति-केन्द्र के अतिरिक्त किमी अन्य स्थिर विंदु के प्रति कें घूर्णन को भी हम लेंगे। जैसा कि पृ० १६४ पर कहा था, उस स्थिति में इस स्थिर विंदु को अभिदेश-विंदु O बना देना और उसके प्रति आरोपित गुरुत्वाकर्षणीय घूर्णन L का प्रवेश करा देना युक्तिपूर्ण होगा। ऐसी स्थिति में उसे भारी लट्टू कहते हैं। उसकी विवेचना उपप्रकरण ४ और ५ में की गयी है।

बिना बलों के अधीन लट्टू की पूरी विश्लेषणीय विवृति आगामी प्रकरण के लिए स्यगित कर दी जायगी। वहाँ हम यूलर के समीकरणों द्वारा प्रस्तुत करण में परिचित होंगे। भारी लट्टू की पूरी विवृति को, जहाँ तक कि वह की जा सकती है, और भी स्यगित करना पड़ेगा, अर्थात् § ३५ तक। वहाँ व्यापकीकृत लाग्रेंज समीकरणों की शक्तिमती विधि हमारे अधिकार में आ जायगी।

बिना बलों के अधीन लट्टू के लिए समी० (२) प्रदान करता है, $\dot{M}=0$ । यह तुरंत ही समाकलित किया जा सकता है, जिससे प्राप्त होता है

$$(3) \quad M = \text{नियत}।$$

बिना बलों के अधीन लट्टू का कोणीय सवेग परिमाण में एव आकाशीय दिशा में नियत रहता है। यह अभ्युक्ति गैलिलियो के अवस्थितित्व नियम के पूर्णतया समांतर है, परंतु व्यापकतया, वेग तथा आकाशीय स्थान के लिए उतना सरल ध्वजन नहीं प्रदान करती जितना कि अन्य स्थिति में मिलता है।

(१) बिना बलों के अधीन गोलीय लट्टू

केवल गोलीय घूर्णीय दीर्घवृत्तज की स्थिति में $M=I\omega$ होता है, जिससे

में जाता होगा। निश्चिति के लिए मान लेंगे कि घूर्णीय दीर्घवृत्तज निम्नाक्ष उप-गोल है, इस स्थिति में M अन्य दो बिंदुओं F और R के बीच में होगा। किसी क्षण, गति OR के चारों ओर के घूर्णन की है। इस प्रक्रिया में F अभी कहे हुए बृहत् वृत्त के लम्बवत् आगे बढ़ता है। ऐसा करने में F और M के बीच की कोणीय दूरी में परिवर्तन नहीं होता। अतएव F का क्षणिक पथ M के चारों ओर के अक्षांशवृत्त का एक छोटा-सा चाप होगा (आ० ४३ में दायी ओर का चाप)। अब R भी अपना स्थान बदलेगा। वह M और F के नये स्थान से जाते हुए बृहत् वृत्त को जायगा। इस गति में M और R के बीच की कोणीय दूरी अपरिवर्तित रहती है। क्योंकि वह प्वंसो रचना द्वारा निर्धारित होती है। अतएव R भी M के इधर-उधर के अक्षांशवृत्त के चाप पर आगे बढ़ता है (आ० ४३ में दायी ओर का चाप)। बिंदुओं F , M और R का आपेक्षिक स्थान अब वही होगा जो आदि में था। अतएव हमारे युक्तितर्क की प्रक्रिया दोहरायी जा सकती है। परिणाम यह निकलता है कि संमिति-अक्ष और घूर्णन अक्ष, प्रत्येक आकाश में स्थिर कोणीय संवेग के चारों ओर एक-एक वृत्तीय शंकु की रचना करते हैं और प्रत्येक शंकु एक नियत कोणीय वेग से बनाया जाता है। पश्चोक्त इसलिए कि वेग M के परिमाण और घूर्णीय दीर्घवृत्तज के सवध में उसकी स्थिति द्वारा पूर्णतया निर्धारित होता है। इस प्रकार अब समपुर-सरण^१ के लक्षणों और स्वरूप का पूरा विवरण दे दिया गया।

केवल एक भेद के साथ यही बातें घूर्णीय उन्वाक्ष उपगोल^१ के लिए भी लागू हैं। भेद यह है कि इस स्थिति में R का स्थान M और F के बीच होगा (दे० आ० ४२ बी, पृ० १७७)।

(३) विना घलों के अधीन अ-संमित लट्टू

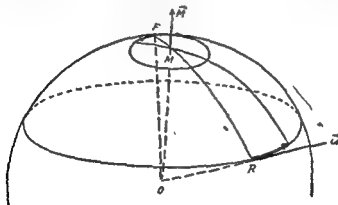
संसंमिति लट्टू की गति का रूप जो अभी-अभी व्युत्पन्न किया गया है, निम्न-लिखित भाँति संक्षेप में, परंतु व्योरे की उतनी स्पष्टता बिना, वर्णित किया जा सकता था—कोणीय सवेग सदिश M के अंत से, M के लंबवत् “निश्चर समतल” \mathcal{E} (दे० पृ० ९८) से होकर हम जाते हैं। M के मूल बिंदु के चारों ओर द्विगुणित गतिज ऊर्जा के दीर्घवृत्तज (“प्वंसो दीर्घवृत्तज”) की रचना करते हैं जो घूर्णीय

$M =$ नियत से $\omega =$ नियत निकलता है। घूर्णन अक्ष कोणीय संवेग के स्थिर अक्ष से नित्य संपाती रहता है। पिंड का प्रत्येक बिंदु, पिंड का रूप कुछ भी क्यों न हो (देखिए, उदाहरणार्थ पृष्ठ १६६, आ० ४०सी), इस अक्ष के चारों ओर नियत वेग से एक वृत्त बनाता है।

(२) बिना बलों के अधीन संमित लट्टू

यहाँ सरल घूर्णन गति तभी होती है जब M की दिशा मुख्य अक्षों में से किसी एक से, अर्थात् या तो पिंड के अक्ष से या किसी निरक्षीय अक्ष से संपाती होती है। बिना बलों के अधीन संमित लट्टू की व्यापक गति तथोक्त सम-पुरःसरणयुक्त होती है।

इस प्रकार की गति को हम आ० ४३ की सहायता से समझाते हैं। घूर्णीय संवेग का अक्ष, जो आकाश में स्थिर रहता है, ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर खींचा गया है। घूर्णीय दीर्घवृत्तज के केंद्र के चारों ओर रचे हुए मात्रक त्रिज्या के गोल के तल को



आ० ४३—बिना बलों के अधीन संमित लट्टू का सम-पुरःसरण।

जहाँ यह अक्ष काटता है, वह बिंदु समझिए कि M है। इस गोल को जिन बिंदुओं पर घूर्णन के तथा किसी भी क्षण की समिति के अक्ष काटते हैं, उन्हें R और F कहिए। त्रैलोक्य विधि से ये तीनों अक्ष F से जाते हुए एक ध्रुववृत्तीय समतल में होंगे। अतएव तीनों बिंदु M , R और F एक बृहत् वृत्त पर होंगे जो बिंदु M

दीर्घवृत्तज के सदृश है। प्वंसो दीर्घवृत्तज \in के स्पर्शीय है* और स्पर्शता का बिंदु कोणीय वेग ω का अंतिम बिंदु है। लट्टू की क्षणिक गति इस दीर्घवृत्तज के, ω के चारों ओर के, घूर्णन से बनी है। इस प्रक्रिया में दीर्घवृत्तज बिना फिसले समतल \in पर लुढ़कता है।† यदि प्वंसो दीर्घवृत्तज परिक्रमण का हो तो स्पर्शता के बिंदु का वक्र M के चारों ओर एक वृत्त हो जाता है। अतएव \in रचित शंकु ("आकाश शंकु") और आकृति-अक्ष द्वारा रचित शंकु वृत्तीय शंकु हो जाते हैं। इस प्रकार हम फिर लट्टू का सम पुरःसरण प्राप्त करते हैं।

यही रचना अब तीन विभिन्न अवस्थितिवर्धनों वाले बल-स्वतंत्र एक व्यापक ("संमिति हीन") लट्टू की गति के प्वंसो चित्र को पहुँचाती है। फिर प्वंसो दीर्घ-वृत्तज को निश्चर समतल \in पर लुढ़काते हैं (देखिए टिप्पणी*)। अब स्पर्शता का वक्र^१ वृत्त नहीं रहता किंतु एक बीजातीत^१ वक्र हो जाता है, जो व्यापकतया बंद नहीं होता। इसी भाँति घूर्णन-अक्ष तथा "पिंड-अक्ष" की आकाश में गति के वर्णन करनेवाले शंकु भी अब बीजातीत हो जाते हैं। असमित लट्टू का विश्लेषण बिना बलों के अधीन भी दीर्घवृत्तीय समाकलो को ले आता है [देखिए § २६, (३)]। बिना बलों के अधीन समित लट्टू के विश्लेषण में केवल प्रारंभिक फलन ही आते हैं। परंतु हाँ, समितिहीन लट्टू के लिए भी, तीन मुख्य अक्षों के चारों ओर का विशुद्ध घूर्णन एक स्थिर भाव का घूर्णन होता है, जिसका निरूपण प्रारंभिक है।

(४) भारी सममित लट्टू

यहाँ गोलीय लट्टू को अलग न लेंगे क्योंकि उसकी गति सममित^१ लट्टू की गति से कुछ अधिक सरल नहीं होती।

भारी समित लट्टू के लिए स्थिर बिंदु O (कोटर—सॉकेट में आधार बिंदु) सहित-केन्द्र G (समित अक्ष पर स्थित) का अब संपाती नहीं होता। दूरी OG को s कहिए, तो गुह्यवाक्यणीय एंठ का परिमाण होगा

* यह (पृ० १७६ की) प्वंसो रचना और शोध ही आगे आनेवाले समीकरण (26.17a) का परिणाम है।

† अयं में 'बिना फिसले लुढ़कना' आकाश से ओर पिंड से प्रेक्षित कोणीय वेग सदृश ω की समता के तुल्य है। इस बारे में समी० (26.8a) देखिए, जहाँ इस समता का प्रमाण दिया गया है।

1. The curve of contact
2. Transcendental
3. Symmetrical

$$(4) \quad |L| = mgs \sin \theta,$$

जहाँ θ ऊर्ध्वाधर और आकृति-अक्ष के बीच का कोण है। L ऊर्ध्वाधर और समिति-अक्ष, दोनों के लववत् है, अर्थात् हमारे चक्कों में, वह क्षैतिज समतल और घूर्णीय दीर्घवृत्तज के निरक्ष समतल की काट पर होगा। काट की यह रेखा "पातो की रेखा" कहलाती है। यह शब्द खगोल विज्ञान में लिया गया है। चिह्नों की अधिकतर यथावत व्याख्या के लिए पृ० १८७-८८ देखिए।

व्यापक समीकरण (2) अब तुरत ही समाकलित नहीं किया जा सकता जैसा कि बिना बलों के अधीन लट्टू के साथ में किया जा सका था। क्योंकि अब तो कोणीय संवेग में निम्नलिखित नियम (समी० 5) के अनुसार निरंतर परिवर्तन होता रहता है।

$$(5) \quad dM = L dt$$

इस प्रकार किसी समय t के M के साथ अत्यन्त मंदित $L dt$ को जोड़ देने में $t + dt$ का कोणीय संवेग प्राप्त होता है। M का अतः विदुः क्षणिक पात-रेखा की दिशा में, अर्थात् ऊर्ध्वाधर और समिति-अक्ष के लववत्, आगे बढ़ता है। इसमें यह परिणाम निकलता है कि ऊर्ध्वाधर पर एव इस अक्ष पर भी M के प्रक्षेप नियत रहेंगे। इन दो नियमों को

$$(6) \quad M' = M_{\text{vert}} \text{ (ऊर्ध्व) और } M'' = M_{\text{fig}}$$

कहिए। ये दो राशियाँ M' और M'' स्वेच्छया प्रदेक्षित^३ की जा सकती हैं और गति समीकरणों के दो समाकलनांक नियतांक हैं।

एक तीसरा नियतांक पूर्ण ऊर्जा E का है। समी० (6.18) के संगत हमें गुरुत्वाकर्षणीय स्थैतिक ऊर्जा V प्राप्त होती है, जहाँ

$$(6a) \quad V = mgs \cos \theta.$$

अतएव

$$(7) \quad T + mgs \cos \theta = E.$$

गति के वैश्लेषणिक विवरण पर पहुँचने के लिए हमें T और (6) में कथित M के प्रक्षेपों को लट्टू के उपयुक्त स्थानीय परामितियों^३ (यूलेरीय कोणों) के पदों में व्यक्त करना होगा। यह § ३५ में किया जायगा। वहाँ देखेंगे कि प्रस्तुत गति के हिमाव लगाने में हम दीर्घवृत्तीय समाकलों को पाते हैं।

दीर्घवृत्तज के मध्य है। प्लॅगो दीर्घवृत्तज C के स्पर्शीय है* और स्पर्शता का बिंदु कोणीय वेग ω का अंतिम बिंदु है। लट्टू की क्षणिक गति द्रम दीर्घवृत्तज के, ω के चारों ओर के, घूर्णन में बनी है। द्रम प्रक्रिया में दीर्घवृत्तज बिना फिसले समतल C पर लुढ़कता है।† यदि प्लॅगो दीर्घवृत्तज परिक्रमण का हो तो स्पर्शता के बिंदु का चक्र M के चारों ओर एक वृत्त हो जाता है। अतएव ω रचित शंकु ("आकाश शंकु") और आकृति-अक्ष द्वारा रचित शंकु वृत्तीय शंकु हो जाते हैं। द्रम प्रकार हम फिर लट्टू का गम पुरस्करण प्राप्त करने हैं।

यही रचना अब तीन विभिन्न अवस्थितिवृत्तों वाले बल-स्वतंत्र एक व्यापक ("संमित हीन") लट्टू की गति के प्लॅगो चित्र को पहुँचाती है। फिर प्लॅगो दीर्घवृत्तज को निश्चर समतल C पर लुढ़काते हैं (देखिए टिप्पणी*)। अब स्पर्शता का चक्र' वृत्त नहीं रहता किंतु एक बीजातीत' चक्र हो जाता है, जो व्यापकतया बद नहीं होता। इसी भाँति घूर्णन-अक्ष तथा "पिंड-अक्ष" को आकाश में गति के वर्णन करनेवाले शंकु भी अब बीजातीत हो जाते हैं। अर्गमित लट्टू का विदलेपन बिना बलों के अधीन भी दीर्घवृत्तीय समाकलों को ले आता है [देखिए § २६, (३)]। बिना बलों के अधीन समित लट्टू के विदलेपन में केवल प्रारंभिक कलन ही आते हैं। परंतु हाँ, समितिहीन लट्टू के लिए भी, तीन मुख्य अक्षों के चारों ओर का विशुद्ध घूर्णन एक स्थिर भाव का घूर्णन होता है, जिसका निरूपण प्रारंभिक है।

(४) भारी समित लट्टू

यहाँ गोलीय लट्टू को अलग न लेंगे क्योंकि उसकी गति समित' लट्टू की गति से कुछ अधिक सरल नहीं होती।

भारी समित लट्टू के लिए स्थिर बिंदु O (कोटर—सैंकिट में आधार बिंदु) संहति-केन्द्र G (समित अक्ष पर स्थित) का अब संपाती नहीं होता। दूरी OG को s कहिए, तो गुह्रवाक्यणीय ऍठ का परिमाण होगा

* यह (पृ० १७६ की) प्लॅगो रचना और शीघ्र ही आगे आनेवाले समीकरण (26.17a) का परिणाम है।

† अर्थ में 'बिना फिसले लुढ़कना' आकाश से और पिंड से प्रेक्षित कोणीय वेग सदिश ω की समता के तुल्य है। इस बारे में समी० (26.8a) देखिए, जहाँ इस समता का प्रमाण दिया गया है।

1. The curve of contact
2. Transcendental
3. Symmetrical

आधारित है। निम्नदेह ऊर्जा-ममात्र (7) व्यापक घूर्णीय दीर्घवृत्तज के लिए भी वैध होगा।

भूम्या की गतिविधि विशेष स्थितियों में मान लेते हैं कि या तो गति-विचरण एक विशेष प्रकार का है या गति एक विशेष रूप की है।

सबसे अधिक जानी हुई स्थिति को 'कोइले-रॉम्बी' प्रदान है। यहाँ घूर्णीय दीर्घ-वृत्तज सम्मित मान लिया जाता है, गति-केन्द्र अक्ष पिंड के अक्ष पर नहीं चलने निरक्षीय समतल में होगा, जहाँ निरक्षीय समतल की परिभाषा है वह समतल जो स्थिर बिंदु में जाने हुए अक्ष के लंबवत् हो। इन बातों के अतिरिक्त यह भी अभि-याचित है कि पिंड के अक्ष के प्रति का अवस्थित्व पूर्ण निरक्षीय अवस्थित्व पूर्ण का आधार हो। उक्त स्थिति में गति के रूप पर किसी निरोध की आवश्यकता नहीं है।

स्टाउड^१ वर्णित स्थिति में इस बात में मतलब है कि स्थिर भाव में घूर्णन के कौन-कौन अक्ष ऊर्ध्वाधर दिशा में रहने हुए उपयुक्त होंगे। निवृत्तता यह है कि ये अक्ष पिंड में एक द्वितीय घात के शंकु पर होंगे हैं। इस शंकु पर तीनो मुख्य अक्षों के होने के अतिरिक्त गति-केन्द्र में जाता हुआ अक्ष भी होता है। प्रत्येक अक्ष के लिए (एक चिह्न के भीतर ही भीतर) एक निश्चित कोणीय वेग होता है। इस स्थिति में न तो गति-विचरण और न ही गति-केन्द्र के स्थान को निर्दिष्ट करने की आवश्यकता होती है।

अंत में, हेमे-वर्णित स्थिति में 'लोलक' (गोलीय लोलक या विशेषतया सामान्य लोलक) की सरल गति में सादृश्य में मतलब है। ऐसी गति के लिए गति-केन्द्र घूर्णीय दीर्घवृत्तज के एक विशेष अक्ष पर होना चाहिए और आदि का उत्तेजन उचित प्रकार का होना चाहिए, ठीक वैसे ही जैसे कि सम्मित लट्टू की स्थिति में, जिसका गति-केन्द्र शुद्ध लोलक गति में केवल तभी चलता है जब आदि के कोणीय संवेग का समिति-अक्ष पर कोई घटक न हो।

४.२६. यूलर के समीकरण बलों के अनघोन लट्टू की मात्रात्मक विवृति (१) यूलर के गति-समीकरण

दो विभिन्न अभिवेश-पद्धतियाँ लेते हैं—एक तो x, y, z , जो आकाश में स्थित है और दूसरी X, Y, Z , जो पिंड में स्थित है। (x, y, z) पद्धति में बिना बलों के अधीन गति के कोणीय संवेग के लिए एक निश्चर स्थान होता

सम पुर सरण अव गति का व्यापक रूप नहीं रहता, जैसा कि बिना बलों के अवीन लट्टू की स्थिति में था; वरन् केवल M' , M'' और E के विशेषतया निर्वाचित मानों के लिए ही होता है। पुरःसरणीय गति जो प्रचलित रीति से उत्तेजित भारी लट्टू की गति में होती है, वह जान तो सम पड़ती है, परंतु वास्तव में सम नहीं होती। उसे छद्म-सम पुरःसरण^१ कह सकते हैं। अंत में, ऊर्ध्वावर दिशा में लक्ष्य करते हुए आकृति-अक्ष के चारों ओर शुद्ध घूर्णन भी गति का एक समाव्य (स्यायी किंवा अस्यायी) रूप है, ω का परिमाण चाहे कुछ भी हो।

अब तक हमने केवल कोणीय सवेग के समीकरण (२) पर विचार किया है। अब रैखिक सवेग के समीकरण (१) पर भी सरसरी निगाह डाल लेनी चाहिए। उसका दायीं अंग स्थिर बिंदु O पर आरोपित बल F है। यह दो बलों से संघटित है; एक तो ऊर्ध्वाधरतया नीचे की ओर आरोपित गुरुत्व बल mg , और दूसरा आधार की प्रतिक्रिया F_{sup} (आधा)। बायें अंग में सवेग परिवर्तन, समी० (२४.२) से, $u=0$ रख कर,

$$\dot{p} = m \frac{d}{dt} (\omega \times R) = m \dot{v}$$

होगा, जहाँ \dot{v} संहति-केन्द्र का वेग है। तो अब समी० (१) यह सरल अभ्युक्ति करता है—

$$F_{sup} = m (\dot{v} - g).$$

दूसरे शब्दों में, रैखिक सवेग के नियम की अभियाचना है कि किसी भी क्षण आधार को लट्टू की संहति \times (संहति-केन्द्र का त्वरण ऋण गुरुत्वीय त्वरण) जितना बल प्रदान करना होगा।

(५) भारी असंमित लट्टू

बहुतेरे महान् गणितज्ञों के अनेक प्रयत्न करने पर भी इस समस्या सबधी अबकल समीकरणों का व्यापकतम रूप में समाकलन अभी तक नहीं हो सका है। कोणीय सवेग (६) के समाकलों में पहला तो निश्चय ही प्रभाव में रहता है, क्योंकि यहाँ भी गुरुत्वीय ऐंट एक क्षैतिज अक्ष के प्रति काम करती है, अतएव सदिश M का अंतिम निरा आकाश में स्थिर एक क्षैतिज समतल पर रहता है। परंतु दूसरा समाकल (६) अब अवैधीकृत हो जाता है, क्योंकि वह घूर्णीय दीर्घवृत्तज की समिति पर

1. Pseudo-regular precession

है— $M = \text{नियत (गमी० 25.3)}$ । पिंड की दृष्टि से M का स्थान निरंतर बदलता रहता है। इस परिवर्तन के नियम का हमें अध्ययन करना है।

अतएव पिंड में स्थित ए-विंदु P पर और आकाश में स्थित विंदु Q पर अपना ध्यान एकत्र कीजिए और समझिए कि दोनों विंदु क्षण भर के लिए संपाती हैं। समझिए कि P का वेग आकाश में \mathbf{v} है और Q का पिंड में \mathbf{V} । चलात्मक गमी० (22.4) के अनुसार $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ । पिंड की दृष्टि में Q का वेग P के आकाश से दृष्ट वेग के बराबर पर प्रतिकूल दिशा में होगा। अतएव

$$\mathbf{V} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}.$$

सारणी के रूप में—

	आकाश से दृष्ट	पिंड में दृष्ट
P	$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$	$\mathbf{V} = 0$
Q	$\mathbf{v} = 0$	$\mathbf{V} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$

सदिश \mathbf{M} के आकाश में स्थिर अतविंदु को विंदु Q निर्वाचित करते हैं और इसलिए लिखते हैं—

$$\mathbf{r} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}.$$

इस प्रकार $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ का अर्थ हुआ “पिंड में परिवर्तन” (आकाश में हुए परिवर्तन को $\dot{\mathbf{M}}$ कहा गया था जो यहाँ शून्य है)।

तो सारणी की द्वितीय पंक्ति से पढ़ लिया जाता है—

$$(I) \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}.$$

यह बलों के अनघीन घूर्णनयुक्त पिंड के यूलर-समीकरणों की व्युत्पत्ति को पूरा कर देता है।

(X, Y, Z) —प्रणाली में उनके घटकों के पदों में हम उनका पुनर्लेखन करेंगे। $\boldsymbol{\omega}$ के घटकों को $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ और \mathbf{M} के घटकों को M_1, M_2, M_3 कहेंगे। समी० (I) प्रदान करता है—

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= M_2\omega_3 - M_3\omega_2, \\ \frac{dM_2}{dt} &= M_3\omega_1 - M_1\omega_3, \\ \frac{dM_3}{dt} &= M_1\omega_2 - M_2\omega_1. \end{aligned}$$

यहाँ तक X, Y, Z की पड़गि निता म्येच्छ नहीं है। अब यदि X, Y, Z को दिनांश समी० (22.15 a) के मुख्य अर्थाव्यतिरिक्त-पणों की ओर ले और उन्हें I_1, I_2, I_3 कहें, तो व्यापक मबंध (24.9) के विस्तार में, प्राप्त करते हैं

$$(3) \quad M_1 = I_1\omega_1, \quad M_2 = I_2\omega_2, \quad M_3 = I_3\omega_3;$$

और (2) निम्नलिखित सरल रूप धारण करता है—

$$(4) \quad \begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

हम जब कभी यूलर-समीकरणों की बान करते हैं तब इन्हीं विलक्षण रूप से सम्मिलित और मुरूप समीकरणों का ध्यान करते हैं।

आइए, इन्हें अब ऐसा बढ़ाये कि एक बाह्य फ़ैल L के प्रभाव की स्थिति सम्मिलित हो जाय। ऐसी स्थिति में M का अन्तर्विदु आकाश में स्थिर नहीं रहता, वरन् (25.2) के अनुसार उसका वेग $\mathbf{v} = \mathbf{L}$ ।

पिंड की दृष्टि से, विदु Q अब ऐसे वेग में चलता है जो $\mathbf{v} = \mathbf{L}$ और $\mathbf{V} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ से सघटित होता है। इनका परिणाम यह होता है कि समी० (1) को

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}$$

में बदल देना चाहिए और (2) तथा (4) के दक्षिणी अंगों से X, Y, Z मबंधी L के घटकों को जोड़ देना चाहिए। इससे एक स्थिर विदु वाले दृढ़ पिंड के यूलर के गति-समीकरण प्राप्त हो जाते हैं।

हम ये समीकरण स्पष्ट रूप से केवल भारी समित लट्टू की स्थिति के लिए ही लिखेंगे, जहाँ L पातो की रेखा के प्रति काम करता है और, (25.4) से उसका परिमाण

$$|L| = mgs \sin \theta \quad \text{होता है।}$$

है— M = नियत (समी० 25.3)। पिंड की दृष्टि में M का स्थान निरंतर बदलता रहता है। इस परिवर्तन के नियम का हमें अध्ययन करना है।

अतएव पिंड में स्थित ए—विंदु P पर और आकाश में स्थित विंदु Q पर अपना ध्यान एकत्र कीजिए और समझिए कि दोनों विंदु क्षण भर के लिए सपाती हैं। समझिए कि P का वेग आकाश में \mathbf{v} है और Q का पिंड में \mathbf{V} । चलात्मक समी० (22.4) के अनुसार $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ । पिंड की दृष्टि में Q का वेग P के आकाश से दृष्ट वेग के बराबर पर प्रतिकूल दिशा में होगा। अतएव

$$\mathbf{V} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}.$$

सारणी के रूप में—

	आकाश से दृष्ट	पिंड से दृष्ट
P	$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$	$\mathbf{V} = 0$
Q	$\mathbf{v} = 0$	$\mathbf{V} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$

सदिश M के आकाश में स्थिर अंतर्विंदु को विंदु Q निर्वाचित करते हैं और इसलिए लिखते हैं—

$$\mathbf{r} = M, \quad \mathbf{V} = \frac{dM}{dt}.$$

इस प्रकार $\frac{dM}{dt}$ का अर्थ हुआ “पिंड में परिवर्तन” (आकाश में हुए परिवर्तन को \dot{M} कहा गया था जो यहाँ शून्य है)।

तो सारणी की द्वितीय पक्ति से पढ़ लिया जाता है—

$$(I) \quad \frac{dM}{dt} = M \times \boldsymbol{\omega}.$$

यह बलों के अनधीन घूर्णनयुक्त पिंड के मूलर-समीकरणों की व्युत्पत्ति को पूरा कर देता है।

(X, Y, Z)—प्रणाली में उनके घटकों के पदों में हम उनका गुणलेंखन करेंगे। $\boldsymbol{\omega}$ के घटकों को $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ और M के घटकों को M_1, M_2, M_3 कहेंगे। समी० (I) प्रदान करता है—

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= M_2\omega_3 - M_3\omega_2, \\ \frac{dM_2}{dt} &= M_3\omega_1 - M_1\omega_3, \\ \frac{dM_3}{dt} &= M_1\omega_2 - M_2\omega_1. \end{aligned}$$

यहाँ तक X, Y, Z की पद्धति नितान्त स्वेच्छ रही है। अब यदि X, Y, Z की दिशाएँ समी० (22.15 a) के मुख्य अवस्थितित्व-घूर्णों की ओर ले और उन्हें I_1, I_2, I_3 कहे, तो व्यापक सबध (24.9) के विचार से, प्राप्त करते हैं

$$(3) \quad M_1 = I_1\omega_1, \quad M_2 = I_2\omega_2, \quad M_3 = I_3\omega_3;$$

और (2) निम्नलिखित सरल रूप धारण करता है—

$$(4) \quad \begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

हम जब कभी यूलर-समीकरणों की बात करते हैं तब इन्हीं विलक्षण रूप से सम्मित और सुरुप समीकरणों का ध्यान करते हैं।

आइए, इन्हे अब ऐसा बढ़ाये कि एक बाह्य ऐंठ L के प्रभाव की स्थिति सम्मिलित हो जाय। ऐसी स्थिति में M का अतविदु आकाश में स्थिर नहीं रहता, वरन् (25.2) के अनुसार उसका वेग $\mathbf{v} = \mathbf{L}$ ।

पिंड की दृष्टि से, बिंदु Q अब ऐसे वेग से चलता है जो $\mathbf{v} = \mathbf{L}$ और $\mathbf{V} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ से संघटित होता है। इसका परिणाम यह होता है कि समी० (1) को

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}$$

में बदल देना चाहिए और (2) तथा (4) के दक्षिणी अगों से X, Y, Z गवंधी L के घटकों को जोड़ देना चाहिए। इससे एक स्थिर बिंदु वाले दृढ़ पिंड के यूलर के गति-समीकरण प्राप्त हो जाते हैं।

हम ये समीकरण स्पष्ट रूप से केवल भारी संमित लट्टू की स्थिति के लिए ही लिखेंगे, जहाँ L पतों की रेखा के प्रति काम करना है और, (25.4) में उसका परिमाण

$$|L| = mgs \sin \theta \quad \text{होता है।}$$

ऊर्ध्वाधर, समिति-अक्ष, पात-रेखा, इन शब्दों में जो कुछ भी द्व्यर्थकता है उसे दूर करने के लिए हम मान लेंगे कि

आकाश में स्थित Z -अक्ष की घनात्मक दिशा ऊपर की ओर है और ऊर्ध्वाधर दिशा निश्चित करती है—

Z -अक्ष की घनात्मक दिशा संहति-केन्द्र से होकर जाती है और समिति-अक्ष निश्चित करती है, ऊर्ध्वाधर दिशा से वह एक कोण θ बनाती है ;

पातो की रेखा (पात-रेखा)^१ वह अर्ध-अनंत रेखा है, जो घनात्मक Z -तथा Z -अक्षों के लंबवत् है और जो θ के अधिक होने में दक्षिणावर्त पंच के आगे बढ़ने की दिशा में है ।

हम यह भी विशेषतया कह देते हैं कि दूरी s एक घनात्मक राशि है । जो कोण-पातो की रेखा घनात्मक X -अक्ष से बनाती है उसे ϕ कहिए, तो X, Y, Z संबंधी L के घटक होंगे—

(5 a) $mgs \sin \theta \cos \phi, -mgs \sin \theta \sin \phi, 0,$
क्रमात् ; और $I_1 = I_2$ के साथ समीकरण बृंद (4) निम्नलिखित हो जाते हैं

$$(6) \quad I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_1 - I_2) \omega_2 \omega_3 + mgs \sin \theta \cos \phi$$

$$I_1 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_2 - I_1) \omega_3 \omega_1 - mgs \sin \theta \sin \phi$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

पिछला समीकरण दिखाता है कि भारी समित लट्ठू के लिए (और इसलिए, और भी अधिक पुष्ट प्रमाण के साथ, बलों के अनधीन लट्ठू के लिए) हम प्राप्त करते हैं—

$$(7) \quad I_3 \omega_3 = Mf_3 = \text{constant (नियत)},$$

जिसे हम पहले से ही जानते थे । साथ ही साथ यह भी देखते हैं कि भारी लट्ठू के लिए यूलर-समीकरण और अधिक समाकलन के लिए उपयुक्त नहीं है, क्योंकि अब तक हमें ω_1, ω_2 के बीच के एवं θ, ϕ के बीच के संबंधों का पता नहीं है ।

इन $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ के बारे में हम जोर देकर यह कहना चाहते हैं कि वे सामान्य अर्थ में वेग नहीं हैं, अर्थात् वे किसी प्रकार की आकाशीय माप के समय संबंधी अवकलज^२

एक सम्मिश्र चर राशि का प्रयोग कर, इनको एक में मिला लेना सुविधाजनक है। द्वितीय समीकरण को i से गुणा कर प्रथम से जोड़ देने से बनता है—

$$(10) \quad I_1 \frac{ds}{dt} = i(I_3 - I_1) s \omega_3, \quad s = \omega_1 + i\omega_2.$$

इसका सक्षेप निम्न लिखित प्रतिस्थापन द्वारा कर लीजिए—

$$(11) \quad \alpha = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3.$$

तो (10) का समाकलन प्रदान करता है

(12) $s = s_0 e^{i\alpha t}$, $s_0 =$ अनुकलन का नियतांक। s लट्टू के निरक्षीय समतल पर कोणीय सवेग सदिश ω का प्रक्षेप है, यदि इस समतल का s के सम्मिश्र-तल की भाँति उपयोग करे। समीकरण (12) कहता है कि यह प्रक्षेप नियत कोणीय वेग α से चिज्या s_0 का एक वृत्त बनाता है। साथ ही साथ संपूर्ण कोणीय वेग सदिश ω आकृति-अक्ष के चारो ओर एक वृत्तीय शंकु की रचना करता है। इस शंकु का शीर्ष कोण β ऐसा होता है कि

$$(12a) \quad \tan \beta \text{ [स्पज्या } \beta] = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{\frac{1}{2}} |s_0|}{\omega_3} = \frac{|s_0|}{\omega_3}$$

यह उस सम पुर-सरण का बिन्दु है जो लट्टू पर स्थित प्रेक्षक देखता है। (आकाश में स्थित प्रेक्षक की दृष्टि में लट्टू का अक्ष निःसंदेह क्षणिक घूर्णन-अक्ष के चारो ओर घूर्णन करता है। यह अक्ष, जैसा कि पहले ही जान चुके हैं, अपनी पारी में आकाश-स्थित कोणीय सवेग सदिश M के चारो ओर एक वृत्तीय शंकु बनाता है।) कारण कि हमारा विचार ऊपर कही बातें पृथिवी पर लागू करने का है, अतः आकाश-स्थित प्रेक्षक का नहीं बरन् लट्टू पर स्थित प्रेक्षक का दृष्टिकोण अधिक उपयोगी होगा, क्योंकि वही पृथिवी पर स्थित मनुष्य के दृष्टिकोण से संगत होगा।

पृथिवी एक ऐसा लट्टू है जिसका घूर्णीय दीर्घवृत्तज निम्नाक्ष' उपगोल' है। जिस स्थान पर समिति-अक्ष पृथिवीतल को काटता है उसे ज्यामितीय उत्तरी ध्रुव कहते हैं। व्यापकतया, वह खगोलीय उत्तरी ध्रुव से भिन्न होता है। पश्चोक्त ध्रुव वह बिंदु है जहाँ कोणीय वेग सदिश पृथिवीतल को काटता है। ऊपर दिये हुए यूलर-वाद के अनुसार, खगोलीय उत्तरी ध्रुव ज्यामितीय उत्तरी ध्रुव के चारों ओर एक वृत्त बनाता है। इस दृग्बिम्ब (घटना) को यूलरीय गति कहते हैं। घूर्णीय

ध्रुव का पथ होने के कारण इस वृत्त को ध्रुवपथ (अंग्रेजी में पॉलहोड अर्थात् ध्रुवमार्ग) भी कहते हैं।

पृथिवी के चपटेपन की उपयुक्त माप तथोस्त दीर्घवृत्तीयता है, जिनका परिमाण है

$$(13) \quad \frac{I_3 - I_1}{I_1} \sim \frac{1}{300}.$$

पृथिवी का कोणीय वेग दिन के दैर्घ्य में निर्धारित किया जाता है—

$$(14) \quad \omega_3 \sim \omega = \frac{2\pi}{\text{दिन}},$$

जिससे (11) के अनुसार

$$(15) \quad \alpha = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \frac{2\pi}{300} (\text{दिन})^{-1}.$$

इस प्रकार पुर मरण के लिए यूलर का आवर्तकाल (यूलर काल) निकलता है

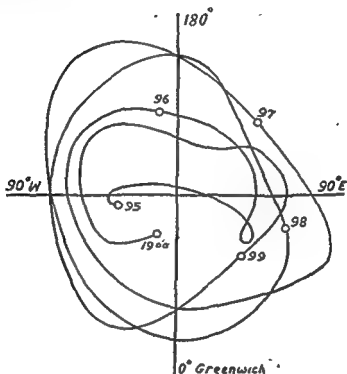
$$(16) \quad \frac{2\pi}{\alpha} = 300 \text{ दिन} = 10 \text{ मास}.$$

हम पृथिवी के घूर्णन-अक्ष को पृथिवी-गोल (ग्लोब) में स्थिर और ज्यामितीय ध्रुवों से जाते हुए समझने के अभ्यस्त हो गये हैं। यह पूर्ण रूप से ठीक नहीं है। पृथिवी पर किसी रेखाग के समांतर किसी सहति का संचलन अवश्यमेव घूर्णन-अक्ष के स्थान में परिवर्तन कर देता है; और अक्षाग वृत्त पर सहित-संचलन अवश्यमेव कोणीय वेग अर्थात् दिन के दैर्घ्य में परिवर्तन कर देता है।* ये दोनों परिवर्तन कोणीय सवेग के अविनाशित्व वाले नियम के परिणाम हैं। हम यह मान ले कि उक्त प्रकार के संचलन बढ़ हो चुके हैं; और यह कि खगोलीय ध्रुव ज्यामितीय ध्रुव से विचलित है। इस स्थिति में मूलरीय गति के प्रभाव से घूर्णन अक्ष ज्यामितीय ध्रुव के चारों ओर एक वृत्तीय गति प्रारम्भ कर देगा।

* इस प्रभाव के लिए जो पार्थिव सहति-परिवहन सबसे अधिक महत्त्व का है, वह एशिया महाद्वीप और प्रशान्त महासागर के बीच, यहाँ से वहाँ और वहाँ से यहाँ होनेवाला वायु का वार्षिक अभिप्रचारण है।

अब आइए, अपने सैद्धान्तिक परिणामों की ध्रुवीय उच्चावचनों के प्रेक्षणों से तुलना करे, जो अन्तर्राष्ट्रीय सहयोग से इकट्ठे किये गये हैं।

आ० ४४ में सन् १८९५ और सन् १९०० के बीच प्राप्त ध्रुपथ का स्थूल लेख्य किया गया है।



आकृति ४४—ध्रुवीय उच्चावचन, १८९५ और १९०० वर्षों के बीच के बादलर के आवर्तकाल का पुष्टीकरण।

एगोलीय ध्रुव का जीतत विचलन, अर्थात् यूलर-वृत्त की माध्य त्रिज्या, इन वर्षों के प्रेक्षणों के अनुसार, कोई ८ सेकंड चाप के या पृथ्वीतल पर ४ मीटर की है। परंतु १० मास के काल के स्थान पर, आ० ४४ के अनुसार, सन् १९९६ से १९०० तक के चार वर्षों में ३३ पूरे परिक्रमण हुए, जिसके अनुसार काल १४ मास का हुआ।

यह चोख मान का आवर्तकाल, 'उमके जन्मकाल' के नाम पर, 'चैण्डलर' काल कहलाता है। इसका स्पष्टीकरण उन प्रत्यासन्न विद्युतियों में होना है जो ध्रुवीय उच्चावचन द्वारा परिवर्तित अपेक्षित प्रभाव के परिणामस्वरूप पृथिवी में होती है। पृथिवी की प्रत्यासन्नता के मापक का परिमाण फोल्डाद के मापक की बराबरी करता है।

आकृति ४४ में खींचा हुआ प्रक्षिप्त ध्रुवपथ निम्नलिखित तीन प्रभावों के अध्यारोपण द्वारा नमूना जा सकता है—(१) चैण्डलर-काल में हुए उच्चावचन, (२) वार्षिक उच्चावचन, जिनका जन्म प्रकटनया जनश्रितीय है, और (३) अमम कालांतरों पर होनेवाले विचलन जो पृथक्-पृथक् अवस्थित महानि-परिग्रहनों की और लक्ष्य कर सकते हैं। यूलर के उन दैन-मासिक काल का कोई भी चिह्न नहीं मिलता, जो पृथिवी को एक आदर्श दृढ़ पिंड मानकर स्वरूप दिया गया था।

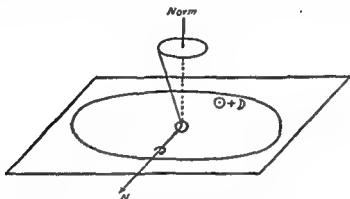
पूर्णाक्ष स्थापकीयवाद की प्रथा के अनुरूप हमने पृथिवी के अक्ष की गति का घूर्णन किया, जिसका पहले-पहल यूलर ने "बलों के अनधीन पुर सरण" की भांति अनु-मथान किया था। इस प्रकार हमने एक ऐसा शब्द अपना लिया है जो खगोल विज्ञान के प्रयानुसार एक विलकुल दूसरे ही अर्थ में व्यवहृत होता है। वहाँ "पुर सरण" से, 'क्रातिवृत्ति' के अभिलम्ब के चारों ओर पृथिवी के अक्ष के उस शून्य घूर्णन से मतलब है, जिसके कारण विपुर्विदु' ५०" प्रति वर्ष की दर से आगे बढ़ते रहते हैं।

विपुर्वो' के इस पुरःसरण का आवर्तकाल $\frac{360^\circ}{50''} = 26000$ वर्षों का है। "विपुर्वो के पुर सरण" के स्थान पर "पातो की रेखा का आगे बढ़ना" भी कह सकते हैं। [क्रातिवृत्तीय समतल जिम रेखा पर पृथिवी के निरक्षीय समतल को काटता है, उसे 'पातो की रेखा' या 'पातरेखा' कहते हैं।] जैसा पहले कह चुके हैं, हमारा "पातों की रेखा" वाला नाम खगोल विद्या से लिया गया था।

विपुर्वो का पुरःसरण कोई स्वतंत्र गति नहीं है, बल्कि सूर्य और चंद्र के आकर्षणों के समुक्त प्रभाव द्वारा भूमण्डलीय लट्टू पर प्रणोदित गति है।

- | | | |
|-------------|---------------------|-----------------------|
| 1. Chandler | 2. Ecliptic | 3. Equinoctial points |
| 4. Equinox | 5. Equatorial plane | |

इस प्रभाव का स्पष्टीकरण हम आ० ४५ द्वारा करेंगे, जहाँ हमने भारी संमित लट्ट के मिथानवाद की पूर्वं कल्पना, कम से कम गुणात्मक दृष्टि से, कर ली है।



आकृति ४५—“विपुर्वों का पुरसरण” नामक
पृथिवी के अक्ष का पुरसरण।

रेखाचित्र में ऋतिवृत्त को समतल दिखलाया गया है जिस पर एक वृत्त खींच दिया गया है। हमें समझना चाहिए कि इस वृत्त की परिधि समभाव से सूर्य \odot और चंद्र \bigcirc की सहितियों से “लीप” दी गयी है। [वास्तव में हमें दो वृत्त खींचने चाहिए, एक सूर्य के लिए और एक चंद्र के लिए। हमने इन दोनों वृत्तों को एक में ही मिला दिया है।] एक समान सहित-वितरण सूर्य और चंद्र के (गाउसीय स्थानच्युति की विधि के भाव में) उनके परिभ्रमणों में उनके पृथिवी सवधी क्षणिक स्थानों का समय-अंशित निरूपित करते हैं। इस प्रकार का समय-अंशित लेना इस प्रयोगात्मक तथ्य द्वारा ठीक ठहराते हैं कि पुरसरण के उल्लिखित आवर्तकाल की तुलना में सूर्य और चंद्र के आवर्तकाल बहुत ही छोटे हैं, अतएव यह पुरसरण किसी भी सूर्य और चंद्र के क्षणिक स्थानों पर निर्भर नहीं कर सकता। $\odot + \bigcirc$ वृत्त के केंद्र पर, भूमध्यरेखा पर अपने दो उभारों के सहित पृथिवी की एक अनुप्रस्थ काट दिखायी गयी है। ये उभार ही प्रस्तुत घटना में भाग लेते हैं, क्योंकि $\odot + \bigcirc$ वलय दोनों उभारों को ऋतिवृत्त के समतल में खींच लाना चाहते हैं। यह एक ऐसा प्रभाव है जो अन्तर्ज्ञानितः प्रत्यक्ष जैसा जान पड़ता है। अतएव पात-रेखा N के

* बात तो यह है कि चंद्र पृथिवी के इतना पास है कि उसका प्रभाव सूर्य-के प्रभाव से लगभग दुगुना है।

चारों ओर एक ऐंठ प्राप्त होती है जो N के चारों ओर दिखलायी तीर की दिशा में होती है। यह ऐंठ उसी प्रकार की है जैसी कि एक ऐसे लट्टू पर आरोपित गुरुत्वाकर्षणीय ऐंठ, जिसका सहति-केन्द्र उसके स्थिर आधार बिंदु के नीचे होता है। अतएव परिणाम भी वैसा ही होता है जैसा कि लट्टू वाली स्थिति में। लट्टू अपने को ऐंठ को तो नहीं सौंप देता, किंतु उसका आकृति-अक्ष उमसे "बचकर" एक लंबवत् दिशा में चला जाता है और ऊर्ध्वाधर के चारों ओर एक पुर सरण का शकु बनाने लगता है। ऊर्ध्वाधर यहाँ क्रातिवृत्त का अभिलव^१ है।

निश्चय ही, सम पुर सरण भारी लट्टू की गति का एक विशेष प्रकार है (दे० पृ० १८३)। अतएव प्रस्तुत परिस्थितियों में अधिकतर व्यापक छद्म-सम पुर सरण की प्रत्याशा करनी चाहिए, जिसमें सम पुर सरण पर छोटे-छोटे "अक्ष-विचलन"^२ अध्यारोपित होंगे। ये छोटे-छोटे अक्ष-विचलन और कुछ नहीं, 'केवल बलों के अनधीन आकृति-अक्ष के शक्वाकार दोलन-वृंद, अतएव, प्रस्तुत स्थिति में, ध्रुवीय उच्चावचन हैं जो यूलर के आवर्तकाल में होते हैं [या चण्डलर काल में, जो भूमंडलीय विकृति द्वारा पूर्वोक्त से प्राप्त होते हैं]। जिन छद्म-सम पुर सरणों की प्रत्याशा थी वे इस प्रकार बलों की अनुपस्थिति में होनेवाले यूलरीय अक्ष-विचलन को जोड़ देने से विपुवो के पुर सरण से प्राप्त होते हैं।

यहाँ पर एक बार फिर हम एक पद के द्व्यर्थक व्यवहार के लिए क्षमायाचना करते हैं। खगोल विज्ञान में अक्ष-विचलन से पृथिवी के अक्ष का स्वतंत्र उच्चावचन नहीं समझा जाता, वरन् वह, जो उस पर चन्द्र की गति से प्रणोदित होता है। आकृति ४५ में हमारे उल्लिखित अनुमानों के प्रतिकूल, चन्द्र का कक्षा-समतल क्राति-वृत्त से सपाती नहीं है, वरन् उससे कोई 5° के कोण पर झुका हुआ है। सूर्य और पृथिवी की संयुक्त क्रिया के अधीन उसका अभिलव भी क्रातिवृत्त के अभिलव के चारों ओर एक पुर सरण शकु की रचना करता है। यह पुर सरण चन्द्रीय पातों के पश्चसरण^३ के समान है। [चन्द्रीय कक्षा की क्रातिवृत्त से काट को 'चन्द्रीय पात' कहते हैं।] परंतु यह पश्चसरण पृथिवी की पातरेखा के आगे बढ़ने की अपेक्षा बहुत ही शीघ्रता से, केवल १८ ३/४ वर्षों में, होता है। यह समझने में कोई कठिनाई न होनी चाहिए कि इस पुर सरण में अपनी वारी से पृथिवी का अक्ष भी जाता है। चन्द्रीय पातों के

पश्चसरण का परिणाम होता है पृथिवी-अक्ष का खगोल विज्ञान में आया अक्ष-विचलन, जिसका आवसंकाल वही है जो चद्र-पातों के पश्चसरण का है।

(३) बलों के अनघोन अ-संमित लट्टू की गति। स्थायित्व के विचार से उसके घूर्णनों की परीक्षा।

अब हम समीकरणों (4) के समाकलन की ओर चलते हैं, उस स्थिति में जब $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. इन समीकरणों को क्रमान् $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ से गुणा कर उनका योग निम्नलिखित प्रदान करता है—

$$I_1 \omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + I_2 \omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + I_3 \omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0$$

या, समाकलन करने पर,

$$(17) \quad \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \text{नियत} = E.$$

E ऊर्जा (ऊर्जा नियतांक) है और बायाँ अंग गतिज ऊर्जा है। यह समी० (22.12b) से सहमत है यदि उसे मुख्य अक्षों के लिए विशिष्टीकृत कर ले। स्पष्ट है कि (17) के स्थान पर हम निम्नलिखित भी लिख सकते हैं—

$$(17a) \quad E_{kin} [E \text{ गतिज}] = \frac{1}{2} M \cdot \omega.$$

इसके स्थान पर हम समीकरणों (4) को $I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3$ से गुणा कर सकते हैं। जोड़ने से एक बार फिर दायी ओर शून्य मिलता है। समाकलन का फल इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$(18) \quad (I_1 \omega_1)^2 + (I_2 \omega_2)^2 + (I_3 \omega_3)^2 = \text{नियत} = |M|^2.$$

बायी ओर कोणीय संवेग घटकों के वर्गफलों का योग है। जैसा कि जानते हैं, बलों की अनुपस्थिति में यह योग निश्चर रहता है, गति के मध्य में घटक भले ही बदले।

(17) और (18) में हमें $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ के लिए दो रैखिक समघात समीकरण मिलते हैं, जिनको, उदाहरणार्थ, ω_2^2 और ω_3^2 के लिए ω_1^2 के पदों में हल कर सकते हैं,

$$\omega_2^2 = \beta_1 - \beta_2 \omega_1^2, \quad \beta_1 = \frac{2EI_3 - |M|^2}{I_2(I_3 - I_2)}, \quad \beta_2 = \frac{I_1(I_3 - I_1)}{I_2(I_3 - I_2)};$$

(19)

$$\omega_3^2 = \gamma_1 - \gamma_2 \omega_1^2, \quad \gamma_1 = \frac{2EI_2 - |M|^2}{I_1(I_3 - I_2)}, \quad \gamma_2 = \frac{I_1(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_2)}.$$

४.२६ यूटर के समीकरण बलों के अनघोन लट्टू की मात्रात्मक विवृति १९७

ω_2, ω_3 के दन मानों को यदि (4) के प्रथम समीकरण में प्रतिस्थापित करें तो निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$(20) \quad \left[(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2) (\gamma_1 - \gamma_2 \omega_1) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{I_2 - I_3}{I_1} dt$$

अतएव t, ω_1 में, प्रथम प्रकार का दीर्घवृत्तीय समीकरण है (मिलाइए, पृ० १३८) । फलनवाद हमें इसका उलटा कहने की अनुमति देता है कि t_1 समय का दीर्घ-वृत्तीय समीकरण है। निगदेह यही ω_2 और ω_3 के लिए भी लागू है।

समीकरणों (17) और (18) में यह और भी निकलता है कि ध्रुव-गकु या पिंड-गकु अब वृत्तीय गकु नहीं रहता, जैसा कि समित लट्टू के लिए वह होता है, परन्तु चतुर्थ पात का गकु हो जाता है।

अंत में अपने तीन मुख्य अक्षों में से किसी एक के चारों ओर अ-समित लट्टू के घूर्णन पर विचार करेंगे। हम जानते हैं (मिलाइए, § २५, उप प्र० (३) की समाप्ति की ओर) कि वे स्थिर भाव के घूर्णन होंगे। निश्चितता के लिए हम सनक्ष लेगे कि—

$$A > B > C.$$

हम देखेंगे कि महत्तम और लघुतम अवस्थितिरव घूर्ण के अक्षों के प्रति के घूर्णन स्थायी होंगे, अंतरवर्ती मुख्य घूर्ण के अक्ष के प्रति के अस्थायी। हम समीकरणों (17) और (18) में आरम्भ करना ठीक समझते हैं। आगे दिये हुए रेखाचित्रों (आकृतियाँ ४६, पृ० १९८) के सवध में सुविधाजनक होगा कि इन्हे कोणीय गवेग-घटकों M_1, M_2, M_3 के पदों में लिख ले—

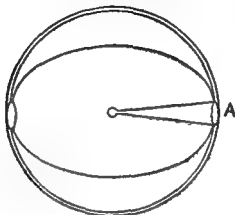
$$(21a) \quad \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = \text{नियत},$$

$$(21b) \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \text{नियत} = |M|^2$$

समी० (21b) एक गोल का समीकरण है जिसकी त्रिज्या $|M|$ है; (21a) तीन पृथक् अक्षों के दीर्घवृत्तज ("अभ्रष्ट" दीर्घवृत्तज) का है।

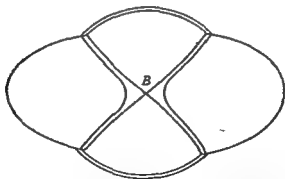
स्थिति १—दीर्घवृत्तज (21a) के दीर्घतम अक्ष के चारों ओर घूर्णन। शुद्ध घूर्णन में गोला बाहर से दीर्घवृत्तज को बिंदु A (आ० ४६क) पर स्पर्श करता है।

व्यापकतया, एक हलका-सा झटका भोले और दीर्घवृत्तज दोनों में ही परिवर्तन कर देगा। स्पर्शता का बिंदु A एक छोटे-से प्रतिलिखित-वक्र में परिवर्तित हो जायगा,



आकृति ४६ क—असमित लट्टू का घूर्णीय दीर्घवृत्तज के दीर्घतम अक्ष के चारों ओर स्थायी घूर्णन

परंतु यह A के आस-पास ही रहेगा। परिणाम होगा एक सँकरा पिंड-शंकु। प्रारंभ का घूर्णन स्थायी सिद्ध होता है।



आकृति ४६ ख—असमित लट्टू का घूर्णीय दीर्घवृत्तज के अंतरवर्ती अक्ष के चारों ओर अस्थायी घूर्णन

यही बात स्थिति ३ में भी होती है जिसमें घूर्णन दीर्घवृत्तज (21a) लघुतम अक्ष पर होता है। इस स्थिति में गोला दीर्घवृत्तज के भीतर होता है और इसलिए स्पर्शता भीतर से होती है। हलका-सा झटका यहाँ भी स्पर्शता-बिंदु को आस-पाम के वक्र में रूपांतरित कर देगा। आरम्भ का घूर्णन यहाँ भी स्थायी होगा।

स्थिति २—अंतरवर्ती अक्ष के चारों ओर घूर्णन। यहाँ गोल दीर्घवृत्तज को एक चतुर्थ घात के वक्र में प्रतिच्छेद करता है। उसका अपूर्व बिंदु B (आ० ४६-ख में सबसे आगे का बिंदु) प्रारम्भ के घूर्णन को निरूपित करता है। यदि लट्टू को एक छोटा-सा आवेग दिया जाय तो प्रतिच्छेद वक्र फटकर दो शाखाओं में हो जाता है। घूर्णन अक्ष इनमें की एक शाखा पर चल निकलता है और पिंड में उमके आदि के स्थान से उसकी दूरी बढ़ती रहती है। घूर्णन अस्थायी होगा।

इन बातों को वैश्लेषिकतया मिश्र करना शिक्षाप्रद होगा। वैसे करने के लिए अवकल समी० (4) से आरम्भ करते हैं। यह दिखलाया जा सकता है (प्रश्न IV. 2) कि आरम्भ के घूर्णन के छोटी-सी स्थानान्तरण द्वारा उत्पादित पार्श्वीय घटकगण प्रथम घात के दो पुनरुत्पन्न अवकल समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं। प्रथम और तृतीय स्थितियों में तो इनके माधन त्रिकोणमितीय-आत्मक होते हैं परंतु द्वितीय स्थिति में घातीय-आत्मक^१ (स्थायित्व की कमीटी के लिए अत्यणु दोलनों की विधि)।

आइए, निम्नलिखित प्रयोग दियासलाई की (भरी हुई) डिबिया के साथ करें—उसके सबसे छोटे एक किनारे को आमने-सामने अँगूठे और तर्जनी से पकड़ कर डिबिया को झटका देकर छोड़ दीजिए (कि डिबिया लघुतम किनारे पर फालावाजियाँ करती हुई गिरे)। इस प्रकार उसे इस लघुतम किनारे के प्रति पर्याप्त बड़ा कोणीय संवेग दे देते हैं। हम देखेंगे कि यदि प्रारम्भ में डिबिया का ऊपर का लेवल वाला पार्श्व दिखलाई देता हो तो सारी गति भर वही पार्श्व दिखलाई देता रहेगा। यदि दीर्घतम किनारे को उसी प्रकार पकड़ कर छोड़े तो वही घटना होगी यद्यपि उतनी स्पष्टता से नहीं। परंतु यदि अंतरवर्ती किनारे को आमने-सामने से पकड़ें कि सलाई लगाने वाला पृष्ठ दिखाई दे और अब पहले जैसी प्रक्रिया करें तो सारी गति भर हम यह पृष्ठ न देखेंगे, वरन् रंग-परिवर्तन होता रहेगा।

गति की दशा के अस्थायीपन का एक दूसरा उदाहरण निम्नलिखित है—कभी-कभी प्रकृति में घिसकर चिकने हुए पृष्ठों वाली चपटी बटियाँ या छोटे-छोटे पत्थर

के टुकड़े मिलते हैं। किसी चौरस आधार पर रख कर यदि उन्हें अपने ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर नचावे तो घूर्णन की केवल एक ही दिशा के लिए वह गति स्थायित्व दिखायेगी। यदि इसको प्रतिकूल दिशा में नचाया जाय तो अधिकाधिक लड़खड़ाने लगेगी और अंत में स्थायी दिशा में, प्रारंभ की दिशा से प्रतिकूल दिशा में, नाचने लगेगी। यही घात बहुधा छोटे-छोटे जेबी (पेंसिल बनाने के) चाकुओं के साथ भी होती दीख पड़ेगी, यदि हम चाकू के फल बढ़ कर, उसे किनारे पर रख कर हलका-सा आवेग दे दें।

इस संबंध में हम ज्यामितीय दृष्टि से सुस्पष्ट शिक्षाप्रद प्रयोग भी कर सकते हैं। एक अभ्रष्ट^१, चपटा, मुख्य अक्ष a , b , c वाला ($a > b > c$ तथा a और b का दैर्घ्य c से बहुत अधिक), लकड़ी का बना दीर्घवृत्तज का प्रतिमान^२ लीजिए। इस पर एक धातविक भारी पट्टी लगा दीजिए जो कि प्रारंभ में दीर्घवृत्तज के तल से (a , c) काट में सटी हुई रहे। पट्टी को छोटे c -अक्ष के चारों ओर घुमा फिरा सकते हैं, परंतु प्रत्येक प्रयोग में जकड़ी हुई रखी जाती है। ac स्थिति में पट्टी संहति-वितरण की समिति में गड़बड़ी नहीं डालती। c के चारों ओर का घूर्णन दोनों दिशाओं में एक-सा स्थायी होगा। अब पट्टी को इस स्थिति से छोटे-से कोण द्वारा घुमा दीजिए। तो दोनों अवस्थितित्व के मुख्य अक्ष a और b में का प्रत्येक एक छोटे-से कोण γ द्वारा विस्थापित हो जावेगा। समतल आधार के सामने के दीर्घवृत्तज के निचले तल की समिति ac और bc समतलों की दो मुख्य वक्रता त्रिज्याओं द्वारा निर्धारित होती है। अतएव इन समतलों की समिति अपरिवर्तित रहती है। न्यूनकोण γ में नचाने की दिशा अब प्रतिकूल दिशा से ज्यामितीयतया, “पहचानी” जा सकती है। वास्तव में पूर्वोक्त स्थायी है, उत्तरोक्त अस्थायी क्योंकि उस स्थिति में लुंठन (लुढ़कने) की गतियाँ होती हैं जो समय के साथ और भी अधिक हो जाती हैं।

इस प्रयोग का एक अधिक सुंदर, यद्यपि कम सुलभता से प्राप्य, रूप निम्नलिखित है (जी० टी० वाकर ने उसका निदर्शन हमें सन् १८९९ में ट्रिनिटी कालेज, कैम्ब्रिज में कराया था) — अभ्रष्ट दीर्घवृत्तज पीतल की चादर का बना हुआ है। आधार बिंदु के चारों ओर के कुछ वृत्तीय प्रदेश पर ठप्पा डाला हुआ है। शेष के दीर्घवृत्तीय ढाँचे पर यह चलाया जा सकता है। इम डाट के एक छोटे-से कोणीय विस्थापन

द्वारा आधार बिंदु के पाग के निचले तल के वक्रता-संयुध, ढाँचे के अवस्थितीय वितरण के लिए, बदल जाते हैं यद्यपि यह वितरण गोचरतया अपरिवर्तित रहता है। यह परिवर्तन इतना कम है कि यदि दीर्घवृत्तज की परीक्षा करे तो वह अनिश्चित ही रहता है। फिर भी नचाने की एक दिशा अभी भी दूसरी की अपेक्षा अधिमान्य है।

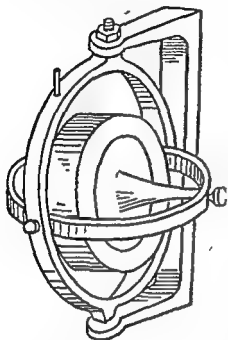
अभ्रष्ट दीर्घवृत्तज के ये प्रयोग, स्वयमेव ज्ञानप्रद, इस घटना की घंश्लंपिक विवृति का पर्याप्त प्रतिस्थापन भी प्रदान करने हैं। इस प्रकार के गणितीय अनुसंधान में उन कुंठन-दोलनों की जांच-पड़ताल करनी होगी जो नचाने पर किसी छोटी-सी स्थान-च्युति के अप्यारोपण में एक या दूसरी दिशा में नचाने के नाथ होने लगते हैं। वह दिखावेगा कि इन दोलनों की आवृत्ति के लाक्षणिक समीकरण के वास्तविक मूल एक ही स्थिति में होंगे, दूसरी स्थिति में मूल सम्मिश्र होंगे। प्रथम स्थिति में निर्णय होगा कि घूर्णन स्थायी है, द्वितीय स्थिति में अस्थायी अर्थात् स्थान च्युति का अधिकाधिक होते रहता। इस विवृति के समीकरण राज्य^१ कृत त्रय (उच्चतर भाग, प्रकरण २४ तथा आगे के) में दिये हैं जिनका उल्लेख § ४२ में होगा।

§ २७. नाचते हुए लट्टू के सिद्धान्त सम्बन्धी प्रदर्शक-निदर्शन-प्रयोग ; व्यावहारिक अनुप्रयोग

कार्डन^१ का आलंबन नामक सुविज्ञात युक्ति के वर्णन में हम प्रारंभ करते हैं। लट्टुओं और घूर्णाक्ष स्थापकों^२ के गुणधर्मों के निदर्शन के लिए यह एक असाधारणतया कार्यनाथक उपाय प्रस्तुत करता है।

आलंबन में एक बाहरी और एक भीतरी बलय (घेरा) होता है। बाहरी घेरे की एक ऊर्ध्वाधर धुरी होती है जो बाहरी ढाँचे या पिंजरे में लगी होती है। भीतरी घेरे की एक क्षैतिज धुरी होती है जो बाहरी घेरे में लगी होती है। गतिपालक चक्र के रूप का लट्टू भीतरी घेरे के घूर्णन-अक्ष के लववत् अपने अक्ष पर घूर्णन करता है। आकृति ४७ गतिपालक धुरी को बाहरी घेरे के अक्ष के लववत् लक्ष्य करते हुए दिखलाती है। यह भीतरी बलय को क्षैतिज समतल में रखता है। उपकरण की इस व्यवस्था को उसकी प्रकृत स्थिति कहेंगे।

गतिपालक चक्र की धुरी पर एक ऐसा उपाय किया हुआ है कि जिवलों^१ (लट्काने के छल्ले आदि की युक्ति) को स्थिर रखते हुए, चक्र को उसकी प्रकृत स्थिति



आ० ४७—कार्डन-आलंबन में घूर्णाक्ष स्थापक। बाहरी वलय का घूर्णनाक्ष=उर्ध्वाधर; भीतरी वलय का घूर्णनाक्ष=कागज के लंबवत् क्षैतिज; घूर्णाक्ष स्थापक के स्थायी घूर्णनाक्ष=कागज के समतल में क्षैतिज।

२. अब बाहरी वलय को दबाइए। वह तो गतिहीन रहता है परन्तु भीतरी वलय, बाहरी वलय पर, दाब की दिशा में निर्भर करता हुआ, अपनी क्षैतिज स्थिति से ऊपर या नीचे जाता है। बाहरी वलय पर यदि मुक्का भी मारे, तो भी वह विशेष कुछ नहीं दबता। परन्तु वैसा करने पर देखेंगे कि लट्टू के अक्ष का, प्रकृत अवस्था में अक्ष के पास के स्थान के चारों ओर, एक क्षिप्र शक्रीय दोलन होने लगता है।

में रखते हुए कोणीय सवेग दिया जा सकता है। इस कोणीय सवेग को इतना बड़ा होना चाहिए कि अन्य सब बातें उसी से सारतः शासित रहें और जिवलों की संहति का प्रभाव उपेक्षित रहे।

नीचे दिये हुए प्रयोगों में काफी बड़ा कोणीय सवेग और आदि में प्रकृत स्थिति मान ली जायगी।

१. भीतरी वलय पर हम हल्का-सा दाब नीचे की ओर डालते हैं। परन्तु यह वलय नहीं दबता वरन् बाहरी वलय पलट जाता है। इसलिए गतिपालक चक्र का अक्ष, क्षैतिज समतल में, दाब डालने के स्थान पर निर्भर करते हुए, आगे या पीछे को जाता है। भीतरी वलय को दबाने के बदले उस पर एक छोटे-से बट्टे द्वारा, एक-पास्वर्तः बोझ डाल सकते हैं। तो जब तक कि कोणीय सवेग काफी बड़ा रहता है लट्टू का क्षैतिज अक्ष एक सम पुरःसरण करता है।

३. यदि बाहरी वलय पर दाब पड़ता रहे जिमने कि भीतरी वलय के अन-परत पूर्णन के कारण, लट्ठू का अध ऊर्ध्वाधर के पान पहुँचना रहे, तो देखेंगे कि बाहरी वलय का प्रतिरोध अधिकधिक दुर्बल होता जाता है। तब अनावान ही बाहरी वलय को क्षिप्र पूर्णनावस्था में कर सकने हैं, परन्तु उगी दिशा में जिमने कि प्रारम्भ में दाब डाला गया था। यदि बाहरी वलय को प्रतिकूल दिशा में घुमाने का यत्न करें तो गतिपालक चक्र "विद्रोह" करना है, उनका अध पृष्ठागत प्रतिकूल दिशा में जाना चाहता है, और इन प्रकार भीतरी वलय को 180° के कोण का नटका दे देता है। अब बाहरी वलय को अनावान इन प्रतिकूल दिशा में घुमा सकने हैं; परन्तु यदि प्रारम्भ की पूर्णन दिशा को छोटावे तो लट्ठू को एक दूगरा घटका लगता है।

४. यह घूर्णनोंकी परस्पर समांतर होने की प्रवृत्ति है जिमके बारे में कृको¹ ने ज़ोर दिया था। लट्ठू का अध ऊर्ध्वाधर स्थिति में तभी तक स्थायी दशा में होगा जब तक कि उसका पूर्णन बाहरी वलय के पूर्णन में समसंस्थ² अर्थात् एक ही भाव में (मम, गमान; मस्थ, ठहराव) रहेगा। इसके विपरीत, यदि घूर्णन प्रति-ममातर हो तो यह स्थिति अत्यन्त ही अस्थायी होगी और अध तब ही विराम दशा में जावेगा जब कि वह प्रतिकूल दिशा में पहुँच जाय। इस पश्चोन्त दिशा में दोनों घूर्णन-अक्षों का ममानरत्न फिर सममस्थ हो जाता है। यदि बाहरी वलय के पादवीं पर दोनों ओर पारी-पारी ने उचित ताल में दाब डालें तो लट्ठू को भीतरी वलय के अध के चारों ओर निरन्तरतया परिक्रमण करा सकते हैं।

५. यदि भीतरी वलय को बाहरी ने इन प्रकार बांध दे कि भीतरी वलय की गतिशीलता न रहे तो लट्ठू का गति के विरुद्ध प्रतिरोध भी नष्ट हो जाता है। ऐसा जान पड़ने लगता है कि अब उसकी कोई अपनी निज की इच्छा रही हो नहीं और अब जो भी दाब बाहरी वलय पर डाला जाय, लट्ठू उसी का अनुसरण करता है, मानों लट्ठू नाच ही न रहा हो। इस प्रकार लाक्षणिक घूर्णाक्ष-स्थापकीय प्रभाव तभी होते हैं जब लट्ठू की स्वतंत्रता-सख्याएँ तीन हों, यदि ये दो ही हुईं तो उक्त प्रभावों का नितात अभाव हो जाता है। परन्तु पृ० १०१ पर वर्णित आवर्तन-स्टूल के घूर्णनयुक्त पटरे से लट्ठू को बलप कर देने से लुप्त स्वतंत्रता-सख्या का प्रत्यवस्थान³ किया जा सकता है। यह इस प्रकार किया जाना चाहिए कि बाहरी वलय का अध, जो अब

तक ऊर्ध्वाधर रखा गया है, स्टूल के अक्ष के (जो सदा ऊर्ध्वाधर रहता है) विचार से झुका जाय और झुकाने का कोण बहुत छोटा न हो, तो दो स्वतंत्रता-संख्याओं वाले लट्टू का अक्ष घूर्णन करते हुए आधार के अक्ष की रेखा में होना चाहता है, ठीक वैसे जैसे कि दिक्चूचक की सुई चुबकीय उत्तरी ध्रुव की ओर होने की चेष्टा करती है, अर्थात् ऊपर वर्णन किये हुए समसंस्थ समांतरत्व के भाव में। इस प्रकार लट्टू को रखनेवाले एकाकी वलय का अक्ष ऊर्ध्वाधर समतल में होकर इस प्रकार ठहरेगा कि लट्टू की धुरी की एक या दूसरी नोक, स्टूल के घूर्णन की दिशा पर निर्भर करते हुए, सबसे ऊपर होगी।

इन सब घटनाओं का स्पष्टीकरण (25.5) के मौलिक सिद्धांत में, अर्थात्

$$(1) \quad dM = L \, dt.$$

अतिनिहित है। इस समीकरण द्वारा ऊपर दिये हुए पाँचों प्रयोग नीचे लिखे प्रकार से स्पष्टीकृत होते हैं।

१. जब भीतरी वलय को दबाते हैं तब L क्षैतिज और भीतरी वलय के घूर्णन अक्ष से सपाती होगा। कोणीय संवेग M आ० ४७ की दायी या बायी ओर निर्देशित होगा और इसलिए L द्वारा पार्श्वतः विक्षिप्त हो जायगा। यदि यह मान लिया जाय कि लट्टू के अक्ष में, जो प्रारंभ में कोणीय संवेग से सपाती होता है, उसी का अनुसरण कर इस सपात को बनाये रखने की प्रवृत्ति होती है, तो आकृति-अक्ष का पार्श्वीय विक्षेप, अर्थात् बाहरी वलय का घूर्णन, स्पष्ट हो जाता है। जो अनुमान यहाँ किया गया है वह लट्टू के पर्याप्त क्षिप्र घूर्णनों के लिए वास्तव में वैध है, यह § ३५ में समर्थित किया जायगा (देखिए, उस प्रकरण में छद्म-सम पुर-सरण के बारे में विचारालोचन)।

२. यदि बाहरी वलय पर दाव डाले तो L ऊर्ध्वाधरतया निर्देशित होता है। कोणीय संवेग, जो प्रारंभ में क्षैतिजतया दाये या बाये निर्देशित होता है, ऊपर या नीचे की ओर विक्षिप्त हो जायगा। अतएव उसी अनुमान द्वारा, जो (1) में किया था, भीतरी वलय का घूर्णन प्राप्त करते हैं। यदि बड़ा प्रबल मुक्का बाहरी वलय पर लगायें तो कोणीय संवेग और लट्टू के अक्ष का सपात वाला हमारा अनुमान सन्निकटतया ही मनुष्ट होगा। तो अब पहले कहे हुए वे छोटे-छोटे शक्वाकार दोलन होने लगेंगे, जिनसे दोनों अक्षों के छोटे-से स्थान-भ्रम होने का भेद खुल जाता है।

३ और ४. उसी प्रकार देखिए कि यदि कोणीय सवेग का अक्ष ऊर्ध्वाधर-प्राय हो और यदि बाये वलय को लट्टू के घूर्णन के समसम्य भाव में घुमाये, तो कोणीय सवेग का अक्ष और अधिक ऊर्ध्वाधर के पाम हो जाता है। तब जिवल और गति-पालक चक्र एक ही ने होकर ऊर्ध्वाधर के चारों ओर घूर्णन करते हैं। बाहरी वलय का प्रतिरोध जाता रहता है। यदि बाहरी वलय को अममसम्य या प्रतिममातर भाव में घुमा दे तो अक्ष का ऊर्ध्वाधर में तनिक-मा ही विचलन अक्ष को ऊर्ध्वाधर से अधिकाधिक हटाने के लिए पर्याप्त होता है। लट्टू की ऊर्ध्वाधर-प्राय स्थिति ऐसे असमसम्य घूर्णन के लिए अस्थायी मिद्ध होती है।

५. यदि बाहरी और भीतरी वलय को एक-साथ बांध दे तो बाहरी पहिये के घूर्णन से उस पर लगायी हुई ऊर्ध्वाधर ऐठ L के बल कोणीय सवेग का अक्ष अब ऊर्ध्वाधर समतल में नहीं घूम सकता। अतएव ऐठ सारे निकाय में संचारित हो जाती है। ऐसा होना संभव है क्योंकि सदिश M में जो क्षैतिज दिक्-परिवर्तन होता है वह बाहरी वलय के धुराधारों द्वारा प्रतिकारित किया जा सकता है, क्योंकि अब भीतरी और बाहरी वलय दृढ़तापूर्वक सवधित हैं। परंतु आवर्तन-स्टूल पर ऐसा नहीं होता। यहाँ कोणीय सवेग आरोपित L का कम-से-कम कुछ-न-कुछ अनुसरण कर सकता है। इससे समझ में आ जाता है कि लट्टू के अक्ष की, स्टूल के अक्ष की दिशा में लक्ष्य करने की प्रवृत्ति क्यों होती है।

अब हम कई व्यावहारिक अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे। पहले से ही बता देना चाहिए कि आगे दिये हुए विवेचन की बहुत सी बातों के ब्यौरे पुराने माहित्य में मिल सकते हैं, जहाँ से ही नीचे की बहुत सी बातें ली गयी हैं।

(१) घूणक्षि-स्थायीकारक और तत्संबंधी बातें

सन् १८७० के लगभग हेनरी बेसेमर^१ ने, जिनका नाम धातुसोधन के लिए विख्यात है, इंग्लिश चैनल पर जहाजी यात्रा के लिए एक बँठक-कोठरी^२ का निर्माण किया। वह कोठरी इस प्रकार लटकायी हुई थी कि जहाज के एक आगे-पीछे के अक्ष के प्रति इधर-उधर झूल सकती थी और जहाज की झूलन से एक गतिपालक चक्र द्वारा बचायी जा सकती थी। परंतु गतिपालक चक्र का अक्ष कोठरी में दृढ़तापूर्वक स्थापित था और इसलिए उसमें आवश्यक तृतीय स्वतंत्रता-सख्या की

फमी थी (मिलाइए, ऊपर दिया हुआ ५वां विवरण)। अतएव उक्त निर्माण विफल सिद्ध हुआ और उसका शीघ्र ही परित्याग करना पड़ा।

पिस्टन इंजनों के संहति-संतुलन के संबंध में उल्लिखित (दे० पृ० १०३) ओ० दिलक^१ वह व्यक्ति हुए जिन्होंने प्रस्तुत समस्या को भी सफलता-पूर्वक हल कर डाला। उनकी विधि का कई स्टीमरों में व्यवहार किया गया, यथा हैबर्ग—अमेरिका लाइन के "सिलवाना"^२ और इटली के "कांत दि सेवाइया"^३ में। (पश्चोक्त के बारे में बहुत-सा साहित्य अमेरिकन प्रकाशनों में विद्यमान है।)

"सिलवाना" में गतिपालक चक्र का भार ५१०० किलोग्राम तथा उसका व्यास १.६ मीटर का था और वह १८०० घूर्णन प्रति मिनट करता था (जिससे १५० मीटर प्रति सेकंड परिमायी वेग^४ प्राप्त होता था)। वह एक पिंजरे में लगा हुआ था, जो लोलक की भांति, जहाज के इधर-उधर जाते हुए एक अक्ष पर झूल सकता था, जिस कारण गतिपालक चक्र का संमिति-अक्ष जहाज के आगे-पीछे वाले एक ऊर्ध्वाधर समतल में दोलन करता था। यह पिंजरा हमारे निदर्शन-लट्टू के भीतरी वलय के अनुरूप है तथा स्वयं जहाज का पेटा बाहरी वलय के अनुरूप। आ० ४७ के ऊर्ध्वाधर के स्थान पर यहाँ जहाज का लंबा अक्ष है, ऊर्ध्वाधर के चारों ओर के पहले के घूर्णनों के बदले अब जहाज का इधर-उधर का डोलना या झूलना है। आवश्यक तीन स्वतंत्रता संस्थाएँ जहाज के झूलनों, पिंजरे के दोलनों और गतिपालक चक्र के घूर्णनों से प्राप्त होती हैं। जब जहाज इधर-उधर झूलता है तब गतिपालक का अक्ष, जो प्रकृत दशा में ऊर्ध्वाधर होता है, अपने पिंजरे में पारी-पारी से आगे-पीछे झूलता है। अतएव जो ऊर्जा जहाज के इधर-उधर झूलने में होती है, वह पिंजरे की गति और स्थिति की ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। जहाज का लुण्ठन (इधर-उधर झूलना) और पिंजरे का झूलन अब एक-दूसरे से युग्मित हो जाते हैं। यदि, विशेषतः उनके निजी दोलनों में अनुनाद हो तो युग्मित लोलको की सी दशा प्राप्त होती है।

ठीक है कि अब तक जहाज के दोलनों का कुछ भी अवमंदन नहीं हुआ। परंतु अब पिंजरे की घुरी पर अनुप्रयुक्त एक ब्रेक-युक्ति द्वारा पिंजरे की दोलन-ऊर्जा और

1. O. Schlick 2. Silvana 3. Conte di Savoia
4. Peripheral velocity

इसलिए जहाज के लुण्ठन की ऊर्जा भी अवशोषित की जा सकती है, ठीक वैसे ही जैसे कि पहिये को स्पष्ट करने हुए एक ब्रेक-जूने' द्वारा गाड़ी का वेग कम किया जा सकता है। निस्संदेह, पिंजरे पर ब्रेक की क्रिया इतनी प्रबल न होनी चाहिए कि गतिपालक चक्र के अक्ष का विशेष बिलकुल ही न हो नके, क्योंकि तब फिर दो स्वतन्त्र-सहाराओं के प्रभावहीन उगी लट्टू की दशा आ जायगी। भूराष्ट्र के कपटेखों की भाँति के लुण्ठन गति के नेत्राचित्र दिखाने हैं कि ब्रेक-क्रिया के लिए एक उपयोगीतम या "नवमे अच्छे समझीते का" मान होता है। "मिन्वाना" में जैसे ही गतिपालक चक्र चलाया गया, प्रायः वैसे ही लुण्ठन का आयाम अपने प्रारम्भिक मान का केवल ५० वाँ या ३० वाँ ही रह गया। इस दशा में ढाँचे के दौलन का आयाम ३०° से ४०° के आस-पास रहता था।

यह नव होने पर भी पूर्णाक्षस्थापक^१ का अनुप्रयोग बहुत अधिक नहीं हुआ है। इसका कारण कुछ अंग में तो यह है कि इस प्रकार की रचना में कुछ खतरा सम्प्रतिष्ठित रहता है—गीघ्रता में घूमता हुआ भारी गतिपालक चक्र अप्रिय सह-यात्री है—और कुछ अंग में उमंग अधिक सफल एक प्रतियोगी का उद्भाव था। यह उद्भाव (उज्जा, इन्वेगन) या फ्राम^२ की स्थापन-टकी। यह युक्ति बिलकुल दूसरे सिद्धांत पर आधारित है।

ऊपर दी हुई बातों में मवधित एक समस्या जहाज पर घूर्णाक्षस्थापकीय विधि में किसी घूमनेवाली मेज का स्थायीकरण है। हम यह नहीं जानते कि व्यावहारिक उपयोग के लिए यह समस्या कहाँ तक हल की जा सकी है। प्रत्यक्ष कारणों के लिए सभी देशों में इस बात पर काम किया जा रहा है।

(२) घूर्णाक्ष दिक्सूचक

यह सर्वसुदर और निर्दोष-प्रायः घूर्णाक्ष-स्थापकीय युक्ति है। इसकी धारणा फूको के मन में उत्पन्न हुई थी। पृथिवी के घूर्णन को अपने लोलकीय प्रयोगों द्वारा निर्दिशित कर (देखिए अध्याय ५, § ३१), वही बात नचाने के लट्टुओं द्वारा करने की योजना फूको ने तैयार की। उनके अन्य बहुतेरे दिक्सूचक प्रयत्नों में यहाँ केवल घूर्णाक्ष दिक्सूचक की ही चर्चा करेंगे, जो कि चुंबकीय दिक्सूचक का स्थान लेनेवाला

था। फूको के घूर्णाक्ष दिक्सूचक में क्षैतिज समतल में नियंत्रित दो स्वतंत्रता-सख्याओं का नचाने का एक लट्टू होता है। यह समतल चुंबकीय उत्तरी ध्रुव की ओर नहीं, वास्तविक खगोलीय उत्तरी ध्रुव की ओर, अर्थात् पृथिवी के घूर्णन-अक्ष की दिशा को लक्ष्य करता है। वास्तव में ऊपर दिये हुए पंचम निदर्शन-प्रयोग में हम यह व्यवस्था ले चुके हैं जहाँ स्थिर भीतरी वलय के कर नाच-लट्टू को आवर्तन-स्टूल से बांध दिया था। घूर्णन करती हुई पृथिवी स्टूल के आवर्तन-पटरे का स्थान लेती है। दोनों स्थितियों में भेद केवल इतना ही है कि घूर्णनयुक्त पटरे को हम कोई भी बड़ा कोणीय वेग दे सकते हैं, जिस कारण लट्टू पर बड़ा प्रबल लक्ष्यकारक प्रभाव पड़ता है। परंतु पृथिवी का कोणीय वेग बहुत छोटा है। अतएव फूको का घूर्णाक्षस्थापक ठीक दिशा में आने में बड़ी देर लगाता है। प्रयोज्य की व्यवस्था के लिए कहा था कि बाहरी वलय और स्टूल के घूर्णन अक्षों के बीच का कोण बहुत छोटा न होना चाहिए। प्रस्तुत स्थिति में यह कोण भौगोलिक अक्षांश का कोटिपूरक कोण अर्थात् प्रेक्षण स्थान का “अक्षांश कोटि” है। पृथिवी के दोनों ध्रुवों पर यह कोण शून्य है। वहाँ लक्ष्यकरण-क्षमता भी शून्य हो जाती है। व्यापकतया यह क्षमता पृथिवी के कोणीय वेग, लट्टू के कोणीय सवेग और अक्षांश कोटि की ज्या की समानुपाती होती है।

फूको के प्रयोगों से प्रभाव के अस्तित्व का केवल स्थूल रूप से पता चलता है। उसका पूर्णतया प्रत्यक्षीकरण हर्मान आन्शुत्ज केम्प^१ ने, उनकी रचना के निर्माण में आनुक्रमिक सुधारों द्वारा, प्राप्त किया था। प्रारंभ में उनका मूल उद्देश्य बहती बरफ के नीचे से जाती हुई पनडुब्बी (सबमरीन) द्वारा उत्तरी ध्रुव पहुँचना था। कारण कि चुंबकीय दिक्सूचक के पाठ्यांक उत्तरी ध्रुव के पास बहुत ही अविश्वसनीय—और पनडुब्बी के भीतर तो नितांत विफल—हो जाते हैं। उन्हें लट्टू को अपना दिक्-अन्वेषक बनाने की मूर्खी। सच है कि कई दशकों तक इस भावना के अनुसरण में वे उत्तरी ध्रुव तो न पहुँचे, परंतु उनके प्रयोगों ने एक ऐसी आदर्श उपकरणिका तक पहुँचाया, जो कि जहाजी यात्राओं के लिए अपरिहार्य हो गयी है।

फूको से भिन्न, आन्शुत्ज-घूर्णाक्षस्थापक क्षैतिज समतल में ही चलने के लिए नियंत्रित नहीं होता, परंतु इस समतल पर लोलक की भाँति, अपने भार के कारण

खिच आता है। प्रारंभ में पारे पर उमके उतराने की व्यवस्था थी। पीछे की रचनाओं में दो या तीन लट्टुओं का व्यवहार किया गया, जिनके प्रभाव एक-दूसरे को प्रबल तथा सन्तुलित करते थे। नाचते लट्टुओं का कोणीय सवेग बैद्युत चालन द्वारा नियत रखा जाता है। नूतनतम आन्धुतज-रचना में सारा निकाय एक गोले में बंद रहता है। यह गोला जरा सी ही बड़ी त्रिज्या के एक दूसरे गोले में प्रायः बिना किसी घर्षण के तैरता रहता है। कारण कि घूर्णाक्षस्थापक को ऐसे पर्यटनों में ले जाना होता है जिनमें कई महीनों तक उसे छूना नहीं होता, किसी विशेष व्यक्तिपूर्ण, स्वतः चालित स्नेहन विधि का विधान करना होता है।

जहाज की अपनी ही गति के हानिकारक प्रभावों का निराकरण करने के उपाय विशेष महत्त्व के होते हैं। जब जहाज वक्र पथ पर जाता है या अपनी चाल बदलता है, तब क्षैतिज ममतल के ऊपर-नीचे दोलन करने की योग्यता रखता हुआ घूर्णाक्ष-दिक्सूचक सगत अवस्थितिवल का सुग्राही होता है। ये घूर्णन-अक्ष पर दाब डालते हैं, जिस कारण वह अपनी अक्षुब्ध स्थिति से विक्षिप्त हो जाता है और परिणामवश अशुद्ध आंकड़े प्राप्त होते हैं। यह दिखाया जा सकता है कि जहाज की गति हानिहीन हो जायगी यदि ध्रुववृत्त के प्रति दिक्सूचक के स्वतंत्र दोलनों का आवर्तकाल T निम्न-लिखित हो

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} = (8\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot 10^3 \text{ सेकंड} = 84.4 \text{ मिनट}$$

यहाँ यह आवर्तकाल वही है जो ऐसे लोलक का होगा, जिसका दैर्घ्य पृथिवी की त्रिज्या, l जितना हो, और

$$l = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \text{ मीटर।}$$

(यह है ग्लित्जर^१ द्वारा पूरा किया हुआ शूलर^२ का नियम।)*

घूर्णाक्षस्थापक का एक और सुंदर अनुप्रयोग बड़े-बड़े स्टीमरों की स्वतःचालित चालन-यंत्र रचना से संबंध रखता है। यदि तरंगों और समुद्री धाराओं की गतियों के

1. Glitscher 2. Schuler

* देखिए, Wissenschaft, Veröffentlicht. aus den Siemenswerken, 19, 57 (1940)

होते हुए भी जहाज को अपना मार्ग ठीक रखना है तो कर्णधार के अनवरत मनोयोग और तदनुसार मार्ग पर रखने की यत्नरचना की ससोवन-क्रिया की आवश्यकता होती है। इस मनोवन-क्रिया में मंदैव कुछ न कुछ देर लगती है जिस कारण समय का ह्रास एव तै की हुई दूरी में कमी होती है। इसके प्रतिकूल, पूर्णाक्षदिकमूचक एक ऐसी "ज्ञान इन्द्रिय" है जो मनुष्य की अपेक्षा बहुत शीघ्रता से और अधिक यथार्थता के साथ "मालूम" (प्रतीत) कर सकती है और तात्क्षणिक ससोवन-कार्य कर सकती है। ऐसी ससोवन-क्रिया के कारण याया का मार्ग प्रायः ठीक-ठीक ऋजुरेखीय (वास्तव में लाक्सोड्रोमिक अर्थात् रम्ब रेखीय) * हो जाता है, जिससे ऊर्जा की बड़ी बचत होती है। इस कारण आजकल प्रत्येक बड़े जहाज में एक स्वतःचलित मार्ग पर चलाने वाली यत्नरचना लगी होती है।

(३) रेलगाड़ी के पहियों और वाइसिकिलों में घूर्णाक्ष स्थापकीय प्रभाव

रेलगाड़ियों के पहियों का जुट एक ऐसा नचाने का लट्ठू है जिसका कोणीय सवेग शीघ्रगामी रेलगाड़ियों के लिए बहुत बड़ा हो सकता है। जब पहिये किसी वक्र पर से जाते हैं तब किसी भी क्षण कोणीय सवेग का अवश्यमेव किसी ऐसे स्थान को विक्षेप होगा जो वक्र के अभिन्व द्वारा निर्धारित होगा। समीकरण (१) के अनुसार इसके लिए एक ऐठ की आवश्यकता होती है जिसका अक्ष चलने की दिशा में होगा। परन्तु ऐसी ऐठ (जिसे बहुधा "घूर्णाक्षस्थापीय युग्म" कहते हैं) विद्यमान नहीं होती; अतएव घूर्णाक्षस्थापीय प्रभाव का परिणाम एक "विपरीत ऐठ" होती है जिस कारण पहियों का जुट बाहरी पटरी को बाहर की ओर दबाता है और भीतरी पटरी पर से उठा देता है। यह विपरीत ऐठ अपकेन्द्र बल के चलने की दिशा के प्रति के पूर्ण से जुड़ जाती है। जैसा कि हम जानते हैं पश्चोक्त प्रभाव का प्रतिकार पटरी के धरातल को उचित दिशा में उचित परिमाण में उठा देने से किया जाता है। दोनों घूर्णों का रूप

III ७ ७

होता है। यहाँ ७ यात्रा का वेग है और ७ रेलगाड़ी का चक्र में जाते समय कोणीय

*Loxo-dromic: Loxo, oblique; drome, run or course; तिर्यक् गतिक ? rhumb line=जहाज-मार्ग-रेखा (from Gk remebein, to turn or whirl round).

1. Countertorque

वेग । प्रस्तुत स्थिति में m पहियों के जुट की पहिये की परिमा पर लघुकृत सहति है; परंतु अपकेन्द्र प्रभाव के लिए पहियों के ऊपर की नारी गाड़ी की पूर्ण सहति होगी । अतएव हमारा घूर्णस्थापकीय युग्म तथा उसके सम बराबर प्रतिकूल विपरीत-एँठ, अपकेन्द्र बल के घूर्ण की अपेक्षा बहुत ही छोटी होगी । बाहरी पटरी को ज़रा-मा ही और ऊपर उठाने से उसका प्रतिकार किया जा सकता है ।

अधिक भारी प्रभाव पटरियों की किन्हीं ऊर्ध्वाधर असमताओं के कारण हो सकते हैं; उदाहरणार्थ, किसी एक पटरी पर "कूबड़"। (इसी वर्ग में उठाये हुए बक्र के प्रारंभ और अंत पर एक पटरी की बढ़ती या घटती ऊँचाइयाँ होंगी ।) इस प्रकार के कूबड़ से कोणीय सवेग में ऊर्ध्वाधर दिशा में विचलन हो जाता है और इसलिए एक विपरीत एँठ का प्रादुर्भाव होता है, जो पहियों के जुट को पटरी-धरातल से परे एँठ देने का यत्न करता है, कहिए कि, जुट के अगले पहिये से पटरी पर दाब डालकर और जुट के अंतिम पहिये को पटरी-धरातल से परे उभाड़कर । पटरी और पहिये के 'पख' अर्थात् निकले हुए किनारे के बीच जो थोड़ा-सा खाली स्थान रह जाता है, उसके कारण ये "पख" कभी एक पटरी को, कभी दूसरी को 'काट' लेंगे । ऐसी बात सचमुच ही शीघ्रगामी वैद्युत रेलगाड़ियों की परीक्षा-दीड़ों में देखी गयी है । पटरियों की दशा और उनका ठीक-ठीक स्थान सब समय के लिए वन में रखने के लिए जर्मन राष्ट्र-रेलवे^१ ऐसी परीक्षा-गाड़ियों का उपयोग करती है, जिनमें घूर्णाक्ष-स्थापकीय औजार लगे होते हैं । ये औजार आनगुत्ज़ कंपनी द्वारा निर्मित हैं ।

वाइसिकिल एक द्विगुणित अपूर्णपदीय निकाय है, क्योंकि प्रश्न सख्या २.१ के पहिये की भांति, परिमित गति में तो उसकी पाँच स्वतंत्रता-सख्याएँ होती हैं, परंतु अत्यणु गति में केवल तीन (अपने क्षणिक समतल में पिछले पहिये का घूर्णन, जिसमें अगले पहिये का घूर्णन इन तीन प्रकारों में युग्मित होता है—(१) घुड़ लुण्ठन की दशा, (२) हैण्डल-बार के अक्ष के प्रति का घूर्णन और (३) भूमि पर उनके स्पर्श-बिंदुओं को मिलानेवाली रेखा के प्रति अगले और पिछले पहिये का सार्व घूर्णन) । परंतु यह तब ही जब कि स्वयं साइकिल-सवार की स्वतंत्रता-सख्याएँ विचार में न लें । यह बहु-विदित है कि यदि वेग पर्याप्त हो तो इस निकाय का स्थायित्व इस बात पर भरोसा करता है कि या तो हैण्डल-बार को घुमाकर या अपने शरीर को बिना जान-

वृक्षकर ही हिला-डुलाकर, साइकिल-सवार समुचित अपकेन्द्रीय प्रभावों को उत्पन्न करता है। इनकी अपेक्षा पहियों के घूर्णाक्षस्थापकीय प्रभाव बहुत ही कम होते हैं। यह पहियों की बनावट से प्रकट है। यदि घूर्णाक्षस्थापकीय प्रभावों को प्रबलतर करना होता तो पहियों के किनारे और उन पर चढ़ायी जानेवाली रबड़ की हाले यथासक्य हलकी रखने के स्थान पर भारी रखनी पड़ती। परंतु फिर भी यह दिखलाया जा सकता है कि निकाय के स्थायित्व में ये दुर्बल प्रभाव भी योग लेते हैं। यह इसलिए होता है कि जहाजों को ठीक मार्ग पर चलानेवाली स्वतः-चालित यंत्र-रचना की भांति, गुह्रत्व-केन्द्र के नीचे हो जाने के प्रतिकूल अपकेन्द्रीय प्रभावों की अपेक्षा ये अधिक शीघ्रता से प्रतिक्रिया करते हैं। इस गति के स्थायित्व की परीक्षा करने के लिए जिन अल्प दोलों पर विचार करना पड़ता है, उनमें घूर्णाक्षस्थापकीय क्रिया केवल एक चौथाई आवर्तकाल से, जब कि अपकेन्द्र क्रिया आधे काल से, गुह्रत्व-केन्द्र के दोलों से पीछे रहती है।

पूरक--बिलियर्ड-खेल की यांत्रिकी

बिलियर्ड का सुंदर खेल दृढ़ पिंडों की गतिकी के अनुप्रयोगों के लिए एक संपन्न क्षेत्र प्रस्तुत कर देता है। यांत्रिकी के इतिहास में कॉरियोलिस नामक एक सुविख्यात विद्वान् उससे संबधित है।*

निम्नलिखित व्याख्याओं का मूल उद्देश्य इस विषय पर उठायी हुई कतिपय समस्याओं का स्पष्टीकरण है। इन समस्याओं में न केवल गेंद के लुण्ठन तथा स्वलन की गतिकी, बल्कि बिलियर्ड कपड़े पर घर्षण का वाद भी अपना उचित स्थान ग्रहण करता है।

‡ देखिए F. Klein & A. Sommerfeld, *Theorie des Kreissels*, Vol. IV. p. 880 and ff. स्थायित्व पर विचार करने के लिए निस्संदेह, साइकिल-सवार-कृत क्रियाओं को विचार से छोड़ देना होगा। यह मान लेना होगा कि न केवल बिना हाथों के ही, बल्कि अपने शरीर को बिना हिलाये हुए भी, वह चढ़ा हुआ है। उसे केवल अपने भार द्वारा ही काम करना होगा। उपर्युक्त पुस्तक में नचाने के लट्टू के वाद के अन्य अनुप्रयोगों और उसकी गणितीय नींव की ध्योरेवार बातें दी गयी हैं।

*जी० कॉरियोलिस (G. Coriolis), *Theorie mathématique des effets du jeu de billiard*. Paris, 1835.

(क) ऊँचे और नीचे निशाने

अनुभवी खिलाड़ी प्रायः मर्दैव गेंद को एक "पाश्च्यता" या "इग्लिश" दे देता है। परन्तु, अब तो बिना इग्लिश वाले निशानों पर विचार करेंगे जिनमें, हमसिंग, क्यू[‡] गेंद को उसके ऊर्ध्वाधर माध्यिकायी^{*} समतल में, क्षितिज दिशा में, मारता है। इस प्रकार के निशानों के दो भेद हैं—ऊँचे और नीचे।

यदि क्यू और गेंद का सघन-बिंदु[§] भेज के समतल में $\frac{1}{2}\pi$ (π —गेंद की त्रिज्या) ऊँचा हो तो उसे ऊँचा निशाना कहते हैं। यदि इसमें कम ऊँचाई पर मारा जाय तो उसे नीचा निशाना कहते हैं (इसके और नीचे की बातों के संबंध में प्रश्नसंख्या ४३ देखिए)। जब गेंद ठीक इन ऊँचाइयों पर मारा जाता है, तब प्रारंभ में ही शुद्ध लुंठन होने लगता है। किसी गोल के अवस्थितित्व घूर्णन (जो पृष्ठ ८८ पर दिया है) के प्रभाव से इन्हीं स्थितियों में जो गेंद का घूर्णन संचारित होता है वह ऐसे परिमाण का होता है कि उसका सगत परिमायी वेग स्पर्श बिंदु पर आगे बढ़ने की गति के ठीक बराबर पर प्रतिकूल होता है, जिन कारण शुद्ध लुंठन का प्रतिबन्ध (11/10) पूर्ण होता है।

ऊँचे निशानों में, स्पर्श-बिंदु पर लुंठन उत्पादित परिमायी वेग गेंद के सहति-केन्द्र के वेग के प्रतिकूल और उससे बड़ा होता है। कपड़े पर का घर्षण इस वेगाधिक्य (परिमायी वेग—आगे बढ़ने के वेग) का विरोध करता है और इस प्रकार सहति-केन्द्र के प्रारंभिक वेग को बढ़ा देता है। ऊँचे निशानों में यह घर्षण गेंद पर निशाने की दिशा में काम करता है। शुद्ध लुंठन में अंतिम वेग, जो तब प्राप्त होता है जब घर्षण वेगाधिक्य को "खा" लेता है, आदि के वेग से बड़ा होता है। जो गेंद ऊँचाई पर मारे जाते हैं वे बहुत देर तक चलते रहते हैं और खिलाड़ी के अनुभवी होने का भेद बता देते हैं।

* गेंद को पाश्च से मारना कि वह नाचता हुआ आगे बढ़े, साइड (side, पाश्च) कहलाता है।

‡ बिलियर्ड जैसे खेलों में गेंद को चलानेवाले डंडे को क्यू (cue) कहते हैं। क्यू कोई चार फुट लंबा होता है; खिलाड़ी की ओर का सिरा मोटा, मारने की ओर का सिरा पतला, चमड़े से भड़ा हुआ।

1. Median (Plane)

2. Point of impact

धीमा कर देता है। इन प्रकार गेंद विंगम इन्ना में न्यग्नि हो जाता है और तदनुसार उसका घूर्णन कम होता रहता है। जैसे ही विंगम पर का परिमायी वेग केन्द्र के आगे बढ़ने के वेग के बराबर होता है, जैसे ही न्यग्नि बंद हो जाता है और अब शुद्ध लुंडन होने लगता है। एक बार ऐसी इन्ना में पहुँचने पर गेंद एक नियत अंतिम वेग में लुंडन करता रहता है (लुण्ठन घर्षण के बहुत बड़े प्रभाव की हम उम्मीद कर देंगे)। यही पिच्छू निशाने का निशान है।

इसी भाँति नीचे मारा हुआ गेंद अपना मरति-केन्द्रवेग दूसरे मारे हुए गेंद को दे देता है और स्वयं धाग भर के लिए विंगम इन्ना प्राप्त करता है। मान लें कि गेंद बहुत ही नीचे, कम से कम केन्द्र में नीचे मारा गया था, जिन कारण दूसरे के बाद स्पर्म-बिंदु पर जो परिमायी वेग रह जायगा वह आगे की ओर की होगा। अब घर्षण पीछे की ओर आरोपित होगा। गेंद पीछे की ओर नियत स्वरूप में चलने लगता है। साथ ही उसका घूर्णनीय वेग कम होता रहता है और अंत में शुद्ध लुंडन होने लगता है। यह लॉच निशाने का निशान है।

मार्क के घर्षण के वेग में स्वतंत्र होने के कारण, महति-केन्द्रवेग v , एवं परिमायी वेग $u = a\omega$, का समय के विचार में परिवर्तन ऋजुरेखीय होगा। अतएव अब तक विचार की हुई समस्याओं का उपचार गणितीय विधियों के बदले रेखाचित्रीय विधियों से अधिक सुविधापूर्वक किया जा सकता है। रेखाचित्रीय विधि से करने के लिए हम एक रेखाचित्र बनाते हैं जिसमें v और u के क्षणिक मानों को भुजाओं की भाँति और समय को कौटुम्बिकों की भाँति आलेखित करते हैं (प्रश्न संख्या ४३)।

(ग) क्षंतिज संघात में “इंग्लिश” कारित प्रक्षेप-पथ

यदि गेंद ऊर्ध्वाधर माध्यिकायी समतल में न मारा जाय, वरन् उसके एक ओर तो उसे “दाया इंग्लिश” या “बाया इंग्लिश” कहते हैं। यदि गेंद पर आपात के लिए क्यू क्षंतिजतया आगे बढ़ाया जाय तो प्रक्षेप-पथ आदि के संघात की दिशा में ऋजुरेखीय रहेगा।

आवेगी ऐंठ का समतल अब ऊर्ध्वाधर माध्यिकायी समतल से झुका हुआ होता है; जैसे निशानों में या तो दाया इंग्लिश के लिए दाया ओर या बाया इंग्लिश में बाया ओर। यह झुकाव ऐसा होता है कि आवेगी ऐंठ के समतल का अभिलंब (यह अभिलंब अधीय

नीचे निशानों में स्पर्श-बिंदु पर परिमापी वेग संहति-केन्द्र के वेग की दिशा के प्रति-

में काम करता है। शुद्ध लुठन में अंतिम वेग आदि के वेग से कम होता है।

आवेग, Z , के बारे में (इसकी विमितियाँ हैं डाइन-सेकंड) निस्संदेह, उसे क्यू की दिशा में आरोपित बहुत बड़े बल F का समाकल बहुत थोड़े काल t के लिए, जिसमें वह काम करता है, समझना चाहिए। इस प्रकार

$$Z = \int_0^t F dt,$$

तदनुसार गेंद के केन्द्र की आवेगी ऐंठ होगी

$$Zl = \int_0^t F l dt,$$

जहाँ l केन्द्र की क्यू के अक्ष से दूरी है। आवेगी ऐंठ-सदिश केन्द्र और क्यू-अक्ष से जाते हुए समतल के लंबवत् निर्देशित होगा। इंग्लिश-हीन निशानों के लिए, जिन पर ही अब तक विचार किया गया है, वह क्षैतिजतया निर्देशित होता है और उपर्युक्त माध्यिकायी समतल का अभिलंब है।

(ख) पिछ्लू निशाने और खींच निशाने

ऊँचाई पर मारे जाने के बाद यदि गेंद अन्य दो गेंदों में से एक को केंद्रीय सघात मिले तो गेंदों की सहितियाँ सम होने के कारण उसकी आगे की ओर की सारी गति दूसरे गेंद को मिल जाती है [मिलाइए समी० (3.27a)]। परंतु यदि सम्पर्क के अल्प काल में होनेवाले दोनों गेंदों के बीच के घर्षण की उपेक्षा कर दे तो प्रथम गेंद अपनी घूर्णनीय गति अपने पास ही रखता है। अतएव सघात के बाद के क्षण मारनेवाले गेंद का केन्द्र क्षणिकतया विराम दशा में होता है और उसका सबसे निचला बिंदु विलियर्ड कपड़े पर सरकता हुआ जाता है। इस प्रकार से प्रादुर्भूत घर्षण समय के विचार से नियत रहता है और प्रारम्भिक आगे बढ़ने की दिशा में गेंद पर आरोपित होता है तथा उसी समयकेन्द्र के प्रति का उसका घूर्ण विद्यमान घूर्णन को

धीमा कर देता है। इस प्रकार गेद विराम दशा में त्वरित हो जाता है और तदनुसार उसका घूर्णन कम होता रहता है। जैसे ही फि कपडे पर का परिमायी वेग केन्द्र के आगे बढ़ने के वेग के बराबर होता है, वैसे ही त्वरण बंद हो जाता है और अब शुद्ध लुंठन होने लगता है। एक बार ऐसी दशा में पहुँचने पर गेद एक नियत अंतिम वेग से लुंठन करता रहता है (लुंठन घर्षण के बहुत हल्के प्रभाव की हम उपेक्षा कर देंगे)। यही पिच्छू निशाने का सिद्धांत है।

इसी भाँति नीचे मारा हुआ गेद अपना महति-केन्द्रवेग दूसरे मारे हुए गेद को दे देता है और स्वयं क्षण भर के लिए विराम दशा प्राप्त करता है। मान लेंगे कि गेद बहुत ही नीचे, कम से कम केन्द्र से नीचे मारा गया था, जिस कारण टक्कर के बाद स्पर्श-बिंदु पर जो परिमायी वेग रह जायगा वह आगे की ओर की होगा। अब घर्षण पीछे की ओर आरोपित होगा। गेद पीछे की ओर नियत त्वरण से चलने लगता है। साथ ही उसका घूर्णनीय वेग कम होता रहता है और अंत में शुद्ध लुंठन होने लगता है। यह खींच निशाने का सिद्धांत है।

सर्पक^१ घर्षण के वेग से स्वतंत्र होने के कारण, सहति-केन्द्रवेग v , एवं परिमायी वेग $u = a\omega$, का समय के विचार से परिवर्तन ऋजुरेखीय होगा। अतएव अब तक विचार की हुई समस्याओं का उपचार गणितीय विधियों के बदले लेखाचित्रीय विधियों से अधिक सुविधापूर्वक किया जा सकता है। लेखाचित्रीय विधि से करने के लिए हम एक रेखाचित्र बनाते हैं जिसमें v और u के क्षणिक मानों को भुजाओं की भाँति और समय को कोट्यकों की भाँति आलेखित करते हैं (प्रश्न संख्या ४.३)।

(ग) क्षंतिज संघात में “इंग्लिश” कारित प्रक्षेप-पथ

यदि गेद ऊर्ध्वधिर माध्यिकायी समतल में न मारा जाय, वरन् उसके एक ओर तो उसे “दायाँ इंग्लिश” या “बायाँ इंग्लिश” कहते हैं। यदि गेद पर आपात के लिए क्यू क्षंतिजतया आगे बढ़ाया जाय तो प्रक्षेप-पथ आदि के मघात की दिशा में ऋजुरेखीय रहेगा।

आवेगी ऐंठ का समतल अब ऊर्ध्वधिर माध्यिकायी समतल से झुका हुआ होता है; लेंचे निशानों में या तो दावे इंग्लिश के लिए दायी ओर या बाये इंग्लिश में बायी ओर। यह झुकाव ऐसा होता है कि आवेगी ऐंठ के समतल का अभिलव (यह अभिलव क्षीय

सदिश ऐंठ से समांतर होता है) गेंद के केन्द्र से होकर जाते हुए माध्यिकायी समतल से लववत् ऊर्ध्वाधर समतल में होता है। ऐंठ को सघात की दिशा से लववत् एक ऊर्ध्वाधर घटक में और एक क्षैतिज घटक में विघटित कर सकते हैं। पहला घटक गेंद के ऊर्ध्वाधर व्यास के चारों ओर नाचा करता है और कपड़े पर एक अल्प "छिद्रक घर्षण" उत्पादित करता है, परंतु गेंद के पथ पर इसका कोई प्रभाव नहीं होता। दूसरी ओर पार्श्वीय घटक उसी भांति काम करता है, जैसा कि (क) और (ख) में विचारित निशानों में। इसलिए जो बातें वहाँ हुई थी वे ही इंग्लिश के साथ निशानों में भी होंगी। विशेषतः, प्रक्षेप-पथ ऋजुरेखीय ही रहता है।

ऊर्ध्वाधर व्यास के चारों ओर के नाच का प्रभाव गेंद के किसी गद्दे या दूसरे गेंद के साथ टक्कर में अपने तर्ज दिखलाता है। प्रथम स्थिति में गद्दे पर घर्षण होता है जो खिलाड़ी के दृष्टिकोण से गेंद को दायें इंग्लिश वाले निशाने में बायी ओर और बायें इंग्लिश में दायी ओर विचलित कर देता है। इस बात से परावर्तन कोण, जो बिना इंग्लिश के निशानों में आपतन कोण के बराबर होता है, बदल जाता है। वास्तव में, वास्तविक परावर्तित पथ समान कोणिक पथ से पश्चोक्त को गेंद को दिये हुए ऊर्ध्वाधर नाच की दिशा में घुमा देने से उत्पन्न होता है। इस बात से प्रत्येक विलियर्ड्स - खिलाड़ी परिचित है। गद्दे पर घर्षणीय बल के उत्पादन के साथ ही ऊर्ध्वाधर के प्रति एक घर्षणीय ऐंठ प्रकट होती है जो ऊर्ध्वाधर व्यास के चारों ओर के नाच को क्षीण कर देती है। अतएव प्रारंभ का इंग्लिश, कई सघातों के बाद, शून्य-शून्यः लुप्त हो जाता है। यह बात भी प्रत्येक खिलाड़ी को ज्ञात है। गेंद की गेंद से टक्कर में इंग्लिश का प्रभाव वैसा ही होता है और उसी भाव में काम करता है जैसे कि गेंद-गद्दे की टक्कर में।

(घ) ऊर्ध्वाधर घटक युक्त निशाने के कारण पारवलयिक पथ

आवेगी ऐंठ का समतल अब न केवल (ग) की भांति झुका होता है, बल्कि खिलाड़ी के दृष्टिकोण से आगे की ओर भी झुका होता है। अतएव सदिश ऐंठ के न केवल ऊर्ध्वाधर और पार्श्वीय दिशाओं में घटक होंगे, बल्कि गति की दिशा में भी एक घटक होगा। इसलिए स्पर्श-बिंदु पर प्रारंभ की गति के लववत् सम्पर्क वेग का एक घटक भी आरोपित होगा। अतएव यह घर्षण, जो स्पर्श-बिंदु के परिणामी वेग के विरुद्ध होगा, प्रारंभिक गति से शून्य से भिन्न कोण पर होगा। यदि हम अपने को इस बात का निश्चय करा लें (मिलाइए, प्रश्न सख्या ४.४) कि प्रारंभिक गति से जो यह कोण बनता है वह गति भर

पञ्चम अध्याय

सापेक्ष गति

इस अध्याय के विषय की बातों में हमारा कुतूहल मुख्यतया इसलिए होता है कि हम अपने सारे प्रेक्षण घूर्णनयुक्त पृथिवी पर करते हैं जो, क्या चिर-सम्मत यात्रिकी की दृष्टि में और क्या आपेक्षिकता के विनिष्ट वाद के दृष्टिकोण से, अनुज्ञेय अभिदेश ढाँचा नहीं है। दूसरी ओर, व्यापक आपेक्षिकता में सभी अभिदेश प्रणालियाँ अनुज्ञेय हैं (देखिए पृ० २०); और इसलिए उनके दृष्टिकोण से सापेक्ष गति का कोई अलग वाद (थ्योरी) अयंहीन हो जाता है।

इस अध्याय में हमारा दृष्टिकोण यह होगा कि प्रत्येक सैद्धांतिकतया अनुज्ञात अभिदेश प्रणाली में न्यूटन की यात्रिकी विलकुल ठीक-ठीक बैठती है। तत्पश्चात् हम न्यूटन की यात्रिकी से ऐसे विचलनों का अन्वेषण करेंगे जो उस अभिदेश प्रणाली की गति के कारण होते हैं जिसमें, व्यावहारिक कारणवश, हम बँधे हुए हैं।

§ २८. विशेष स्थिति में कोरिओलिस बल का व्युत्पादन

समझिए कि त्रिज्या a वाले पृथ्वी के मण्डल के किसी ध्रुववृत्त पर एक संहति बिंदु, निश्चर कोणीय वेग μ से, चल रहा है और उसी समय स्वयं पृथिवी अपने अक्ष के चारों ओर निश्चर कोणीय वेग ω से घूम रही है। साधारण की भाँति अक्षांश-कोटि को θ तथा (खगोलीय) रेखांश को ϕ कहिए। आदि के स्वेच्छ मानों को छोड़कर हमारे संहति बिंदु की गति निम्नलिखित प्रकार दी जायेगी—

$$(1) \quad \theta = \mu t, \quad \phi = \omega t$$

बिंदु के कार्तीय निर्देशांको,

$$x = a \sin \theta \cos \phi,$$

$$(2) \quad y = a \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = a \cos \theta$$

से, t के लिए उनका अवकलन करने से, प्राप्त होते हैं—

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= a \mu \cos \theta \cos \phi - a \omega \sin \theta \sin \phi, \\ \dot{y} &= a \mu \cos \theta \sin \phi + a \omega \sin \theta \cos \phi, \\ \dot{z} &= -a \mu \sin \theta. \end{aligned}$$

और,

$$(4) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= -a \mu^2 \sin \theta \cos \phi - a \omega^2 \sin \theta \cos \phi \\ &\quad - 2a \mu \omega \cos \theta \sin \phi, \\ \ddot{y} &= -a \mu^2 \sin \theta \sin \phi - a \omega^2 \sin \theta \sin \phi \\ &\quad + 2a \mu \omega \cos \theta \cos \phi, \\ \ddot{z} &= -a \mu^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

समीकरणों (4) के चिह्न में, दक्षिण ओर के प्रथम पद उस प्रथायी (यूजुअल) अभिकेन्द्र त्वरण को निरूपित करते हैं जो ध्रुववृत्त पर होने वाली गति के साथ होते हैं, यदि यह ध्रुववृत्त आकाश में स्थिर हो। द्वितीय पदबुन्द वह अभिकेन्द्रत्वरण देते हैं जो ध्रुववृत्त के किसी स्थिर बिंदु के (अपने अक्ष के चारों ओर पृथिवी के घूर्णन के कारण) अक्षांश वृत्त में होने वाली गति के कारण होता है। परंतु तृतीय पदबुन्द एक नयी बात बताते हैं क्योंकि वे इन दोनों गतियों की चलात्मक मिश्र-क्रिया निरूपित करते हैं। यदि (4) को $-m$ से गुणा करें तो अपने सहति बिंदु का मिश्र घूर्णन में अवस्थितिव बल F^* प्राप्त करते हैं। सदिश रूप में यह निम्नलिखित है—

$$(5) \quad F^* = C_1 + C_2 + F_c$$

सकेत C_1 और C_2 जैसे कि (10.3) में, “माधारण अपकेन्द्र बलबुन्द” जतलाते हैं। C_1 पृथिवी-केन्द्र से बाहर की ओर त्रिज्यात निर्देशित है और उसका परिमाण निम्न-लिखित है—

$$|C_1| = m a \mu^2 = m \frac{v_1^2}{a}, \quad v_1 = a \mu.$$

C_2 पृथिवी के अक्ष के लंबवत् निर्देशित है; उसका परिमाण है—

$$|C_2| = m a \omega^2 \sin \theta = m \frac{v_2^2}{a \sin \theta},$$

$$v_2 = a \omega \sin \theta.$$

तृतीय अवयव F_c को “संयुक्त अपकेन्द्र बल” कह सकते हैं। यही कोरिओलिस बल है। उसका पूरा सदिश व्यंजन (देखिए समी० 29.4a) यह है—

(6)

$$\mathbf{F}_c = 2m \mathbf{v}_{rel} \times \boldsymbol{\omega}$$

यहाँ पर v_1 के सगत सदिश \mathbf{v}_1 के स्थान पर \mathbf{v}_{rel} लिखा है। इससे हम यह बतलाना चाहते हैं कि बहुधा व्यापकतया वह वेग जो \mathbf{F}_c को उत्पन्न करता है घूर्णनयुक्त अभिदेग निकाय के प्रति आपेक्षिक (रिलेटिव) होता है।

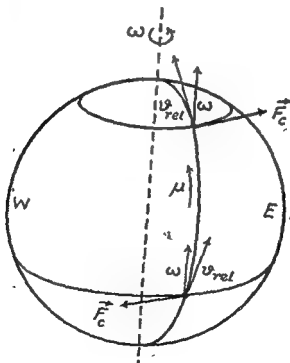
(6) के अनुसार \mathbf{F}_c का परिमाण है—

$$(6a) \quad |\mathbf{F}_c| = 2m v_{rel} \omega \sin(\theta),$$

जिस कारण प्रस्तुत स्थिति में,

$$(6b) \quad |\mathbf{F}_c| = 2m v_{rel} \omega \cos \theta.$$

निस्संदेह, θ की कोज्या भौगोलिक अक्षांश की ज्या है। दिशा के बारे में, \mathbf{F}_c दोनों \mathbf{v}_{rel} और $\boldsymbol{\omega}$ के या, तुल्यात्मकतया, \mathbf{C}_1 और \mathbf{C}_2 के, लंबवत् है। \mathbf{F}_c की दिशा का



भाकृति ४८—कोरिओलिस बल का विभिन्न व्युत्पादन। घूर्णनयुक्त पृथिवी के किसी ध्रुववृत्त पर एक सहति बिंदु पृथिवी-केन्द्र के दृष्टिकोण से, निश्चर कोणीय वेग μ से सगत, निश्चर वेग \mathbf{v}_{rel} से, चलता है।

भाय यही है जिन ओर कि v_{rel} में ω को जाना हुआ दक्षिणावर्त घेच आगे बढ़ता है। आकृति ४८ में यह बात दक्षिण में उत्तर को जाने हुए एक बिंदु के लिए चित्रित की गयी है। दो स्थितियाँ दिखायी गयी हैं, एक दक्षिणी ओर एक उत्तरी गोलार्द्ध में। पूर्वोक्त में, दक्षिणावर्त घेच के $v_{rel} \rightarrow 0$ के भाय में, F_c पूर्व में पश्चिम की ओर काम करता है, पश्चोक्त में पश्चिम में पूर्व को।

हम एक एकल गतिशील बिंदु के स्थान पर ऐसे बिंदुओं की अनुवर्त परम्परा को, अतएव किसी ध्रुववृत्त पर बहती हुई नदी को, समझ सकते हैं तो आकृति ४८ हमें बताती है कि दक्षिण में उत्तर को बढ़ते हुए पानी का असम्बन्धित बल उत्तरी गोलार्द्ध में दायें किनारे पर, दक्षिणी गोलार्द्ध में बायें किनारे पर, दाब डालता है। दाब के चिह्न में यह परित्यक्त, प्रकटतया, (६) में आये हुए भौगोलिक अक्षांश की ज्या से संबंधित है। यह कायदा न केवल दक्षिण-उत्तर बहाव के लिए, बल्कि जैसा कि अगले प्रकरण में दिखायेंगे, v_{rel} की किसी भी दिशा के लिए, और, विरोधतया कह देना चाहिए, उत्तर-दक्षिण दिशा के बहाव के लिए भी, वैध है।

हमारे दृष्टांत में यह अतर्जनित स्पष्ट है। पृथिवी के घूर्णन से व्युत्पन्न, जल का पश्चिम-पूर्व वेग, घूर्णन-अक्ष में अपनी दूरी पर, और इसलिए भौगोलिक अक्षांश पर, निर्भर करता है। यदि धारा दक्षिण में उत्तर को जाती है तो उत्तरी गोलार्द्ध में जल में पश्चिम-पूर्व सवेग का आधिपत्य होगा, जो सवेग कि वह अधिकतर दक्षिणी अक्षांशों से प्राप्त कर रहा है। यह आधिक्य पूर्व की ओर के अर्थात् दायें किनारे पर के, दाब में अपने तई प्रकट करता है। परन्तु ऐसा ही युक्ति-तर्क उत्तर-दक्षिण गति को भी लागू होगा। उस स्थिति में जल उत्तरी अक्षांशों में पश्चिम-पूर्व सवेग की न्यूनता का आयात करेगा।

आइए, मन ही मन इस न्यून परिमाण का आ० ४१ के भाव में, एकबार-चिह्न के साथ, दूसरी बार — चिह्न के साथ, योग करें। जो भाग कि — चिह्न के साथ जोड़ा गया है, उसमें पूर्व-पश्चिम दिशा है और इसलिए वह पश्चिम की ओर, अर्थात् फिर दायें किनारे पर, दाब डालेगा। युक्ति-तर्क का यही प्रक्रम दिखलाता है कि दक्षिणी गोलार्द्ध में नदी अपने बायें किनारे पर अधिक दाबाव डालती है, चाहे बहाव दक्षिण-उत्तर हो या उत्तर-दक्षिण।

भूगोलज्ञों ने बहुत-से उदाहरणों द्वारा सिद्ध कर लिया है कि उत्तरी गोलार्द्ध में नदियों के दायें किनारे पर का दाब अपने तई बायें किनारों के बाधों को अधिकतर

काट में दिगुलाता है (नदी-विस्थापनों संबंधी बेयर^१ नियम)। इसके अतिरिक्त नदी के दाहिने तट पर जलतल की ऊँचाई थोड़ी-सी अधिक होती है, इतनी कि भेद नापा जा सके।

कोरिओलिस बल के कहीं अधिकतर महत्वपूर्ण आशयपूर्ण प्रभाव वे हैं जो महा-सागरो की धाराओं पर पड़ते हैं (गल्फ स्ट्रीम^२ तथा उत्तरी गोलार्द्ध में ज्वार-भाटा की धाराओं के विचलनों का दायाँ ओर होना।)

परंतु यह वायुमंडल में पाया जाता है कि ये प्रभाव अधिकतम सुनिरिक्त होते हैं। बाइज़-बाल्ट^३ का मुजात नियम कहता है कि वायु दाब-प्रवणता की दिशा में नहीं चलती, किंतु उत्तरी गोलार्द्ध में दायाँ ओर, दक्षिणी में बायाँ ओर, खूब ही विचलित हो जाती है; केवल भूमध्यरेखा पर ही यह दाब-प्रवणता का ठीक-ठीक अनुसरण करती है।

ये सब घटनाएँ न्यूटन के प्रथम नियम के तात्क्षणिक (निरंतरित) परिणाम हैं और अंतिम विश्लेषण में इस बात से निकलती है कि यांत्रिकी में घूर्णनवती पृथिवी ऐसा अभिवेग-ढोचा नहीं है जो मान्य हो।

इस प्रकरण में कोरिओलिस बल का हिसाब गोलीय ध्रुवी निर्देशकों की सहायता से लगाया गया है। प्रश्नसंख्या ५.१ में उसे सिलिंडरीय निर्देशकों में व्युत्पन्न करेंगे।

§ २६. सापेक्ष गति के व्यापक अधिकतम समीकरणबद्ध

पृथिवी के स्थान पर कोई भी दृढ़ पिंड B लेते हैं जो एक स्थिर बिंदु O के चारों ओर तात्क्षणिक कोणीय वेग ω से घूर्णन करता है। समझिए कि P एक ऐसा बिंदु है जो B की अपेक्षा में एक स्वेच्छया परिवर्तनशील वेग से चलता है। तो आकाश के लिए उसका वेग दो वेगों का संघटन होगा, एक तो यह सापेक्ष वेग और दूसरा P से तात्क्षणिक संपात में पिंड के एक बिंदु का आकाश में वेग। (२२.४) के अनुसार पश्चोक्त होगा—

$$\omega \times r$$

जैसे कि (२२.४) में, आकाश के लिए P के वेग को w कहेंगे। और भी, B की अपेक्षा में P के सापेक्ष वेग को (v_{rel} के स्थान) v कहेंगे। तो निम्नलिखित संबंध होगा—

(१)

$$w = v + \omega \times r$$

अब हम यह बात मान ले कि सामयिक परिवर्तन यदि आकाश से प्रेषित होंगे तो उन्हें ऊपर दी हुई विधि द्वारा और यदि पिंड B से प्रेषित होंगे तो $\frac{d}{dt}$ द्वारा जतलायेंगे। तो अब हम लिख सकते हैं कि—

$$(2a) \quad \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{r}}$$

तथा

$$(2b) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

और

$$(2c) \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

आकाश में हमारे विंदु P का त्वरण होगा—

$$(3) \quad \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

दक्षिणी अंग के मध्य पद में $\dot{\mathbf{r}}$ का (2a) और (1) में दिये हुए मान के प्रतिस्थापन से प्राप्त करते हैं—

$$(3a) \quad \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

(3) के दायी ओर के प्रथम पद का रूपांतरण, (2c) के स्पेच्छ सदिश \mathbf{r} के स्थान में \mathbf{v} लिखकर करिए। इससे मिलता है—

$$(3b) \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

(3) में (3a) और (3b) का प्रतिस्थापन करने से प्राप्त होता है—

$$(4) \quad \dot{\mathbf{w}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

देखिए कि (26.8a) के अनुसार, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ या $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ को समी० (4) के अंतिम पद में लिख सकते हैं।

यदि दोनों पार्श्वों को $-m$ से गुणा करे, तो (4) से अपने कण पर आरोपित अवस्थितित्व बल को प्राप्त करते हैं। दायी ओर आकाश में अवस्थितित्व बल \mathbf{F}^* मिलता है, दायी ओर का पहला पद अवस्थितित्वहीन अभिदेश निकाय B में प्रेषित अवस्थितित्व बल है जिसे \mathbf{F}_{rel}^* कहेंगे। दायी ओर का दूसरा पद कोरिओलिस बल के लिए व्यंजन प्रदान करता है जो हमें (28.6) में मिला था, अर्थात्—

$$(4a) \quad -2m \omega \mathbf{xv} = +2m \mathbf{v} \times \omega = \mathbf{F}_c$$

अतएव हमारा प्रस्तुत उपचार, कोरिओलिस-बल का व्यापक उत्पादन प्रस्तुत कर, पिछले प्रकरण के उपचार की शेष पूर्ति करता है। समी० (4) के अंतिम से पहले वाले पद में, $(-m)$ से गुणा करने के बाद साधारण अपकेन्द्र बल \mathbf{C} को सरलतया पहचान सकते हैं जो हमारे कण पर, अभिदेश निकाय B के घूर्णन के प्रभाव से, आरोपित जान पड़ता है और जिसे समी० (28.5) में \mathbf{C}_2 कहा था।

अतएव, सब पदों को एकत्र कर, (4) से प्राप्त करते हैं—

$$(5) \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{rel} + \mathbf{C} + \mathbf{F}_c + m \mathbf{r} \times \dot{\omega}$$

यहाँ \mathbf{F}_{rel} को निम्नलिखित परिभाषा में दिये हुए मान से प्रतिस्थापित कर लेते हैं

$$\mathbf{F}_{rel} = -m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

और यह स्मरण कीजिए कि आकाश में स्थित निकाय में बाह्य और अवस्थित्वीय बलों के संतुलन के कारण

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^* = 0$$

इस प्रकार हम सापेक्ष गति का व्यापक अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं कि—

$$(6) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{C} + \mathbf{F}_c + m \mathbf{r} \times \dot{\omega}$$

देखिए कि निकाय B में, वर्तमान बाह्य बल \mathbf{F} के अतिरिक्त, बनावटी बल \mathbf{C} और \mathbf{F}_c प्रकट होते हैं। B के साथ चलते हुए प्रेक्षक के दृष्टिकोण से वे उसी प्रकार आरोपित होते हैं जैसे कि बाह्य बल \mathbf{F} ; वास्तव में वे केवलमात्र एक अन्त्युत्पन्नीय अभिदेश ढाँचे में स्थित, या उसकी अपेक्षा में गतिशील, कण m के अवस्थित्व के परिणाम हैं। (6) के दाये के अंतिम पद का मूल भी उसी में है। वह एक सभाव्य त्वरण या घूर्णन दिशा के परिवर्तन से निकलता है। पृथिवी के संबंध में वह ध्रुवी उच्चावचन के सगत है और धन्युप्राय रूप से छोटा होने के कारण उसकी उपेक्षा की जा सकती है। अवकल समीकरण (6) का उपयोग आगामी तीन प्रकरणों में और प्रश्न संख्या ५.१ तथा ५.२ में किया जायगा।

§ ३०. घूर्णनयुक्त पृथिवी पर स्वतंत्र पतन; घूर्णसंस्थापीय पदों की प्रकृति

जब कभी हम गुरुत्व का प्रभाव मापने का यत्न करते हैं तब केवल गुरुत्वीय आकर्षण ही नहीं, बल्कि पृथिवी के आकर्षण \mathbf{F} और अपकेन्द्र बल \mathbf{C} का परिणामी प्रेक्षित

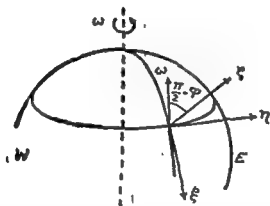
किया जाता है। भ्वाभ का अर्थात् माध्य पार्थिव तल का चपटापन स्वयं इसी परिणामी से निर्धारित होता है और, वास्तव में, इस प्रकार कि (भ्वाभ) सर्वत्र इसी परिणामी के लववत् है। यदि हम रख ले कि—

$$(1) \quad F + C = -mg$$

तो गुरुत्वीय त्वरण एक सदिश g हो जाता है जिसका परिमाण g है, परन्तु जिसकी दिशा पृथिवी की बढ़ायी हुई विज्ञा की ओर होने के स्थान पर भ्वाभ के अभिलंब की ओर होती है।

समी० (29.6) से, (1) तथा (28.6) को विचार में रख, और ω वाले पद की अपेक्षा कर, हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = -g + 2 \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}.$$



आकृति ४९—घूर्णनयुक्त पृथिवी पर स्वतंत्र पतन। निर्देशांक प्रणाली : ξ

ध्रुववृत्त पर, η अक्षांश वृत्त पर, ξ भ्वाभ के अभिलंब पर।

अब आइए इस सदिश समीकरण को, पृथिवी में स्थित, निम्नलिखित (3) प्रकार परिभाषित (देखिए आ० ४६), एक लवकोणीय प्रणाली ξ, η, ξ का प्रवेश करा कर, निर्देशांक समीकरणों में विघटित करें :—

ξ = पृथिवी तल पर उत्तर-दक्षिण दिशा,

(3) η = पृथिवी तल पर पश्चिम-पूर्व दिशा,

ξ = प्रेक्षक स्थान → ऊर्ध्वबिन्दु = भ्वाभ का अभिलंब।

तो घटक रूप में निम्नलिखित प्राप्त होते हैं—

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &= \left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} \right); \\ \mathbf{g} &= \left(0, 0, g \right); \\ \boldsymbol{\omega} &= \left(-\omega \cos \phi, 0, \omega \sin \phi \right); \end{aligned}$$

ϕ भौगोलिक अक्षांश है, जैसे कि आ० ४९ में। तो (३) में निकलता है कि—

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 2\omega \sin \phi \frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\omega \sin \phi \frac{d\xi}{dt} - 2\omega \cos \phi \frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + g &= 2\omega \cos \phi \frac{d\eta}{dt} \end{aligned}$$

समीकरणों (५) का समाकल करने के पहले उनका व्यापक लक्षण देखना चाहिए। उनकी विशेष बात यह है कि दाहिनी ओर के गुणांक की सज्जधज प्रति-समित^१ है। प्रति-समिति को स्पष्टतया देखने के लिए निम्नलिखित सक्षिप्तिकाओं का उपयोग कीजिए तो

(६) $\alpha = 2\omega \sin \phi$, $\beta = 0$, $\gamma = -2\omega \cos \phi$ ।
तो विकर्ण के लिए बिन्यास की प्रति-समिति स्पष्टतया दिख जाती है, जैसा कि नीचे दी हुई अनुसूची से प्रकट है—

	$\frac{d\xi}{dt}$	$\frac{d\eta}{dt}$	$\frac{d\zeta}{dt}$
$\frac{d^2\xi}{dt^2}$	0	α	β
$\frac{d^2\eta}{dt^2}$	$-\alpha$	0	γ
$g + \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$-\beta$	$-\gamma$	0

यह प्रति-समिति लक्षण ऊर्जा का अविनाशित्व इंगित करता है। यदि विकर्णी पर उपस्थित होते या यदि, अधिकतर व्यापकतया वात कहे, गुणाकों की सजबज में कोई समिति अशंभवी होता, तो ऊर्जा का क्षय होता।

क्योंकि, यदि समीकरणों (5) को पक्ति प्रति पक्ति $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, से

गुणा कर जोड़ दें तो दायी ओर α , β , γ के सभी गुणाक शून्य हो जाते हैं और शेष रह जाता है—

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] + g \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

अर्थात्

$$(8) \quad T + V = \text{नियत}।$$

यहाँ T और V सापेक्ष गति की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा हैं (जहाँ सहति = 1 रख दिया है)। हमारे गुणाकों के विन्यास का यह अविनाशी लक्षण बिना हिसाब लगाये ही प्रत्यक्ष किया जा सकता है। क्योंकि गुणन खंड $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ के प्रभाव से, \mathbf{F}_0 गति के लंबवत् है और इसलिए, वेद्युतगतिकी में चुंबकीय बलों की भाँति, कोई कर्म नहीं करता।

दूसरी ओर, यदि गुणाकों की सजबज में कोई समित अंश होता तो

$$(9) \quad \frac{d}{dt}(T + V) < 0$$

होता। यहाँ छोटेपन का चिह्न ($<$) हम अनुमान का परिणाम है कि गुणाकों के चिह्न गति के अवमंदन के लिए आवश्यक भौतिक प्रतिबंधों को सन्तुष्ट करे। परंतु देखते हैं कि (9) का परिणाम ऊर्जा का संरक्षण अविनाशित्व नहीं, किंतु जैसा कि ऊपर दृढ़-कथन किया है, उमका क्षय निकलता है। गुणाकों के विन्यास के भयंशील लक्षण वाला होने का एक दृष्टांत (हाँ, केवल एक स्वतंत्रता-संख्या वाला ही दृष्टांत) तृतीय अध्याय, प्रकरण १९ के अवमंदित दोलों की विवृति में समीकरण (9) और (10) प्रस्तुत करते हैं।

लार्ड केल्विन^१ की भाँति हम भी गुणाकों के प्रति-समित विन्यास के पदों^२ को घूर्णाक्षस्थापकीय पदवृन्द कहेंगे। यह नाम सूचित करता है कि वे निकाय (प्रस्तुत स्थिति में पृथिवी) का आंतरिक घूर्णन इंगित करते हैं, और जो समस्या को अभ्युक्ति में प्रत्यक्षतया नहीं दिये गये, परंतु निर्देशांकों के निर्वाचन (प्रस्तुत स्थिति में ξ, η, ζ) में अंतर्भावित हैं। ऐसे घूर्णाक्षस्थापकीय पद साम्यावस्थाओं तथा गतियों के स्थायित्व संबंधी व्यापक नियमों में महत्त्वपूर्ण भाग लेते हैं।

अब हम समीकरणों (५) का समानुकलन करेंगे। इसके लिए h की ऊँचाई से, आदि में किसी वेग के बिना ही, स्वतंत्र पतन को स्वीकृत समझ लेंगे। तो $t=0$ पर निम्नलिखित होना चाहिए—

$$\begin{aligned} \xi &= \eta = 0, \quad \zeta = h \\ (10) \quad \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0. \end{aligned}$$

अब प्रथम और तृतीय समी० (५) से प्राप्त करते हैं

$$(11) \quad \frac{d\xi}{dt} = 2\omega \eta \sin \phi, \quad \frac{d\zeta}{dt} + g\zeta = 2\omega \eta \cos \phi.$$

द्वितीय समी० (५) में इनको प्रतिस्थापित कर हम प्राप्त करते हैं—

$$(12) \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 4\omega^2 \eta = C t, \quad C = 2\omega g \cos \phi.$$

इस समीकरण का समाकल समी० (19.4) के संबंध में स्थापित किये हुए इस व्यापक नियम से प्राप्त होता है कि “वह है, असमघात (असमाग) समीकरण का विशिष्ट साधन + समघात (समाग) समीकरण का व्यापक साधन।” प्रस्तुत स्थिति में इससे निकलता है—

$$\eta = \frac{C}{4\omega^2} t + A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t.$$

प्रतिबंधों (10) की अभिव्यचना है कि निम्नलिखित रख लिया जाय—

$$B = 0, \quad 2\omega A = -\frac{C}{4\omega^2},$$

अर्थात्

$$(13) \quad \eta = \frac{C}{4\omega^2} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) = \frac{g \cos \phi}{2\omega} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right).$$

η के तात्पर्य के अनुसार, [मिलाइए, (3)], यह पूर्व की ओर का विक्षेप है।

ξ दक्षिण की ओर का विक्षेप है। (11) तथा (13) से यह

$$\frac{d\xi}{dt} = g \sin \phi \cos \phi \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)$$

को संतुष्ट करता है, जिसका साधन, (10) उचित ध्यान रखते हुए, निम्नलिखित है—

$$(14) \quad \xi = g \sin \phi \cos \phi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right)$$

(13) तथा (10) की सहायता से, द्वितीय समी० (11) से, हम अत मे ऊर्ध्वाधर दिशा मे निम्नलिखित गति की प्राप्ति करते हैं—

$$(15) \quad \zeta = h - \frac{gt^2}{2} + g \cos^2 \phi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right)$$

यह ωt एक बहुत ही छोटी संख्या है जिसका परिणाम कोई (पतन समय) ÷ (एक दिवस) होगा। अतएव इस साधन का हम ωt के घातों मे विस्तार कर सकते हैं। तो (13), (14), और (15) के स्थान मे हम प्राप्त करते हैं—

$$\eta = \frac{gt^2}{3} \cos \phi \omega t, \quad \xi = \frac{gt^2}{6} \sin \phi \cos \phi (\omega t)^2,$$

$$\zeta = h - \frac{gt^2}{2} \left(1 - \frac{\cos^2 \phi}{3} (\omega t)^2 \right).$$

एतदनुसार पूर्व दिशावाला विक्षेप ωt मे प्रथम कोटि का, दक्षिण दिशावाला विक्षेप ωt मे द्वितीय कोटि का, होगा। इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर दिशा मे पिंडों के स्वतन्त्रतापूर्वक पतन के नियम से जो विकलन पृथिवी के घूर्णन के कारण होता है वह भी ωt मे द्वितीय कोटि का है। पूर्वदिशाकीय विक्षेप के कई उदाहरण प्राप्त किये गये हैं और वह वाद के अनुसार ही पाया गया है। अनुकूल परिस्थितियों (गहरी खानों में उतरने के “कूपो”) मे उसका परिमाण कई सेंटीमीटरों का होता है।

प्रकटतया इन ‘(प्रेक्षणीय किंवा अप्रेक्षणीय) विक्षेपों का कारण इस बात मे है कि आदि के प्रतिबोध (10), जो वाद एवं प्रयोग दोनों ही के नितात आधार हैं, पृथिवी

के प्रति विराम का प्रवेशन करते हैं। अतएव आकाश में वे कुछ वेग इंगित करते हैं जिसका परिमाण है—

$$(\text{पृथ्वी का कोणीय वेग}) \times (\text{पृथिवी के अक्ष से दूरी}) ।$$

जिस वेग से पृथ्वी तल गिरते पिंड के नीचे से खिसकता है उससे यह ऊपर दिया हुआ वेग कुछ भिन्न ही है। इससे स्पष्ट होगा कि पिंड पृथिवी पर ठीक अपने आदि के स्थान के प्रक्षेप पर नहीं गिरेगा।

§ ३१. फूको का लोलक

यहाँ भी समीकरण (30.5) लागू है केवल एक और प्रतिबंध के साथ कि लोलक के अवलंबन बिंदु से संहति बिंदु की दूरी निश्चर रहे। इस प्रतिबंध को उस रूप के सद्ध लिख देते हैं जिसका व्यवहार (18.1) में गोलीय लोलक के लिए किया गया था, अर्थात्,

$$(1) \quad F = \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2) = 0,$$

और इससे संगत लाम्बार्ज-गुणक का प्रवेश करा देते हैं। तो समीकरण (30.5) यों हो जाते हैं—

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -2\omega \sin \phi \frac{d\eta}{dt} + \lambda \xi \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= 2\omega \sin \phi \frac{d\xi}{dt} - 2\omega \cos \phi \frac{d\zeta}{dt} + \lambda \eta \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + g &= 2\omega \cos \phi \frac{d\eta}{dt} + \lambda \zeta. \end{aligned}$$

अवश्य ये अपने तई छोटे-छोटे दोलनों तक ही सीमाबद्ध रहेंगे। अतएव $\frac{\xi}{l}$ तथा $\frac{\eta}{l}$ को प्रथम कोटि की लघु राशियाँ समझेंगे। तो (1) से परिणाम निकलता है

कि द्वितीय कोटि की (लघु) राशियाँ तक $\frac{\xi^2}{l^2} = 1$ । अधिक ठीक तरह से, विराम स्थल के आस-पास के स्थानों के लिए हम कह सकते हैं कि—

$$\xi = -l (1 + \text{द्वितीय कोटि की राशियाँ}),$$

क्योंकि ξ , स्वभाषन ऊर्ध्वाग्गता ऊर्ध्व की ओर निर्दिष्ट है। तो तृतीय समी० (12) दिखाता है कि प्रथम कोटि की राशियाँ वह

$$(3) \quad g = -\lambda l, \text{ जहाँ } \lambda = -\frac{g}{l}$$

एक बार फिर प्रथम दो समीकरणों (2) के $\frac{d\xi}{dt}$ वाले पद की उपेक्षा कर, क्योंकि वह द्वितीय कोटि का है, और गतिविगा

$$(4) \quad u = \omega \sin \phi$$

का उपयोग कर, निम्नलिखित प्राप्त करने के लिए, उनका पुनर्लेखन करते हैं—

$$(5) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2u \frac{d\eta}{dt} + \frac{g}{l} \xi = 0,$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2u \frac{d\xi}{dt} + \frac{g}{l} \eta = 0.$$

यह सुविधाजनक होगा कि द्वितीय समीकरण (5) को i से गुणा कर, उसे प्रथम में जोड़कर, और पृ० १९० के समी० (26.10) की भाँति, नयी चर राशि

$$(6) \quad s = \xi + i \eta$$

का उपयोग कर उनका सम्मिश्र रूप में समुच्चयन कर ले। तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(7) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + 2iu \frac{ds}{dt} + \frac{g}{l} s = 0,$$

जो निश्चर (नियत) गुणाको के साथ समाग-रेखीय द्वितीय घात का अवकल समीकरण है। देखिए कि वह समीकरणों (5) के मध्यपदों का पूर्णाक्ष-स्थापकीयलक्षण है, जिसने (5) → (7) वाला क्रम (स्टेप) संभव किया।

समी० (7) को हल करने के लिए,

$$s = Ae^{\alpha t}$$

रखते हैं। इसका (7) में प्रतिस्थापन करने से आता है

$$\alpha^2 + 2i u \alpha - \frac{g}{l} = 0,$$

जो α में एक वर्गात्मक समीकरण है जिसके मूल हैं—

$$(8) \quad \alpha_1 = -u + \left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ और } \alpha_2 = -u - \left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

अतएव (7) का व्यापक साधन (साल्यूशन) हुआ

$$(9) \quad s = A_1 e^{i\alpha_1 t} + A_2 e^{i\alpha_2 t}$$

नियतांक A_1 तथा A_2 आदि की दशाओं से निर्धारित किये जाते हैं। हम मान लेंगे कि प्रयोगात्मक व्यवस्था से सगत ये हैं—

$$(10) \quad t=0 \text{ पर } \xi=a, \eta=0, \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0.$$

अतएव हमें यह समझना चाहिए कि गोलक को अपनी सादृल मूल स्थिति से, घनात्मक ξ -अक्ष पर, अर्थात् (दे० आ०५०) ध्रुव-वृत्त पर दक्षिण दिशा की ओर, एक कोण द्वारा खींचकर, बिना कोई आवेग दिये, छोड़ देते हैं। समी० (10) से, हमारी सम्मिश्र चर राशियों के मान होंगे—

$$(10a) \quad s=a, \frac{ds}{dt}=0, \quad t=0 \text{ पर।}$$

तो समी० (9) प्रदान करता है

$$(11) \quad A_1 + A_2 = a, \text{ तथा}$$

$$(11a) \quad A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = 0, \text{ और}$$

$$(11b) \quad A_1 = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{u}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}} \right], \quad A_2 = \frac{a}{2} \left[1 - \frac{u}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}} \right],$$

तत्पश्चात्, $\frac{ds}{dt}$ देनेवाला पदपूज निकालते हैं। वह स्वयं s की अपेक्षा कुछ

कम पेचीला है। (11a) का स्मरण करते हुए हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{ds}{dt} = i\alpha_1 A_2 e^{-i\alpha_1 t} \left[e^{i\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} t} - e^{-i\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} t} \right],$$

जिससे समी० (8) और (11b) के अनुसार प्राप्त करते हैं—

$$(12) \quad \frac{ds}{dt} = -a \frac{\frac{g}{l}}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-iut} \sin\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} t.$$

इससे हम निम्नलिखित परिणामों पर पहुँचते हैं—जब कभी भी ज्या वाला

गुणन-खंड शून्य होता है, तब $\frac{ds}{dt} = 0$ और इसलिए $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0$.

यह गोलक^१ के प्रक्षेप पथ में एक आवर्तन स्यान या निशिताग्र^२ अनुरूपित करता है। आदि के प्रतिबंधों (10) के अनुसार, इनमें का पहला $t=0$ पर होता है। यदि हम

$$(13) \quad T = \frac{2\pi}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

रख लें, तो अनुक्रमिक निशिताग्र

$$t = \frac{T}{2}, t = T, t = \frac{3T}{2},$$

पर होंगे। $t = T$, एक पूर्ण, इधर-से-उधर उधर-से-इधर, गति का काट है। $u=0$ (अर्थात् $\omega=0$) कर देने से समी० (13) पार्यव घूर्णन के बिना एक सरल लोलक के दोलन (अर्थात् आवर्त) काल से सहमत हो जाता है—जैसा कि अपेक्षित है।

यह जानने के लिए कि फूको-लोलक का गोलक $t = T$ पर किस स्यान पर होगा, (13) और (11) के उपयोग से हम (9) से प्राप्त करते हैं—

$$\begin{aligned} s_{t=T} &= A_1 e^{-iuT+2\pi i} + A_2 e^{-iuT-2\pi i} \\ &= (A_1 + A_2) e^{-iuT} = a e^{-iuT} \end{aligned}$$

अतएव गोलक की अपनी विराम स्थिति से वही दूरी a है जो कि गति के प्रारंभ में थी, परंतु उसका दिगंश दक्षिण की ओर के ध्रुववृत्त से अब संपाती नहीं रहता, जैसा कि वह आदि में था, वरन् इस दिशा की अपेक्षा में, उसमें एक पश्चवर्त्तिता आ जाती है। इस पश्चता का कोण निकलता है—

$$uT = 2\pi \frac{u}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}} \cong 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \omega \sin \phi.$$

इस प्रकार गोलक पश्चिम की ओर विक्षिप्त हो जाता है (देखिए आकृति ५०)। इसको यह कहकर समझा सकते हैं कि पृथिवी का घूर्णन यदि शून्य होता तो गोलक का पथ बिल्कुल ऋजुरेखीय, दक्षिण-उत्तर-दक्षिण, होता। परंतु परिस्थिति के जैसी

सापेक्ष गति

२३४

हे वंसी होने के कारण, कोरिओलिस बल, अपने "दायें तट पर दाव" द्वारा, जब गोलक बाहर को जाता है तब प्रक्षेप-पथ को पूर्व की ओर कोण $\frac{1}{2}\mu T$ द्वारा, जब भीतर की ओर आता है तब उसी कोण $\frac{1}{2}\mu T$ द्वारा पश्चिम की ओर प्रक्षेप-पथ को विस्थापित कर देता है।

फूको के १८५१ के तथा पीछे से उनके अनुयायियों के प्रयोगों ने केवल गुणात्मक परिणाम ही दिया। सारी त्रुटियों के कारणों का मात्रात्मक अनुसंधान कामरलिंग ओनेस ने अपने १८७९ के ग्रोनिजन गवेषणा-प्रबंध में किया; वे ही कामरलिंग ओनेस, जो पीछे से न्यून तापों के क्षेत्र में अग्रसर अधिकारी (प्रमाण-पुरुष) और अतीव चालकता के आविष्कर्ता हुए।

१३२. त्रिपिंड समस्या की लाग्रंजीय स्थिति

आपेक्षिक गति के इस विदलेपण को समाप्त करने से पहले एक प्रसिद्ध सिद्धांत का प्रमाण दिये बिना नहीं रहा जाता, जिसे लाग्रान्जने (पेरिस अकादमी, १७७२ में) प्रकाशित किया था—त्रिपिंड समस्या का साधन बंद और प्रारंभिक (सादे) रूप में किया जा सकता है, यदि यह मान लें कि खगोलीय पिंड जो त्रिकोण बनाते हैं वे सदैव अपने आप के समरूप ही रहते हैं। तीनों पिंडों की संहतियां कुछ भी हो सकती हैं।

इस सिद्धांत का प्रमाण दिखलायेगा कि—

१. तीनों संहति बिंदुओं से होकर जाता हुआ समतल आकाश में स्थिर रहता है।
२. तीनों बिंदुओं के प्रत्येक पर आरोपित न्यूटनीय बलों का परिणामी उनके सार्वसंहति-केंद्र से होकर जाता है।
३. उनसे बना हुआ त्रिकोण समबाहु है।



आ० ५०—फूको का लोलक।

गोलक के प्रक्षेप-पथ का विह्वलमावलोकन; आदि का विस्थापन दक्षिण की ओर। एक पूरे दोलन में विक्षेप पश्चिम की ओर।

४. तीनों बिंदु परस्पर समरूप शकवो की रचना करते हैं, जिनकी एक नाभि पर बिंदुओं का सार्वसंहति-केन्द्र होता है।

लाग्रान्ज ने जो प्रमाण दिया था वह जरा पेचीला है। यदि लापलास की भांति, ऊपर दी हुई बातों की पहली निष्पत्ति आरम्भ से ही मान ले तो प्रमाण महल किया जा सकता है। परन्तु काराथिआदारी^१ ने दिखलाया है कि इस अनुमान के बिना भी एक सहल प्रमाण संभव है। उनका प्रारम्भ-स्थल लवकोणीय निर्देशांकों में विघटित हमारा समीकरण (29.4) है। कुछ थोड़े-से रूप-भेद के साथ इसी प्रमाण का अनुसरण हम यहाँ करेंगे।

हम समतल S का विचार करते हैं जो तीनों बिंदुओं P_1, P_2, P_3 (सहतिर्या III_1, III_2, III_3), और इसलिए उनके सहति-केन्द्र O से भी होकर जाता है। समस्या की व्यापकता को बिगाड़े बिना ही हम संहति-केन्द्र को विराम दशा में समझ सकते हैं। अतएव S स्थिर बिंदु O के चारों ओर घूर्णन करता है। इस घूर्णन में एक घटक सम्मिलित है जो S को O से जाते हुए अपने अभिलंब के चारों ओर अपने आप में ही घुमा सकता है। सारे कोणीय वेग को ω कहिए। हम अपने आपको S में स्थित एक ढाँचे में ठहरे हुए होने की कल्पना करते हैं, जहाँ से बिंदुओं P_k की गति का हम उसी प्रकार प्रेक्षण करते हैं जैसे कि पृथिवी से फूको-लोलक का प्रेक्षण किया गया था। O से बिंदुओं P_k की सदिश त्रिज्याओं r_k की माप कर लेते हैं। S से प्रेक्षित उनके वेग

और त्वरण v_k तथा $\frac{dv_k}{dt}$ हैं। सदिश नियम (24.7) का उपयोग कर, इस गति के अवकल समीकरणों (29.4) को यों लिखते हैं—

$$(1) \quad \frac{dv_k}{dt} + 2\omega \times v_k + \omega(r_k \cdot \omega) - r_k \omega^2 + \dot{\omega} \times r_k = \frac{F_k}{m_k}$$

F_k है m_k पर आरोपित न्यूटनीय गुरुत्वीय बलों का सदिश योग। इस प्रकार, उदाहरणतया,

$$(2) \quad \frac{F_1}{m_1} = \frac{G m_2}{(r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 - r_1}{(r_2 - r_1)} + \frac{G m_3}{(r_3 - r_1)^2} \frac{r_3 - r_1}{(r_3 - r_1)}.$$

१. -1. Common mass center

2. Caratheodory: *Sitz. Ber. Akad. Wiss.*, 257 (1933).

S में एक कार्तीय निर्देशांक प्रणाली स्थापित करते हैं जिसका मूल बिंदु O पर है और x, y किसी-भी ओर लक्ष्यीकृत S के समतल में है। z -अक्ष S के लंबवत् O से जाते हुए खड़ा करते हैं। यूलरीय रीति-अनुसार ω को हम इन अक्षों की दिशा में विघटित करते हैं,

$$(3) \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

समझिए कि घटक ω_3 (S का अपने आप में घूर्णन) S में स्थित सदिशों में से एक \longrightarrow

OP_k की दिशा के विचार से निर्धारित किया जाता है। परंतु हमने मान लिया था कि त्रिभुज $P_1 P_2 P_3$ को अपने आप के ही समरूप रहना होना। इससे परिणाम यह \longrightarrow

निकलता है कि अन्य दोनों सदिशों OP_k के प्रत्येक की दिशा भी S में स्थिर होगी। तो हम लिख सकते हैं—

$$(4) \quad \mathbf{r}_k = \lambda(t) (a_k, b_k, 0),$$

जहाँ a_k, b_k किसी दिये हुए आदि समय पर P_k के कार्तीय घटक हैं। फलन $\lambda(t)$ \longrightarrow

सदिशों OP_k के, और इसलिए त्रिभुज $P_1 P_2 P_3$ के भी, मापक्रम का सार्व-परिवर्तन निर्धारित करता है। λ के अवकलजों को $\dot{\lambda}$ और $\ddot{\lambda}$ लिखकर, हम (4) से प्राप्त करते हैं—

$$(4a) \quad \mathbf{v}_k = \dot{\lambda}(t) (a_k, b_k, 0),$$

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \ddot{\lambda}(t) (a_k, b_k, 0).$$

और भी परिणाम निकलता है कि समी० (1) के परिणामी बल (\mathbf{F}_k) का z -घटक शून्य-प्राय और x -तथा y -घटक λ^2 के प्रतिलोमतया समानुपाती होंगे। इस बल को संक्षिप्त रूप में यो लिखेंगे—

$$(5) \quad \frac{\mathbf{F}_k}{m_k} = \frac{1}{\lambda^2(t)} (L_k, M_k, 0).$$

तत्पश्चात् समीकरण (1) का S से लंबवत् z -घटक लिखते हैं, इस प्रकार

$$2\lambda(\omega_1 b_k - \omega_2 a_k) + \lambda\omega_3(a_k\omega_1 + b_k\omega_2) + \lambda(\dot{\omega}_1 b_k - \dot{\omega}_2 a_k) = 0,$$

या, a_k और b_k वाले गुणनखंडों को अलग-अलग कर,

$$(6) \quad \begin{aligned} &\{-2\lambda\omega_2 + \lambda(\omega_3\omega_1 - \dot{\omega}_2)\}a_k \\ &+ \{2\lambda\omega_1 + \lambda(\omega_3\omega_2 + \dot{\omega}_1)\}b_k = 0 \end{aligned}$$

दोनों कोष्ठक $\{ \}$ k से स्वतंत्र t के फलन हैं। उनको $f(t)$ और $g(t)$ कहकर हम प्राप्त करते हैं—

$$(6a) \quad \frac{f(t)}{g(t)} = -\frac{b_k}{a_k}$$

परंतु हमने माना था कि बिंदु P_k त्रिभुज बनाते हैं, अर्थात् वे समरेख नहीं हैं। अतएव तीनों अनुपातों b/a को असम होना चाहिए। वंसी स्थिति में (6) को केवल $f=g=0$ रखकर संतुष्ट ही कर सकते हैं। अर्थात्, सुव्ययततया,

$$(7) \quad \begin{aligned} 2'\lambda\omega_1 &= -\lambda(\omega_3\omega_2 + \dot{\omega}_1), \\ 2'\lambda\omega_2 &= \lambda(\omega_3\omega_1 - \dot{\omega}_2). \end{aligned}$$

इनका क्रमात् ω_1 और ω_2 के गुणन-तत्पश्चात् यह योग देता है

$$\frac{2'\lambda}{\lambda} = -\frac{\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

और, क्षेत्रकलन से,

$$(8) \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{C}{\lambda^4}, \quad C = \text{अवकलन का नियतांक।}$$

अब हम अवकल समी० (1) के x -और y -घटको को लिखने की ओर बढ़ते हैं। वे हैं—

$$\begin{aligned} &\ddot{\lambda} a_k - 2\omega_3 \dot{\lambda} b_k + \omega_1 \lambda (a_k \omega_1 + b_k \omega_2) \\ &- \lambda a_k (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - \dot{\omega}_3 \lambda b_k = \frac{L_k}{\lambda^2}, \\ &\dot{\lambda} b_k + 2\omega_3 \lambda a_k + \omega_2 \lambda (a_k \omega_1 + b_k \omega_2) \\ &- \lambda b_k (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \dot{\omega}_3 \lambda a_k = \frac{M_k}{\lambda^2} \end{aligned}$$

या, गुणनखंडीय रूप में सजाये हुए,

$$\{\ddot{\lambda} - \lambda(\omega_2^2 + \omega_3^2)\} a_k$$

$$(9) \quad \{2\omega_3\lambda + \lambda(-\omega_1\omega_2 + \omega_3)\} b_k = \frac{L_k}{\lambda^2},$$

$$\{2\omega_3\lambda + \lambda(\omega_1\omega_2 + \omega_3)\} a_k$$

$$+ \{\lambda - \lambda(\omega_1^2 + \omega_2^2)\} b_k = \frac{M_k}{\lambda^2}$$

प्रथम समीकरण के { } कोष्ठक, एवं द्वितीय समीकरण के भी, यदि λ^2 से गुणित किये जायें तो प्रत्येक को, (1 से स्वतंत्र) नियत गुणांकों वाले, तीन रैखिक समीकरण संतुष्ट करना चाहिए। यह तभी संभव होगा यदि वे स्वयं निश्चर हों। परिणाम निकलता है कि प्रथम तथा चतुर्थ कोष्ठकों के एवं द्वितीय और तृतीय कोष्ठकों के अंतर का, प्रत्येक λ^2 वैसे विभाजित एक नियतांक के बराबर होगा। तो हम प्राप्त करते हैं

$$(10) \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{A}{\lambda^2}, \quad 2\omega_1\omega_2 = \frac{B}{\lambda^2}$$

समुचित समुच्चयन देता है

$$(\omega_1 \pm i\omega_2)^2 = \frac{A \pm iB}{\lambda^2}$$

जिससे निरपेक्ष परिमाण

$$(11) \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{D}{\lambda^2}, \quad D = A^2 + B^2$$

प्राप्त होता है। इसकी (8) के साथ तुलना करने से हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं

$$(11a) \quad \lambda = \frac{C}{D} = \text{नियत।}$$

यदि C और D स्वयं शून्य न हों तो। अब (10) के अनुसार, $\lambda = \text{नियत}$, करने से ω_1 तथा ω_2 दोनों ही निश्चर हो जाते हैं और इसलिए (7) से ω_3 को शून्य होता होगा। निर्देशांकों x, y के उपयुक्त निर्वाचन से ω_2 को भी 0 कर सकते हैं। तो (9) का प्रथम समीकरण प्रदान करेगा $L_k = 0$, उस स्थिति में तीनों बिंदुओं P_k को समरेख होना पड़ेगा जो हमारी परिकल्पना के विरुद्ध है।

आएँ हमें $C=D=0$ रखा पड़ेगा और तब हम या तो (8) से या (11) में प्राप्त करते हैं

$$(12) \quad \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

यह ०.२३४ की अनुति 1 को निरुक्त करता है कि समतल S कोणीय वेग ω_3 में, अपने आप में घूर्णन करता है, उसका अभिलंब आकाश में स्थिर होता रहता है।

यदि कोणीय वेग के समीकरणों को अपने निकाय पर अनुप्रयुक्त करें तो देखेंगे कि m_k बिंदुओं की समतल S में गति क्षेत्रक्रीय वेग नियतांक को कुछ भी अवरान नहीं कर सकती। अतएव यह नियतांक सीधे ही S के कोणीय वेग ω_3 में निर्धारित होता है; और निम्नलिखित होना चाहिए कि यह

$$\text{नियतांक} = \omega_3 \sum m_k |r_k|^2 = \omega_3 \lambda^2 \sum m_k (a_k^2 + b_k^2)$$

इसके लिए हम

$$(12a) \quad \lambda^2 \omega_3 = \gamma, \quad (\gamma = \text{निश्चय}).$$

लिख सकते हैं। अतएव परिणाम निकलता है कि

$$(12b) \quad 2\lambda\ddot{\omega}_3 + \lambda^2\dot{\omega}_3 = 0.$$

समीकरणों (12) तथा (12a, b) के प्रभाव में समीकरण (9) निम्नलिखित प्रकार में सरल हो जाते हैं—

$$(13) \quad \lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = \frac{L_k}{a_k} = \frac{M_k}{b_k}.$$

इनमें ममायी हुई अभिव्यक्तियों $\frac{L_1}{a_1} = \frac{M_1}{b_1}$ कहती हैं कि F_1 का O के प्रति का घूर्णन शून्य हो जाता है, क्योंकि

$$(14) \quad \left| \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \right| = \frac{1}{\lambda^2} (a_1 M_1 - b_1 L_1) = 0,$$

अतएव F_1 महति-केंद्र O में होकर जाता है। वही F_2 और F_3 पर लागू है। यह हमारा दृढ़ कथन 2 है जो कहता है कि P_k पर अनुप्रयुक्त बलों का परिणामी कर्णों m_k के संहति-केंद्र से होकर जाता है।

हम (14) को और अधिक व्यव्यक्ततया लिखने के लिए (2) का उपयोग कर सकते हैं। तो तुरंत ही प्राप्त करते हैं—

$$(15) \quad \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1}{m_1 G_1} = \frac{m_2 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^3} + \frac{m_3 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3}{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^3} = 0.$$

सापेक्ष गति

२४०

परन्तु संहति-केंद्र की परिभाषा से,

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0,$$

(16)

और इसलिए

$$m_2 r_1 \times r_2 + m_2 r_1 \times r_3 = 0,$$

इसका प्रतिस्थापन देता (15) में है

$$m_2 r_1 \times r_2 \left[\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} - \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} \right] = 0.$$

अर्थात्,

$$|r_2 - r_1| = |r_3 - r_1|.$$

(17)

इसी प्रकार ज्ञात होता है कि—

$$|r_3 - r_2| = |r_1 - r_2| \text{ इत्यादि।}$$

(17a)

इस प्रकार हम अभ्युक्ति 3 पर पहुँचते हैं—त्रिकोण समबाहु है।

(13) में आये हुए दोनों भागफलों $\frac{L_k}{a_k}$ तथा $\frac{M_k}{b_k}$ में से प्रत्येक निर्धारित किया जा सकता है। इसके लिए त्रिकोण की भुजा को λs कहिए, जहाँ

$$s^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = (a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2 = \dots$$

तो (2) और (5) के अनुसार हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{L_1}{a_1} = \frac{G}{s^2 a_1} \{ m_2 (a_2 - a_1) + m_3 (a_3 - a_1) \}$$

और, (16) के विचार से,

$$(18) \quad \frac{L_1}{a_1} = \frac{G}{s^2} \{ -m_1 - m_2 - m_3 \}.$$

इस समीकरण का दायीं अंग m_k ओं और निर्देशकों a_1, b_k में स-समिति है। अतएव वह न केवल $\frac{L_1}{a_1}$ का वरन् $\frac{L_k}{a_k}$ का, और $\frac{M_k}{b_k}$ का भी, मान निरूपित करता है।

इस मान का (13) में प्रतिस्थापन हमें देता है

$$(19) \quad \lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = - \frac{G}{s^2} (m_1 + m_2 + m_3).$$

λ में यह अवकल समीकरण समय में हुई गति का वर्णन करता है, अर्थात् उस ताल का जिससे हमारे समबाहु त्रिकोण का बारी-बारी से प्रसरण और आकुचन होता है।

परंतु इन दीर्घकालिक गति में, तथा उनी समय प्रक्षेप-वर्षों के रूप में अंतर्दृष्टि प्राप्त करने के लिए एक महत्त्वपूर्ण रीति है। हम समतल S का स्थान कर देते हैं और गति का समतल S' में प्रक्षेप करने हैं जो S में λ तो स्थानी, परंतु आकाश में स्थिर रहता है। S' में गति-विंदु m_k पर आर्गेण्डि वेक्टर मात्र बल परिणामी F_k है जो गति केंद्र की ओर निर्देशित है; यह केंद्र विराम में है। बनाबटी बलबूंद (कोरिओलिस्, अपकेंद्र; आदि) जो (1) में आते हैं अब निरुद्ध जाने हैं। (5) और (15) से F_k का परिमाण है—

$$(20) \quad \left| F_k \right| = -\frac{m_k}{\lambda^2} \left(L_k^2 + M_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ = -\frac{m_k G}{\lambda^2 s^2} \left(m_1 + m_2 + m_3 \right) \frac{(a_k^2 + b_k^2)^{\frac{1}{2}}}{s}$$

दायें अंग में केवल एक ही राशि, λ^2 का समय में परिवर्तन होता है। (4) की महा-यता से यह $|x_k|$ के पदों में व्यक्त की जा सकती है—

$$\lambda^2 = \frac{|x_k|^2}{a_k^2 + b_k^2}.$$

(20) में λ को इन मान में प्रतिस्थापित कर दीजिए; एक नयी सहति m' परिभाषित करिए, यो—

$$(20a) \quad m'_k = m_k \frac{(a_k^2 + b_k^2)^{\frac{3}{2}}}{s^2};$$

और भारी महति को कहिए

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

तो (20) के स्थान पर निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$\left| F_k \right| = -\frac{m'_k M G}{|x_k|^2}$$

अतएव हमारे तीनों विंदुओं का प्रत्येक, औरो से स्वतंत्रतया, आकाश में इस भांति चलता है कि मानों उसकी सहति m_k नहीं m'_k है और जो न्यूटनीय प्रकार से O में विरामित सहति M की ओर आकर्षित है। अतएव वह एक शंकुब' की रचना करता है जिसकी एक नाभि O पर है।

तीनों शाकवों के परिमाणों और पारस्परिक स्थानों के बारे में कुछ कह सकने के लिए, गति की स्वीकृत दशा में अन्तर्निहित आदि के प्रतिबंधों को विचार में लेना होगा। उदाहरणतः, समझिए कि विचार उस क्षण कर रहे हैं जब $\lambda = \lambda_{extr}$ जहाँ प्रत्येक m_k की O से दूरी

$$(21) \quad \lambda_{extr} (a_k^2 + b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

वांछित है। (4) के अनुसार, तब S में त्रिज्यावर्ग शून्य होगा। S' अर्थात् आकाश में जो वेग होगा वह कोणीय वेग के घटक ω_3 की दूरी (21) से गुणा करने से प्राप्त होगा। इसलिए हम दूरी में आने वाला गुणनखंड $(a_k^2 + b_k^2)^{\frac{1}{2}}$ में केवल आदि के वेगों तथा सार्वसहति-केन्द्र से आदि की दूरियों के, वरन् इन आदि के मानों से निकले हुए तीनों शाकवों के आकारों के भी सादृश्य की भाप है। इससे अभ्युक्ति (4) स्थापित हो जाती है। तीनों शाकवों के स्थान उन कोणों द्वारा जाने

जाते हैं जो तीनों सदिश त्रिज्याओं \vec{OP}_k में एक-दूसरे के बीच होते हैं।

उस विशेष स्थिति में जब $m_1 + m_2 = m_3$ और जब (इसलिए) सहति केन्द्र समबाहु त्रिभुज की माध्यिकाओं के प्रतिच्छेद से सपाती होता है, तब ये शाकव सर्वांग-सम और परस्पर 120° से पृथक् होते हैं।

शाकवों की इस गति के अतिरिक्त, लाग्रान्ज के अनुसार, गतियों का एक और प्रकार है जो सरल रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिसमें तीनों पिंड एक घूर्णनयुक्त ऋजुरेखा पर स्थित होते हैं। परंतु हम उस बात में यहाँ नहीं जाना चाहते।

अतः मैं कह देना चाहिए कि लाग्रान्ज की विशिष्ट त्रिपिंड समस्या से उसके संगत विशिष्ट n -पिंड समस्या को जा सकते हैं। बराबर की n -सहतियों और उपयुक्त आदि-वेगों की स्थिति में, तब n सर्वांगसम केप्लर दीर्घवृत्त प्राप्त होते हैं जिनके बीच परस्पर $\frac{2\pi}{n}$ का कोण होता है और जो एक ही ताल में पार किये जाते हैं।

एक समय, अल्प काल के लिए, गति का यह ढंग X -किरणों के L -वर्णक्रमों के निकलने के संबंध में इलेक्ट्रनों के लिए, प्रतिपादित किया गया था¹।

षष्ठ अध्याय

यांत्रिकी के समाकल परिणमन संबन्धी सिद्धांत तथा व्यापकीकृत निर्देशांकों के लिए लाग्रान्ज के समीकरण

§ ३३. हैमिल्टन के सिद्धांत

यांत्रिकी के एक परिणमन संबन्धी सिद्धांत से पहले ही परिचय हो चुका है अर्थात् दालाबेर का सिद्धांत। यह सिद्धांत किसी दिये हुए स्वेच्छ क्षण पर एक निकाय की दशा के आभासी विस्थापन द्वारा प्राप्त उसी निकाय की पास की दशा से तुलना करता है। अब जिन सिद्धांतों पर हम विचार करने वाले हैं वे 'समाकल सिद्धांत' हैं। इनमें और पूर्वोक्त में भेद यह है कि यहाँ हम परिमित कालांतर में, या, जो कि वही बात है, प्रक्षेप-पथ के परिमित खंड के अंतर पर, निकाय की आनुक्रमिक दशाओं की बात करेंगे। तत्पश्चात् इन दशाओं की किन्हीं सगत आभासी दशाओं से तुलना की जाती है।

अपने विविध नामों वाले विभिन्न समाकल सिद्धांतों में भेद इस बात में है कि प्रारंभिक और उनके पास की या परिणमित दशाओं की सगति किस प्रकार स्थापित की गयी है। उनमें सर्व-सामान्य बात यह है—जो राशि परिणमित की जायगी उसकी विमितियाँ वही होंगी जो क्रिया की होती हैं। अतएव वे सब "लघुतम क्रिया" के सिद्धांतों" वाले नाम के अतर्गत की जा सकती हैं।

जैसा कि पहले से ही ज्ञात है शक्ति एक ऐसी राशि है जिसकी विमितियाँ हैं— $\text{ऊर्जा} \times \text{काल}^{-1}$ (अर्थात् $\text{ऊर्जा} \div \text{काल}$); परंतु क्रिया की विमितियाँ हैं— $\text{ऊर्जा} \times$

1. Integral principles

अंग्रेजी बोलने वाले देशों में प्रस्तुत बात के लिए इस नाम का व्यवहार नहीं किया जाता। अतएव यह बता देना आवश्यक है कि मूल-ग्रंथ में कहा हुआ यह लघुतम क्रिया का हैमिल्टन का सिद्धांत अंग्रेजी में व्यवहृत लघुतम क्रिया के सिद्धांत से भिन्न है जिसे कभी-कभी मोपेर्त्वी (Maupertuis) का सिद्धांत कह देते हैं।

—अंग्रेजी अनुवादक।

काल । इसका एक उदाहरण है—क्रिया का मौलिक क्वांटम* या प्लांक^१ नियतांक (प्लांक) जिसपर § ४५ में विचार होगा, अर्थात् निम्नलिखित राशि

$$h = 6.624 \times 10^{-27} \text{ अर्ग सेकंड} ।$$

पहले हैमिल्टन का सिद्धांत लेंगे । वह मोपत्त्वी के सिद्धांत से भिन्न है, जो § ३७ में लिया जावेगा (यद्यपि ऐतिहासिकतया मोपत्त्वी हैमिल्टन से कोई सौ साल पहले हुए थे) । उस (मोपत्त्वी सिद्धांत) और इस (हैमिल्टन सिद्धांत) में भेद यह है कि यहाँ समय (काल) में कोई परिणमन नहीं होता । इसका यह मतलब हुआ कि वास्तविक प्रक्षेपपथ के किसी x_k निर्देशांक के बाले, स्थान पर निकाय उसी समय पहुँचता है जब कि परिणमित प्रक्षेपपथ के संगत $x_k + \delta x_k$ निर्देशांक के बाले स्थान पर । हैमिल्टन के सिद्धांत का यह गुणधर्म निम्नलिखित अभ्युक्ति में संगृहीत है—

$$(1) \quad \delta t = 0.$$

इस स्थान पर यह कह देना चाहिए कि जब निकाय के प्रक्षेप-पथ या पथ की बात करते हैं तब उसके किसी बिंदु के तीन विभितियों वाले आकाश में प्रक्षेपपथ से मतलब नहीं होता, बरन् अनेक विभितियों वाले आकाश में एक ऐसे वक्र का मतलब होता है जो समूचे के समूचे निकाय की गति का लाक्षणिक हो । इस प्रकार, f स्वतंत्रता-संख्याओं की स्थिति में यह वक्र f विभितियों वाले आकाश में होगा, जिसके निर्देशांक होंगे, q_1, \dots, q_f (मिलाइए पृष्ठ ६४) ।

हैमिल्टन सिद्धांत संबंधी परिणमनों के बारे में हमारी अभियाचना है कि प्रतिबंध (1) के अतिरिक्त एक और निरोध उन पर लगाया जाय कि विचाराधीन प्रक्षेपपथ के खंड के सिरे, 0 और P , तथा परिणमित, पास के, प्रक्षेप-पथ के सिरे आकाश में संपाती हों । अतएव प्राप्त होता है कि किसी निर्देशांक x के लिए

$$(2) \quad \delta x = 0, \text{ समय } t = t_0 \text{ पर और } t = t_1 \text{ पर भी ।}$$

पृ. २४५ की आकृति (आ० ५१) इस उद्देश्य से खींची गयी है कि वास्तविक (पूरी रेखा) और आभासी या परिणमित (टूटी रेखा) पथों के संबंध की तीन विभितियों में, सकेतन रूप से रूप-कल्पना^२ करने में सहायता मिले । निर्देशांक के परिणमनों δx के कारण से हुआ विस्थापन δq , दोनों अंत-बिंदुओं के अतिरिक्त, इस निरोध के

* क्वांटम एक निश्चित, वांछित या अनुनात परिमाण मानिका ।

1. Planck 2. In visualizing

साथ बिल्कुल ही कुछ नहीं हो सकता है कि δq निरंतर और t में अवकलनीय हो। वास्तविक पथ के प्रत्येक बिंदु का परिणमित पथ के एक बिंदु के साथ सागत्य



आकृति ५१—हेमिल्टन के सिद्धान्त में “प्रक्षेपण” का परिणामन।
समय परिणमित नहीं होता।

होता है जो पूर्वोक्त से δq के विस्थापन द्वारा प्राप्त होता है, और इस प्रकार के दो बिंदु एक ही समय के होते हैं।

अब हम हेमिल्टन का सिद्धांत व्युत्पन्न करेंगे। हम दालांबेरे के सिद्धांत के (10.6) वाले रूप से प्रारंभ करते हैं—

$$(3) \sum_{k=1}^n \{ (m_k \ddot{x}_k - X_k) \delta x_k + (m_k \ddot{y}_k - Y_k) \delta y_k + (m_k \ddot{z}_k - Z_k) \delta z_k \} = 0.$$

तो अब n पृथक्-पृथक् सहति-बिंदुओं के एक निकाय पर विचार करते हैं, परंतु जो किसी विशेष प्रकार से न दी हुई प्रकृति के पूर्णपदीय या अपूर्णपदीय नियंत्रण बलों द्वारा युग्मित हो सकते हैं। परिणामवश, ये δx_k , δy_k , δz_k जो स्वभावतः इन नियंत्रणों का पालन करेंगे, परस्पर स्वतंत्र न होंगे। स्वतंत्रता सहायों वाली पूर्णपदीय स्थिति में केवल f स्वेच्छया निर्वाचित हो सकते हैं। अपूर्णपदीय स्थिति में उन्हें अवकल प्रतिबंधों द्वारा संबंधित होना होगा।

हम पहले निम्नलिखित द्वारा संबंध (3) का केवलमात्र औपचारिक रूपांतरण करेंगे—

1. Differentiable
2. Holonomic

$$(4) \quad \ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \frac{d}{dt} (\delta x_k),$$

जहाँ हम तुरन् ही पूछेंगे कि $\frac{d}{dt} (\delta x_k)$ जैम व्यंजन का क्या मतलब है। इसके लिए न केवल इन x_k के वास्तविक पथ को $x_k + \delta x_k$ के आभासी पथ से तुलना करते हैं वरन् वास्तविक पथ पर के वेग \dot{x}_k की भी आभासी पथ पर के उसी समय के वेग $\dot{x}_k + \delta \dot{x}_k$ से तुलना करते हैं। यह पश्चोन्त वेग निम्नलिखित संबंधमिका¹ द्वारा परिभाषित किया जाता है—

$$\frac{d}{dt} (x_k + \delta x_k) = \dot{x}_k + \frac{d}{dt} (\delta x_k).$$

परिणामित्व वेग लिखने के इन दो प्रकारों का हम समीकरण कर प्राप्त करते हैं—

$$(5) \quad \frac{d}{dt} (\delta x_k) = \delta \dot{x}_k$$

इस परिणाम का (4) में उपयोग करें, तो

$$(6) \quad \ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \delta \dot{x}_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \frac{1}{2} \delta (\dot{x}_k^2).$$

स्वभावतः ऐसे ही समीकरण y_k और z_k के लिए भी होंगे। अतएव (3) को अब इस रूप में लिख सकते हैं—

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \sum m_k (\dot{x}_k \delta x_k + \dot{y}_k \delta y_k + \dot{z}_k \delta z_k) =$$

$$\sum \frac{m_k}{2} \delta (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) + \sum (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k)$$

दायी ओर का द्वितीय पद आभासी² कर्म δW के सिवाय और कुछ नहीं है, अर्थात् हमारे आभासी विस्थापन में बाह्य बलों द्वारा किया हुआ कर्म। तथा दायें पार्श्व का प्रथम पद गतिज ऊर्जा T का वह परिणमन है जो वास्तविक से काल्पनिक प्रक्षेप पथ को जाने में होता है, अर्थात्

$$T = \sum \frac{m_k}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2).$$

अतएव समी० (7) निम्नलिखित प्रकार से सरल किया जा सकता है—

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \sum m_k \left(x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k + z_k \dot{z}_k \right) = \delta T + \delta W.$$

इसमें अन्य कोई परिणाम निकालने से पहले एक क्षण के लिए अप्रस्तुत विषय मध्य (5) के बारे में कुछ कहेंगे। उसे एक बार फिर हम निम्नलिखित रूप में लिख देंगे—

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \delta x = \delta \frac{dx}{dt}.$$

यदि यह स्मरण करें कि t परिनिमित्त नहीं होता और यह कि $\delta t = 0$ में अभिहित है कि $\delta dt = 0$, तो (9) के स्थान में हम

$$(9a) \quad \frac{d\delta x}{dt} = \delta \frac{dx}{dt} \quad \text{या} \quad d\delta x = \delta dx \quad \text{भी}$$

लिख सकते हैं।

नमीकरण (9a), विवेचनया अपने दूसरे रूप $d\delta = \delta d$ में, बूलर प्रकार के पुराने परिणाम कलन में फलदायी। यद्यपि रहस्यमय भाग लेता है। देखिए कि आभासी विस्थापन के समय-प्रवकलन¹ का वेग के आभासी परिणाम के साथ मध्यित करने में नमी० (9a) वास्तव में वही कहता है जो नगण्य-ना नमी० (5), सिवाय इसके कि (9a) में ये दो अनुमान ममाये हुए हैं कि समय परिणमन के बरा में नहीं है और आभासी विस्थापन निरंतर है।

अब हम नमी० (8) को लाटते हैं और उनका t के लिए t_0 में t_1 तक समाकलन करते हैं। बाया पार्व (2) के कारण शून्य हो जाता है और केवल निम्नलिखित रह जाता है—

$$(10) \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = 0.$$

जिस प्रकार का परिणमन हैमिल्टन के सिद्धांत में समाविष्ट है उसके लिए इसे नीचे दी हुई भांति भी लिख सकते हैं—

$$(11) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0.$$

पिछले समाकल को $\delta \int W dt$ द्वारा प्रतिस्थापित करना भूल होगी, क्योंकि यद्यपि यह

ठीक है कि भाभागी कर्म δW और समय dt में किया कर्म, अर्थात् dW , इन दोनों के गुणितफल अर्थ है। स्वयं W कार्य के लिए वेगों वाला नहीं है। W , व्यापकतया, एक "रता परिणम्य" नहीं है। यह रता परिणम्य^१ समी होगा यदि dW पर्याप्त अचल हो, अर्थात् यदि बाह्य बल उन प्रतिरूपों का पालन करें जो स्थितिज ऊर्जा V के होने को गारंटी करें। [देखिए §६ (३)]। उन स्थिति में

$$\int \delta W dt \text{ को } - \int \delta V dt = - \delta \int V dt$$

से समी० (११) में प्रतिस्थापित कर सकते हैं जो तब चिर-सम्मततया सरल यह हो जाता है—

$$(12) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0.$$

यही यह समीकरण है जो, जिस समय हैमिल्टन के सिद्धांत का नाम लेते हैं उस समय, साधारणतया, ध्यान में आता है। पृष्ठ ४६ के कथनों के अनुसार, यह संरक्षित अर्थात् अविनाशी निकायों के लिए वैध है। समीकरण (११) को हम असंरक्षित निकायों को भी सम्मिलित करने वाला व्यापकीकृत हैमिल्टन का सिद्धांत कह सकते हैं।

हम अब यह दावा करते हैं कि संरक्षित या असंरक्षित समुदायों के लिए क्रमात् समी० (१२) या (११) में यांत्रिकी का पूरा सार समाया हुआ है, ठीक वैसे ही जैसे कि दालीबेर के सिद्धांत में। यह ऊर्जा-वत् व्यंजन $T - V$ के विशेष महत्त्व पर जोर देता है। यांत्रिकी में यह लाग्रान्जियन फलन (या, सक्षेप में केवल लाग्रान्जियन) कहलाता है, और समीकरण (१२) को निम्नलिखित में ले जाता है—

$$(13) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \text{ जहाँ } L = T - V.$$

शब्दों में, लाग्रान्जियन का समय समाकल एक बाह्यतमी^२ है। अपने अंतिम कार्यों में हेल्महोल्ट्ज ने हैमिल्टनीय प्रकार के परिणमन-सिद्धांत पर भारी भरोसा किया था। उन्होंने उसे वैद्युत-गतिकी में भी पैठाया और L को गत्यात्मक विभव कहा। उष्मा-गतिकी में उसके विस्तृत व्यवहार के कारण, उसके लिए "स्वतंत्र ऊर्जा" का नाम उतना ही ठीक होगा, क्योंकि $T + V$ को "पूर्ण ऊर्जा" कहते हैं।

हैमिल्टन के सिद्धांत का इस बात से विशेष मान है कि वह निर्देशांकों के निर्वाचन से पूर्णतया स्वतंत्र है। वास्तव में T और V (तथा δW भी) ऐसी राशियाँ हैं

जिनकी प्रत्यक्ष भौतिक गरिमा है और जो किसी भी वांछित निर्देशांकों के जुट (कुलक, सेट) में व्यक्त की जा सकती है। हम इस गुणधर्म का उपयोग अगले प्रकरण में करेंगे।

हल्ज^१ की यह सम्मति थी कि हैमिल्टन का सिद्धांत केवल पूर्णपदीय निकायों के लिए ही बंध था। इस भूल का शोधन ओ० होल्डर^२ ने किया था।

हैमिल्टन का सिद्धांत हमारे कार्य-कारण के सबंधों की आवश्यकता के विरुद्ध है। अन्य जितने परिणमन सबंधी सिद्धांत हैं जिनमें क्रिया-समाकलन^३ आते हैं, वे भी ऐसा ही विशेष करते हैं। क्योंकि यहाँ घटनाओं का क्रम निकाय की वर्तमान दशा से नहीं निर्धारित होता, बल्कि उसके व्युत्पादन में भूत और भविष्य दशाओं पर भी उतना ही विचार करना पड़ता है। तो इससे यह जान पड़ता है कि परिणमन सबंधी सिद्धांत कारणात्मक नहीं, बल्कि मोमांसक* है। इस बात की चर्चा § ३७ में फिर हम करेंगे, जहाँ इस सिद्धांत की ऐतिहासिक उत्पत्ति का भी वर्णन करेंगे। वहाँ हम हैमिल्टन सिद्धांत के उन रूपांतरों का संक्षेप में उल्लेख करेंगे जो यांत्रिकी के अतिरिक्त भौतिकी के अन्य क्षेत्रों में उपयोगी सिद्ध होते हैं।

§ ३४. व्यापकीकृत निर्देशांकों के लिए लाग्रान्ज समीकरण

किसी स्वेच्छ अर्थात् किसी भी यांत्रिक निकाय पर विचार कीजिए। संप्रति हम समझ लेंगे कि उसके विभिन्न अंश परस्पर पूर्णपदीय प्रतिबंधों से ही युग्मित हैं। निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ f हैं। इसलिए किसी दिये हुए क्षण पर उसका स्थान निर्धारित करने के लिए f स्वतंत्र निर्देशांकों का उपयोग करा सकते हैं। इनको हम, जैसे कि पृ० ४९ पर,

$$(I) \quad q_1, q_2, \dots, q_f$$

कहेंगे। ये हुए हमारे स्थान निर्देशांक^४। इनके साथ हम “वेग निर्देशांकवृद्ध”

$$(Ia) \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$$

जोड़ देते हैं। ये \dot{q}_k और \dot{q}_k किसी क्षण निकाय की दशा को पूर्णतया विनिर्दिष्ट कर देते हैं।

1. Hertz 2. O. Holder (Gottinger Nachr. 1896).

3. Action integrals

*देखिए पृ० 204 की पाद-टिप्पणी।

4. Position coordinates

आइए, हम अपना कथन और भी अधिक स्पष्ट कर दें। धन नर के लिए निकाल को निम्नलिखित $n > f$ निर्देशकों को x_1, x_2, \dots, x_n द्वारा वर्णित होने दोलिए, जिसका निदिष्ट रूप में कार्यान्वित होना आवश्यक नहीं है। ममताएँ कि उनमें $n-f$ प्रतिबंध निम्नलिखित रूप के हों—

$$(2) \quad F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = f+1, f+2, \dots, n.$$

तो q_k को x_1, x_2, \dots, x_n के किसी फलन F_k की भाँति परिभाषित कर सकते हैं, अर्थात्

$$(2a) \quad F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, f.$$

अब x_1 के लिए F_k के आगत अवकलनों को F_k द्वारा सूचित कीजिए। तो t के लिए (2) और (2a) का अवकलन प्रदान करता है—

$$(2b) \quad \sum_{i=1}^n F_{ik}(x_1, \dots, x_n) \dot{x}_i = \begin{cases} \dot{q}_k, & k=1, 2, \dots, f; \\ 0, & k=f+1, \dots, n. \end{cases}$$

इससे \dot{x}_i को \dot{q}_k के संगे रैखिक फलनों की भाँति निकाल सकते हैं, जिनके गुणांक x_1, \dots, x_n पर, या (2) तथा (2a) के प्रभाव में, q_1, \dots, q_f पर निर्भर करें। तो गतिज ऊर्जा, T जो \dot{x}_i का समघात वर्गात्मक फलन है, ठीक वैसे ही जैसा कि वह होती, यदि प्रारंभ में कार्तीय निर्देशकों में व्यक्त की जाती, अब q_k का फिर समघात वर्गात्मक ऐसा फलन हो जायगी जिसके गुणांक q_k पर निर्भर करेंगे। इस समय हम स्वीकृत कर लेंगे कि स्थितिज ऊर्जा V केवल q_k ओं का ही फलन है, बिना मिश्रिततः में इस सम्भाव्यता का वर्जन किये ही कि आगे चलकर V को q_k का भी फलन कर सकते हैं। इस संबंध में अब आइए (33.13) के L की परिभाषा यह कहकर पूरी हो कर दे कि

L को q_k तथा \dot{q}_k का फलन समझा जायगा।

फिलहाल हम L के t पर मुख्यतया निर्भर करने की बात छोड़ देंगे।

इसी अर्थ में अब हम L के परिणमन को लिख देंगे, अर्थात् L की काल्पनिक परिणमित दशा $q_k + \delta q_k$, $\dot{q}_k + \delta \dot{q}_k$ और प्रारंभिक दशा q_k , \dot{q}_k का अंतर, जो होगा—

$$(3) \quad \delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \dots$$

यह परिणमन अब हैमिल्टन सिद्धांत में प्रयुक्त कराया जाता है, ज्यों —

$$(3a) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L \, dt = 0$$

इस रूप का (33.13) के रूप से भेद इस बात में है कि अब हमने परिणमन को समाकलन के चिह्न के भीतर लिख दिया है, जब कि पहले वह उसके बाहर रखा गया था। दोनों रूप, निस्संदेह, तुल्यात्मक हैं, उस कारण (33.1) के प्रभाव से जो कहता है कि t तथा dt परिणमित नहीं किये जाते। कुछ भी हो, समीकरण (3) सूत्रीकरण (33.10) से, जिसमें यह सिद्धांत पहले पहल आया था, संगत है।

अब हम (3) के द्वितीय यौग के व्यापक पद पर (3a) द्वारा इंगित समय के लिए समाकलन क्रिया करते हैं। बँसा करने के लिए एक आंशिक समाकलन द्वारा इस पद का रूप निम्नलिखित (4) में बदल देते हैं। यह एक ऐसा प्रक्रम है जो सारे परिणमन कलन के लिए यूलर के काल से लाक्षणिक है।

$$(4) \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \, dt$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \int_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \, dt.$$

इस युगल समानता के अंतिम अंग का प्रथम पद, (33.2) में दिये हुए प्रतिबंधों के कारण, शून्य हो जाता है। अतएव δL का पूर्ण व्यंजन (3) यह प्रदान करता है—

$$(4a) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k \, dt = 0.$$

अब δq_k परस्पर स्वतंत्र हैं। अतएव एक को छोड़ वे सबके सब शून्य किये जा सकते

व्यापकीकृत, (6) के प्रकार के समीकरण को विशेष-रूप से वर्णन करने के लिए किसी दी हुई परिणमन संबंधी समस्या के “यूलर समीकरण” वाक्य का व्यवहार करते हैं और ऐसी किसी समस्या में (4) तथा (5) से (6) का व्युत्पादन यूलर के समीकरण के व्युत्पादन के प्रतिरूपक है। अतएव कह सकते हैं कि लाग्रान्ज समीकरण फलन L द्वारा प्रभेदित परिणमनीय समस्या के यूलर समीकरण हैं।

है। इसको भी आ० ५१ (पृ० १८२) के “प्रक्षेप-ध्वज” पर एक स्थान के पड़ोस को छोड़कर अन्य सर्वत्र, या, जो कि वही बात हुई, किसी-भी समय t पर कालांतर Δt भर के लिए, शून्य कर सकते हैं। तो (4a) को पूरा करने के लिए अब आवश्यक हुआ कि

$$(5) \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \int_{\Delta t} \delta q_k dt = 0$$

परन्तु Δt परिमित है, और इस कालांतर में δq_k शून्य नहीं होता। अतएव किसी समय t और किसी सकेतांक k के लिए हम प्राप्त करते हैं

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

ये हैं व्यापकीकृत निर्वेशांकों के लिए लाग्रान्ज के समीकरणवृद्ध। इनको, अब तक जिस स्थिति पर विचार किया है उसके लिए विशिष्टीकृत, लाग्रान्ज के द्वितीय प्रकार के समीकरणवृद्ध भी कहते हैं। इस स्थिति में निकाय पर आरोपित बलों का विभव होता है तथा निकाय के आंतरिक प्रतिवधगण पूर्णपदीय होते हैं।

यदि इन अनुमानों में से एक या दूसरा न रहे तो हम इन समीकरणों के विस्तृत रूप पर पहुँचते हैं। अतः आगे हम दो स्थितियों पर विचार करेंगे।

प्रथम स्थिति यह है जिसमें बलवृद्ध विभव से व्युत्पन्न होने योग्य नहीं होते। उस स्थिति में हैमिल्टन के सिद्धांत का (33.II) वाला रूप हमारा आरंभस्थल होगा। आभासी विस्थापनों δq_k ओं के पदों में व्यक्त बाह्य बलों के आभासी कर्म δW पर विचार कीजिए, तो हम निम्नलिखित पर आते हैं:—

$$(7) \quad \delta W = \sum Q_k \delta q_k.$$

जिन गुणांकों Q_k का यहाँ उपयोग कराया गया है उन्हें निर्देशांकों q_k के संगी बल के व्यापकीकृत घटक कहेंगे। बल की धारणा का यह एक औपचारिक विस्तारण है, जिसे निस्संदेह उसकी गणितीय परिभाषा मान लेना अनुज्ञेय है। इसके अतिरिक्त यह बड़ा उपयोगी भी है। इस प्रकार अब (9.7) में दिये हुए किसी अक्ष के प्रतिबल के घूर्ण की परिभाषा का पुनःकथन यों कर सकते हैं—किसी बल का घूर्ण वह व्यापकीकृत बल है, जो सगत घूर्णन कोण का संगी है। स्पष्ट होगा कि (7) में परिभाषित राशियाँ Q_k का अब कोई सदिश लक्षण नहीं रहता, और न व्यापकता उनको अब डाइनो^१ की विमितियों वाले होने की आवश्यकता ही रह जाती है। इसका स्थान (7) से दीप्त जाता है कि उनकी विमितियाँ संगी q_k की विमिति

पर निर्भर करती है। अतएव, जैसा हम जानते हैं, बल के घनों की प्रिमिनियां हमें की प्रिमिनियां होंगी, अर्थात् वे ज्यों ही हों, स्थािर समी ∂q_k कोण है और का प्रिमितिहोन होने हैं।

तो यदि अब (33 II) में (7) का उपयोग करते और समीकरण (4) तथा (5) में इगित रूपान्तरणों को कर लें तो लाग्रान्ज (6) के स्थान में हम प्राप्त करेंगे

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

इसको कुछ अधिक व्यापक रूप में जो लिख सकते हैं—

$$(8a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

यह अधिकतर व्यापक इसलिए है कि अब हम उन स्थिति पर भी विचार कर सकते हैं जिसमें आरोपित बलों के कोई तो विभयों में व्युत्पन्न होने योग्य हैं, कोई नहीं। केवल इस बात की आवश्यकता होगी कि पदचोसन प्रकार के बलों के समग्र Q_k जो को भी (8a) के दक्षिण पार्श्व में लिख लें। तथा च (8a) के लाग्रान्जीय L को बनाने के लिए, पूर्वोक्त की स्थितिज ऊर्जा को गतिज ऊर्जा T में मयुक्त कर सकते हैं।

तब (8a) ऐसे बलों के लाग्रान्ज समीकरण हो जाते हैं जिनमें के कोई-कोई विभयों से व्युत्पन्न नहीं होते।

तो अब यदि पहले कहे हुए अनुमानों में से द्वितीय अनुमान का त्याग कर दें, अर्थात् यह स्वीकार कर लें कि निकाय के नियंत्रण कुछ जंश में अपूर्णपदीय हैं, तो q_k निर्देशांकों का प्रवेश अवर्ध हो जाता है। क्योंकि परिभाषा से ही अपूर्णपदीय प्रतिबंध (2) के रूप में नहीं रखे जा सकते और इसलिए q जो के उपयुक्त निर्वाचन से लुप्त नहीं किये जा सकते। तब हमें q ओं को अत्यधिक संख्या में प्रवेश कराना पड़ेगा, अर्थात् अत्यणु गति के लिए जितनी स्वतंत्रता - संख्याएँ चाहिए उनसे अधिक संख्या में। अत्यणु गति की स्वतंत्रता-संख्याएँ $f-r$ होती हैं, जहाँ f तो परिमित गति की स्वतंत्रता संख्याएँ हैं और r अपूर्णपदीय प्रतिबंधों की संख्या है। इन्हें अब समी० (7.4) जैसे रूप में, आभासी प्रतिबंधों की भाँति निम्नलिखित प्रकार लिख सकते हैं—

$$(9) \quad \sum_{k=1}^f F_k \mu(q_1, \dots, q_f) \delta q_k = 0, \mu = 1, 2, \dots, r.$$

वे अनुज्ञेय परिणमनों δq_k ओं पर निरोध का होना सूचित करते हैं। इस निरोध की विचार में इस भाँति लेते हैं कि समीकरणों (4_a) के प्रत्येक को एक लाग्रंजीय गुणक λ_μ से गुणा कर उन्हें (33 13) के समाकल के भीतर जोड़ देते हैं। तो F के जरा संक्षिप्ती-कृत संकेतन के साथ प्राप्त करते हैं —

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta L + \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu F_{k\mu} \delta q_k \right) dt = 0.$$

इसका यूलरीय रूपांतरण (4) की भाँति चलता है, जिससे (49) के स्थान में प्राप्त होता है

$$(10) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu F_{k\mu} \right) \delta q_k dt.$$

यहाँ ये δq_k परस्पर स्वतंत्र नहीं रहते वरन् संबंधों (9) द्वारा संबंधित होते हैं। परंतु पृ० ६७ की भाँति तर्क कर सकते हैं कि (10) के कोष्ठकावृत dq_k के गुणकों का r, λ_μ के समुचित निर्वाचन द्वारा शून्य किया जा सकता है। शेष वाले k पर किये गये योग में q_k ओ के केवल $f-r$ रह जाते हैं, जो सब परस्पर स्वतंत्र हैं। (5) के बाद की भाँति का युक्तितर्क अब हमें इस परिणाम पर विवश करता है कि शेष के कोष्ठकों को भी शून्य हो जाना चाहिए। तब हमें f समीकरणों का निम्नलिखित पूरा समुदाय प्राप्त हो जाता है—

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu F_{k\mu} \dots$$

इनका नामकरण हम 'लाग्रंज के मिश्रित प्रकार के समीकरण' कर सकते हैं, क्योंकि वे लाग्रंज के प्रथम और द्वितीय प्रकार के समीकरणों के आधो-आध बीच में पड़ते हैं।

कह देना चाहिए कि यह मिश्रित प्रकार न केवल तभी आता है जब कि कुछ प्रतिबंधों का निरसन करने में हम असमर्थ होते हैं (अपूर्णपदीय नियंत्रणों वाली स्थिति), वरन् तब भी जब निरसन करना चाहते ही नहीं। क्योंकि ऐसा हो सकता है कि हमारा उस नियंत्रण बल में स्वार्थ हो, जो कि एक पूर्णपदीय प्रतिबंध द्वारा निकाय पर पड़ता हो। यात यह निकलती है कि यह बल प्रस्तुत प्रतिबंध के समी- λ_μ द्वारा निह्पित

होता है [टोकर वंशे ही जंमे कि मोन्दोय लोकर नवयो समी० (18.7) में, और समी० (11) के समाकलन में प्राप्ति 21 माना है।

प्रकटनया उम स्थिति के लिए निम्नमे (6) के उतर कटे हुए दोनों अनुमानों का स्थान एक साथ ही कर दिया जाय, तब अनन (11) और (५.५) प्रकारा को मरुप्त कर सकते हैं।

ऐसा करने के बजाय हम अब मरुके बाद निम्नलिखित प्रश्न पर विचार करेंगे—कैसे ओर कोन में अनुमान करके ऊर्जा के औसतानाशय का निश्चा लाग्रान्ज समीकरण (6) में व्युत्पन्न किया जा सकता है ?

जैसा कि पहले ही, समी० (3) के ऊपर, जोर देकर कहा जा चुका है, L , q_k और \dot{q}_k ओ का फलन है। पहले की भाँति हमारी यह भी अभियानना है कि L में मुख्यतया न समाया हो। उम स्थिति में समी० (3) वैध है न केवल आभासी परिवर्तनों δq , $\delta \dot{q}$ के लिए, यरन् दीर्घकालिक परिवर्तनों dq , $d\dot{q}$ के लिए भी; और इसलिए

$$(12) \quad \frac{dL}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_k q_k \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

हमारी ओर वही पर हमने यह भी जोर देकर कहा था कि T उमी \dot{q}_k का समाग वर्गात्मक फलन * है। अतएव समाग फलनों के लिए निम्नलिखित पूलर नियम का अनुप्रयोग किया जा सकता है—

$$(13) \quad 2T = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

(*) यदि ऐसा न भी हो, और उसके स्थान पर L को उन्हीं q_k तथा \dot{q}_k का कोई वांछित फलन मान लिया जाय, तो भी निम्नलिखित रूप का एक व्यापकीकृत अविनाशित्व नियम दिया जा सकता है। रूप है— $H = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{नियत}$ ।

इस प्रकार परिभाषित फलन H को हम अध्याय आठ में “हैमिल्टनिय” कहेंगे। समीकरण (15C) में समाया हुआ अविनाशित्व नियम इसी समीकरण की एक विशेष स्थिति है।

समय के लिए इसका अवकलन प्रदान करता है :

$$(14) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \ddot{q}_k}.$$

अब (12) को (14) से घटा देते हैं। $L = T - V$ होने के कारण, बायाँ अंग निम्नलिखित हो जाता है —

$$\frac{dT}{dt} - \frac{dV}{dt}$$

दाहिनी ओर द्वितीय पद कट जाते हैं, बशर्ते कि V स्वतंत्र है \dot{q}_k से। उस स्थिति में, समी० (6) के द्वारा दायी ओर के पहले पद भी कट जाते हैं, जिस कारण हम प्राप्त करते हैं

$$(14a) \quad \frac{dT}{dt} - \frac{dV}{dt} = 0.$$

इससे हम परिणाम निकालते हैं —

$$(15) \quad T + V = E,$$

अतएव ऊर्जा के अविनाशित्व वाला नियम लाप्राज के समीकरणों का परिणाम है।

तो अब उन अनुमानों की जाँच करनी चाहिए जिनसे हम इस महत्वपूर्ण परिणाम पर पहुँचते हैं।

(क) T के अर्थ से कह सकते हैं कि गतिज ऊर्जा निकाय के स्थान और वेग से, अतएव q और \dot{q} से, निर्धारित होती है। T का t पर मुख्यतया निर्भर करना, नियंत्रणों के समीकरणों के निरसन के परिणामवश ही हो सकता है, यदि ये नियंत्रण t पर निर्भर करें*। अब पृ० ९२ पर पहले ही देखा चुके हैं कि इस प्रकार के नियंत्रण निकाय पर अवश्य काम करते हैं और इसलिए ऊर्जा के अविनाशित्व में गड़बड़ी डाल देते हैं। तो अविनाशित्व की वैधता के लिए अत्यावश्यक है कि T में t मुख्यतया न समाया हुआ हो।

(*) ऐसे समय-निर्भर प्रतिबंधों को कभी-कभी धारात्मक (तरल) कहते हैं। इसके प्रतिकूल, समय-स्वतंत्र प्रतिबंध भी होते हैं जिन्हें कभी स्थिर या स्थित, बुद्ध) कहते हैं।

(ख) अतएव यह अनुमान कि L सुव्यक्ततया t पर न निर्भर करे, इस अनुमान पर पहुँचाता है कि V स्वतंत्र हो t से। यह प्रतिवध भी आवश्यक है। अन्यथा, समी० (12) के दक्षिण पार्श्व से निम्नलिखित पद का योग करना होगा।

$$-\frac{\partial V}{\partial t}$$

तब यह पद विपरीत चिह्न के साथ समी० (14a) के दावे अग में फिर प्रकट होगा।

और तब $T+V=\text{नियत}$ के स्थान पर हम

$$(15a) \quad \frac{d}{dt} (T+V) = \frac{\partial V}{\partial t}$$

प्राप्त करेंगे। अर्थात् ऊर्जा की अविनाशिता का नियम अवैध हो जायगा।

(ग) मान लीजिए कि V न केवल q_k पर किंतु \dot{q}_k पर भी निर्भर करता है। (6) की सहायता से (14) और (12) के दक्षिणांगों का अंतर निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$(15b) \quad \sum q_k \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} + \sum q_k \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \sum q_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}$$

यह स्थिति अविनाशित्व नियम को पहुँचाती तो अवश्य है परंतु उसका निम्नलिखित अपरिचित रूप है

$$(15c) \quad T+V - \sum \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \text{नियत।}$$

ऊपर दी हुई बातों से एक और परिणाम निकाला जा सकता है जो आगे चलकर उपयोगी होगा। $2T$ के लिए पदपुंज (13) के उपयोग से तथा इस अनुमान पर पलटकर कि V , केवल q_k ओं का ही फलन है, यदि

$$L - 2T = -(T+V)$$

का परिकलन करें तो हम निम्नलिखित पर पहुँचते हैं

$$-(T+V) = L - \sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = L - \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

या

$$(16) \quad T+V = \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

अर्थात्, पूर्ण ऊर्जा $T+V$ लाप्रांजोय के पदपुंज से परिकलित की जा सकती है।

इस प्रकरण के किंचित् जमूत विकासनों में आगामी प्रकरण के उदाहरणों द्वारा जीवन का संचार हो जायगा। उनकी तैयारी में (6) में आये हुए

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ तथा } \frac{\partial L}{\partial q_k},$$

इन दो व्यंजनों का, सरलतम स्थिति अर्थात् एक पृथक्कृत संहति-विन्दु को कार्तीय निर्देशांकों x, y, z में व्यक्त गति के लिए विनिष्टीकरण कर लेंगे। हमें प्राप्त है—

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \text{ इत्यादि};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = X, \text{ इत्यादि}$$

कारण कि इस समीकरण के अनुसार, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ पूर्ण के x -निर्देशांकों को निरूपित

करता है, हम, विलकुल व्यापकतया $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ को q_k से संबंधित व्यापकीकृत पूर्ण का

घटक कहेंगे। और कारण कि दूसरी ओर, $\frac{\partial L}{\partial x}$ बल का x -घटक प्रस्तुत करता

है, $\frac{\partial L}{\partial q}$ से निकले हुए दो पदों को व्यापकीकृत बल के q -घटकद्वय का नाम देंगे,

$$(17) \quad \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} - Q.$$

Q एक बाह्य बल है, जैसे कि समी० (7) में, और $\frac{\partial T}{\partial q}$ एक बनावटी लाप्रांज बल

है जो इस पर निर्भर करता है कि q -घटक किस प्रकार स्थान के साथ परिणमन करता है। कार्तीय निर्देशांकों x, y, z के लिए, जहाँ नियत q के वक्र परस्पर समांतर हैं, कोई दिया हुआ q_i स्वतंत्र होगा q_k से ($k \neq i$) और बनावटी बल शून्य हो जायगा।

§ ३५. लाग्रांज समीकरणों के उपयोग-प्रदर्शक उदाहरण

लाग्रांज अनुष्ठान की श्रेष्ठता दिखलाने के लिए ऐसे उदाहरण चुने गये हैं जो पहले भी प्रारम्भिक विधियों में लिये गये थे ।

(१) वृत्तजात लोलक^१

यहाँ प्रत्यक्ष निर्देशांक q वह कोण है जो आ० २६ (पृ० ९४) में वृत्तजातो के जनयिता पहिये का घूर्णन-कोण है। इस कोण के पदों में व्यक्त कार्तीय निर्देशांक, समी० (१७२) के अनुसार ये हैं—

$$x = a(\phi - \sin \phi), \quad \dot{x} = a(1 - \cos \phi) \dot{\phi};$$

$$y = a(1 + \cos \phi), \quad \dot{y} = -a \sin \phi \dot{\phi}.$$

इनसे हम परिकलन करते हैं कि

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = ma^2(1 - \cos \phi)\dot{\phi}^2,$$

$$V = mgy = mga(1 + \cos \phi),$$

$$(1) \quad L = ma^2(1 - \cos \phi)\dot{\phi}^2 - mga(1 + \cos \phi)$$

बस इतना ही प्रस्तुत निकाय की ज्यामिति और यांत्रिकी के बारे में जानने की आवश्यकता है; शेष को लाग्रांज अनुष्ठान अपने आप संभाल लेता है—

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 2ma^2(1 - \cos \phi)\dot{\phi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ma^2 \sin \phi \dot{\phi} + mga \sin \phi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2ma^2(1 - \cos \phi)\ddot{\phi} + 2ma^2 \sin \phi \dot{\phi}^2.$$

या, अवकल समीकरण (३४६) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$(1 - \cos \phi)\ddot{\phi} + \frac{1}{2} \sin \phi \dot{\phi}^2 = \frac{g}{2a} \sin \phi.$$

अर्धकोण का प्रवेश और $2 \sin \frac{1}{2} \phi$ से भाग, इसको निम्नलिखित रूप में सरल बना देता है

$$(2) \quad \sin \frac{\phi}{2} \ddot{\phi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{g}{2a} \cos \frac{\phi}{2}.$$

सहज ही में सत्यापित कर सकते हैं कि बायाँ अंग

$$-2 \frac{d^2}{dt^2} \cos \frac{1}{2} \phi$$

के बराबर है। अतएव प्रस्तुत अवकल समीकरण (2) पहले वाले समी० (17.6) से सर्वसम है, जिसके द्वारा वृत्तजातीय लोलक का निर्दोषतया तुल्यकालिक व्यवहार हम सिद्ध कर सके थे।

(२) गोलीय लोलक

यहाँ कोणद्वय, θ और ϕ क्रमशः 1 त्रिज्या वाले गोले पर ध्रुवीय कोण और भौगोलिक रेखाश, संक्षिप्त-बिंदु के बिये हुए निर्देशांक हैं। रेखा अल्पांश है—

$$ds^2 = l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta, d\phi^2);$$

अतएव गतिज ऊर्जा निम्नलिखित होगी

$$T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2);$$

जैसे (18.5a) में, स्थितिज ऊर्जा होगी

$$V = mgl \cos \theta;$$

और इसलिए

$$(3) \quad L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgl \cos \theta.$$

और अब लाग्रान्ज नमूने का यंत्रवत् परिकलन चल पड़ता है। अचर गुणनखंडों से भाग देने के उपरांत, θ तथा ϕ के अवकल समीकरण निम्नलिखित होंगे

$$(4) \quad \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0.$$

इनमें का द्वितीय समीकरण (18.8) से सहमत, क्षेत्रफलीय वेग के अविनाशित्व वाला नियम है। देखिए कि यहाँ हम उस परिकलन को बचा गये हैं जो पहले दो हुई विवृति में इत समीकरण के पहले आवश्यक रूप से दिया गया था। समी० (18.8) के

क्षेत्रफलीय वेगांक C की सहायता से समीकरणों (4) का प्रथम यों लिखा जा सकता है—

$$\ddot{\theta} = \frac{C^2 \cos \theta}{l^3 \sin^3 \theta} + \frac{g}{l} \sin \theta .$$

वक्षिण पार्श्व का द्वितीय पद गुरुत्वाकर्षी ऐंठ

$$|L| = mgl \sin \theta ,$$

के तुल्य है, जो (34.7) के भाव में कोण $\alpha = \theta$ के सगो बल का व्यापकीकृत घटक है। प्रथम पद (34.17) के भाव में एक वनावटी लाग्रांज बल है। इस बल का उद्गम यह तथ्य है कि गोले पर जिन रेखाओं पर कोण θ मापा जाता है, वे समांतर नहीं जातीं वरन् ध्रुव से अपसरित होती हैं।

यह शिक्षाप्रद होगा कि इस उदाहरण में लाग्रांज समीकरणों के उस विस्तरण का अनुप्रयोग किया जाय, जिसके लिए समी० (34.11) में, θ तथा ϕ के साथ आधिक्य-निर्देशांक r का प्रवेश करा, तैयारी की गयी थी। अब, अवश्यमेव, r संबंध $r=l$ द्वारा निश्चित है। फिर भी इस निर्देशांक में हमारी अभिरुचि इसलिए है कि गुणक λ द्वारा वह हमें गोले के तल पर सहति-बिंदु का दाव, या, जो कि वही बात है, लोलक की अवलंबन रज्जु में का तनाव, प्रदान करेगा। प्रसंगानुकूल अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए केवल (3) के स्थान पर

$$(5) \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) - mgr \cos \theta$$

रखकर निम्नलिखित एक तीसरा लाग्रांज समीकरण बनाने की आवश्यकता है जो (4) के दो समीकरणों के साथ जोड़ दिया जाय

$$(6) \quad \frac{d}{dt} mr - mr \dot{\theta}^2 - mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + mg \cos \theta = \lambda r.$$

समी० (34.11) में आयी हुई राशि $F_\lambda \cdot \mu$ को हमने r के बराबर रख दिया है, क्योंकि समी० (18.1) से सहमत होने के लिए हमने प्रतिबंध $r=l$ को निम्नलिखित रूप में लिख दिया है

$$F = \frac{1}{2} (r^2 - l^2) = 0$$

$$(2) \quad \sin \frac{\phi}{2} \ddot{\phi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{g}{2a} \cos \frac{\phi}{2}.$$

सहज ही में सत्यापित कर सकते हैं कि वायाँ अंग

$$-2 \frac{d^2}{dt^2} \cos \frac{1}{2} \phi$$

के बराबर है। अतएव प्रस्तुत अवकल समीकरण (2) पहले वाले समी० (17.6) से सर्वसम है, जिसके द्वारा वृत्तजातीय लोलक का निर्दोषतया तुल्यकालिक व्यवहार हम सिद्ध कर सके थे।

(२) गोलीय लोलक

यहाँ कोणद्वय, θ और ϕ क्रमशः l त्रिज्या वाले गोले पर ध्रुवीय कोण और भौगोलिक रेखांश, संहति-बिंदु के दिये हुए निर्देशांक हैं। रेखा अल्पात है—

$$ds^2 = l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta, d\phi^2);$$

अतएव गतिज ऊर्जा निम्नलिखित होगी

$$T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2);$$

जैसे (18.5a) में, स्थितिज ऊर्जा होगी

$$V = mgl \cos \theta;$$

और इसलिए

$$(3) \quad L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgl \cos \theta.$$

और अब लाग्रान्ज नमूने का यंत्रवत् परिकलन चल पड़ता है। अचर गुणनखंडों से भाग देने के उपरांत, θ तथा ϕ के अवकल समीकरण निम्नलिखित होंगे

$$(4) \quad \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0.$$

इनमें का द्वितीय समीकरण (18.8) से सहमत, क्षेत्रफलीय वेग के अविनाशित्व वाला नियम है। देखिए कि यहाँ हम उस परिकलन को बचा गये हैं जो पहले दी हुई विवृति में इस समीकरण के पहले आवश्यक रूप से दिया गया था। समी० (18.8) के

क्षेत्रफलीय वेगाक C की सहायता से समीकरणों (4) का प्रथम यों लिखा जा सकता है—

$$\ddot{\theta} = \frac{C^2 \cos \theta}{l^3 \sin^3 \theta} + \frac{g}{l} \sin \theta .$$

दक्षिण पार्श्व का द्वितीय पद गुरुत्वाकर्षण ऐंठ

$$|L| = mgl \sin \theta ,$$

के तुल्य है, जो (34.7) के भाव में कोण $\phi = 0$ के सगी बल का व्यापकीकृत घटक है। प्रथम पद (34.17) के भाव में एक बनावटी लाग्रांज बल है। इस बल का उद्गम यह तथ्य है कि गोले पर जिन रेखाओं पर कोण θ मापा जाता है, वे समांतर नहीं जाती बरन् ध्रुव से अपसरित होती हैं।

यह शिक्षाप्रद होगा कि इस उदाहरण में लाग्रांज समीकरणों के उस विस्तारण का अनुप्रयोग किया जाय, जिसके लिए समी० (34.11) में, θ तथा ϕ के साथ आधिक्य-निर्देशांक r का प्रवेश करा, तैयारी की गयी थी। अय, अवश्यमेव, r सवध $r=l$ द्वारा निश्चित है। फिर भी इस निर्देशांक में हमारी अभिरुधि इसलिए है कि गुणक λ द्वारा वह हमें गोले के तल पर सहति-बिन्दु का दाब, या, जो कि वही दाब है, लोलक की अवलवन रज्जु में का तनाव, प्रदान करेगा। प्रसगानुकूल अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए केवल (3) के स्थान पर

$$(5) \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgr \cos \theta$$

रखकर निम्नलिखित एक तीसरा लाग्रांज समीकरण बनाने की आवश्यकता है जो (4) के दो समीकरणों के साथ जोड़ दिया जाय

$$(6) \quad \frac{d}{dt} m\dot{r} - m\dot{r}\dot{\theta}^2 - m\dot{r}\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + mg \cos \theta = \lambda r .$$

समी० (34.11) में आयी हुई राशि F_λ μ को हमने r के बराबर रख दिया है, क्योंकि समी० (18.1) से सहमत होने के लिए हमने प्रतिबंध $r=l$ को निम्नलिखित रूप में लिख दिया है

$$F = \frac{1}{2} (r^2 - l^2) = 0$$

यदि $r=l$ और $\dot{r}=\ddot{r}=0$ कर ले तो (6) से परिणाम निकलता है

$$(7) \quad \lambda l = mg \cos \theta - ml(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2).$$

यह (18.6) से सहमत है यदि वहाँ समकोणीय निर्देशांकों को θ, ϕ में रूपान्तरित कर लें। लाग्रेंज की व्यवस्था से ऐसे परिकलन से हम एक बार फिर बच जाते हैं।

(३) युगल लोलक

यहाँ आकृति ३८ (पृ० १५०) कोणद्वय ϕ तथा ψ उपयुक्त निर्देशांक गण ५६ हैं। § 21 के सकेतन में लिखते हैं

$$(8) \quad \begin{aligned} X &= L \sin \phi, & x &= L \sin \phi + l \sin \psi, \\ Y &= L \cos \phi, & y &= L \cos \phi + l \cos \psi. \end{aligned}$$

इनसे निम्नलिखित बिल्कुल ठीक संबंध प्राप्त करते हैं

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{M+m}{2}L^2\dot{\phi}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\psi}^2 + mLl \cos(\phi-\psi)\dot{\phi}\dot{\psi}, \end{aligned}$$

$$V = -MgY - mgy = -(M+m)gL \cos \phi - mgl \cos \psi.$$

अंतिम पदपुंज का चिह्न ऋणात्मक है, क्योंकि Y तथा y गुरुत्व बल की दिशा में धनात्मक लिये गये हैं। यहाँ $T-V$ द्वारा बने हुए लाग्रेंजीय को Λ लवदा ग्रीक अक्षर कहेंगे, क्योंकि L लोलक अवलंबन की लंबाई के लिए लिया गया है। तो निम्न लिखित प्राप्त करते हैं —

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = (M+m)L^2\dot{\phi} + mLl \cos(\phi-\psi)\dot{\psi},$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} = ml^2\dot{\psi} + mLl \cos(\phi-\psi)\dot{\phi},$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = -(M+m)gL \sin \phi - mLl \sin(\phi-\psi)\dot{\psi},$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} = -mgl \sin \psi + mLl \sin(\phi-\psi)\dot{\phi}.$$

इन संबंधों से लाघ्राज समीकरणों को लिग डालने के लिए हम तुरंत ही ϕ तथा ψ को अल्पराशियाँ मान लेंगे। तो ϕ और ψ भी उन्ही प्रकार के परिमाण की राशियाँ होंगी जैसे कि ϕ और ψ , अतएव उनके वर्गफलों की उपेक्षा कर सकते हैं। तो प्रस्तुत समीकरण निम्नलिखित होंगे

$$(9) \quad \begin{aligned} L \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \phi &= -\frac{m}{M+m} \frac{l}{L} \ddot{\psi}, \\ \ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi &= -\frac{L}{l} \phi. \end{aligned}$$

ये समीकरणों (21.3) के सर्वसम हैं, केवल इन यान की आवश्यकता है कि निर्देशांक-कोणों ϕ ψ से निर्देशांक-दूरियों X, x को चला जाना होगा। इसके लिए रूपांतरण समीकरणों (8) का उपयोग करेंगे, जो अल्प ϕ, ψ के लिए निम्नलिखित में सरलीकृत हो जाते हैं

$$\phi = \frac{X}{L}, \psi = \frac{x-X}{l}.$$

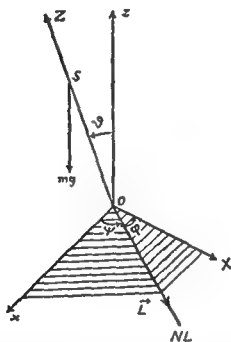
समीकरणों (9) तथा (21.3) के द्वितीय समीकरणों के लिए सर्वसमता तो प्रत्यक्ष है। प्रथम समी० (9) और प्रथम समी० (21.3) के लिए भी यह सच है, वदार्त कि दक्षिणी अग में ψ के लिए उसका द्वितीय समी० (9) में का मान प्रतिस्थापित कर ले। अतएव दोलन प्रक्रिया का (21.3) के बाद दिया हुआ विवेचन प्रस्तुत समीकरणों (9) पर तुरंत ही लागू है और यहाँ दोहराने की आवश्यकता नहीं।

विषय समाप्त करने के पहले हम जोर देकर कह देना चाहते हैं कि प्रस्तुत औपचारिक विवृति में केवल लोलक रज्जु l में के तनाव की कोई चर्चा नहीं की गयी है। जैसा कि १५० पृ० पर दी हुई पाद-टिप्पणी में पहले ही कह आये हैं, लाघ्राज के गति-समीकरणों में यह तनाव निकाय की आंतरिक प्रतिक्रियाओं की भाँति अंतर्निहिततया समायो हुआ है।

(४) भारी संमति लट्टू'

इस समस्या के चिरसम्मत निर्देशांकगण q_1 यूलरीय कोणत्रय θ, ϕ तथा ψ हैं (0 और ϕ पहले ही (25.4) और (26.5a) में प्रस्तुत किये जा चुके हैं)।

उनकी तथा उनके संगत कोणीय वेगों की हम निम्नलिखित आकृति द्वारा व्याख्या करेंगे



आकृति ५२. यूलरीय कोणों θ , ϕ , ψ तथा उनके भाव की व्याख्या ।
 z =ऊर्ध्वाधर; Z =लट्टू का अक्ष; x =आकाश में स्थित क्षैतिज रेखा; X =लट्टू में स्थित, उसके निरक्षीय समतल में रेखा) । अक्षों का इस प्रकार का अंकन पु० १३९ पर प्रवेशित निर्देशांकों की प्रणाली के अनुरूप है

१. θ ऊर्ध्वाधर और लट्टू के अक्ष के बीच का कोण है; θ पात-रेखा' के प्रति का कोणीय वेग है । पात-रेखा इन दोनों दिशाओं से लंबवत् है ।

२. ψ वह कोण है जो पात-रेखा, क्षैतिज समतल में एक निश्चित दिशा, जैसे कि x -अक्ष, के साथ बनाती है; ψ ऊर्ध्वाधर के चारों ओर का कोणीय वेग है ।

३. ϕ वह कोण है जो पात-रेखा लट्टूके निरक्षीय समतल में एक निश्चित दिशा, जैसे कि X -अक्ष, के साथ बनाती है; $\dot{\phi}$ लट्टू के सम्मिति-अक्ष के प्रति का कोणीय वेग है।

ये $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ कोणीय वेग सदिश ω के पूर्णपदीय परंतु वक्रोप घटक हैं, न कि ω_1 , ω_2 , ω_3 जो कि घूर्णनवेग के ऋजुरेखीय परंतु अपूर्णपदीय घटक थे। नीचे दी हुई सारणी (10) दोनों घटक-जुटों के बीच की दैशिक कोज्याएँ दिखलाती है। सारणी $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ के घूर्णन का नाव भी देती है (दक्षिणावर्त पेच वाला कायदा) —

	$\dot{\theta}$	$\dot{\phi}$	$\dot{\psi}$
(10) ω_1	$\cos \phi$	0	$\sin \theta \sin \phi$
ω_2	$-\sin \phi$	0	$\sin \theta \cos \phi$
ω_3	0	1	$\cos \theta$

प्रथम दो स्तंभ तो १ तथा ३ में जो कुछ कहा था उससे प्रत्यक्ष प्रकार से निकल आते हैं। तीसरे स्तंभ को समझने के लिए, देखिए कि ऊर्ध्वाधरतया लक्ष्य करते हुए सदिश $\dot{\psi}$ का निरक्षीय समतल में प्रक्षेप $\dot{\psi} \sin \theta$ है। अपनी पारी में यह सदिश निरक्षीय समतल में ω_1 तथा ω_2 के सामने दिये हुए दो घटकों में खंडित होता है, अर्थात् क्रमशः $\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi$ और $\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi$ में।

देखिए कि प्रस्तुत सारणी, §2 में दी हुई अनुसूचियों से असदृश, केवल बायें से दायें को ही पढ़ी जा सकती है, ऊपर से नीचे नहीं। उसकी पक्तियों से अब हम प्राप्त करते हैं :—

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \cos \phi \dot{\theta} + \sin \theta \sin \phi \dot{\psi}, \\
 \omega_2 &= -\sin \phi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \phi \dot{\psi}, \\
 \omega_3 &= \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi}.
 \end{aligned}$$

और (II) के प्रथम दो से

$$(IIa) \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2.$$

अब $I_2 = I_1$ रखकर, पदपुंज (26.17) निम्नलिखित हो जाता है

$$(12) \quad T = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + \frac{I_2}{2} (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi})^2.$$

गुरुत्वाकर्षण स्थितिज ऊर्जा V के लिए समी० (25.6 a) के प्रभाव से प्राप्त करते हैं

$$(13) \quad L = T - V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + \frac{I_2}{2} (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi})^2 - P \cos \theta,$$

$$P = mgs.$$

अतएव L स्थान-निर्देशांको ϕ और ψ से स्वतंत्र है और केवल उनके समय के साथ के परिवर्तन पर निर्भर करता है। कहते हैं कि ϕ और ψ चक्रीय (cyclic) निर्देशांक हैं। इस नाम की उत्पत्ति घूर्णनयुक्त पहिये के गत्यात्मक व्यवहार से हुई (संस्कृत में पहिया=चक्र, जिससे चक्रीय बना, ग्रीक $kuk\lambda o o$ से निकला)। यह व्यवहार पहिये के क्षणिक स्थान से नहीं उसके परिक्रमण की चाल से निर्धारित होता है। अतएव

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0.$$

तो लैग्रान्ज के समीकरणों में राशियों

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \text{और} \quad \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

के समय-अवकलजों को शून्य हो जाना चाहिए। पिछले प्रकरण के अंत में हमने इन राशियों को ϕ तथा ψ के सगी व्यापकीकृत घूर्णवृंद कहा था। यहाँ से आगे उन्हें p द्वारा सूचित करेंगे। तो व्यापकतया लिखेंगे

$$(14) \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

अब दृढ़तापूर्वक कह सकते हैं कि यदि निर्देशांकवृंद q_k चक्रीय हों तो चक्रीय निर्देशांकों के सयुग्म घूर्णवृंद p_k गति के समाकल (अर्थात् समाकलन वृंद) हैं। प्रस्तुत स्थिति में इन नियतांकों की गरिमा पृ० १८३ के (25.6) से हम पहले ही से जानते हैं। तो

$$(15) \quad p_\phi = M''; \quad p_\psi = M'$$

पहले पृ० १८८ पर, लट्टू के स्थान-निर्देशकों के पदों में इन नियताकों के व्यंजनों की कमी थी। ये अब व्यापक कायदे (14) के अनुप्रयोग से व्युत्पन्न किये जा सकते हैं—

$$(16) \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_3 (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi})$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_1 \sin^2 \theta \dot{\psi} + I_3 \cos \theta (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi})$$

(15) और (16) का संयोग परिणाम देता है—

$$(17) \quad \left. \begin{aligned} \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi} &= \frac{M'}{I_3}, \\ I_1 \sin^2 \theta \dot{\psi} &= M' - M' \cos \theta. \end{aligned} \right\}$$

समीकरण (17) लाग्रांज समीकरणों में से दो की अतवस्तु खाली कर देते हैं। तीसरा लाग्रांज समीकरण p_θ की परिवर्तन-दर व्यक्त करता है—

$$(18) \quad p_\theta \text{ की परिवर्तन दर} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta},$$

और यदि $\dot{\phi}$ तथा $\dot{\psi}$ के निरसन के लिए (17) का उपयोग करे तो निम्नलिखित हो जाता है

$$(19) \quad I_1 \dot{\theta} = \frac{(M' - M' \cos \theta)(M' \cos \theta - M'')}{I_1 \sin^3 \theta} + p \sin \theta,$$

दक्षिणाग θ , जो $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ से आता है, न केवल वह गुरुत्वाकर्षण प्रभाव समाया हुआ है

जिससे हम (25-4) द्वारा परिचित हैं, वरन् उसके अतिरिक्त एक बनावटी बल भी समाया हुआ है, जो व्यवहृत निर्देशांक-प्रणाली की प्रकृति का परिणाम है, जैसा कि हम पृष्ठ २५८ से जानते हैं।

समी० (19) में व्यापकीकृत लोलक समीकरण का गुण है। उसके समाकलन पर रुकने की आवश्यकता नहीं, क्योंकि हम ऊर्जा

$$(20) \quad T + V = E$$

का समाकल ले सकते हैं, जो (19) के प्रथम समाकल के परिणाम से सर्वसम होगा।

आइए एक बार फिर (17) की सहायता से समी० (12) की $\dot{\phi}$ तथा $\dot{\psi}$ राशियों का निरसन करें। तो (20) प्रदान करता है

$$(21) \quad \frac{I_1}{2} \left\{ \dot{\theta}^2 + \left(\frac{M' - M'' \cos \theta}{I_1 \sin \theta} \right)^2 + \frac{M''^2}{2I_3} + P \cos \theta \right\} = E$$

यतः समी० (21) के तीन समाकलाक M' , M'' तथा E हैं अतः लट्टू की समस्या के लिए वह प्रथम कोटि का व्यापक समाकल होगा। अंत में, जैसे कि § 18 में गोलीय लोलक के लिए 0 और $\dot{\theta}$ को

$$\cos \theta = u; \quad \dot{\theta} \sin \theta = \dot{u}$$

से प्रतिस्थापित कर लेते हैं। तो हम प्राप्त करते हैं

$$(22) \quad \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = U(u)$$

जहाँ

$$(23) \quad U(u) = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{M'}{I_1 I_3} - \frac{2P}{I_1} u \right) (1 - u^2) - \left(\frac{M' - M'' u}{I_1} \right)^2,$$

यतः $U(u)$ है u में तृतीय घात का बहुपदी^१, समय t प्रथम प्रकार के दीर्घ-वृत्तीय समाकल द्वारा दिया जाना चाहिए, जैसे कि गोलीय लोलक की स्थिति में। अर्थात्

$$(24) \quad t = \int \frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

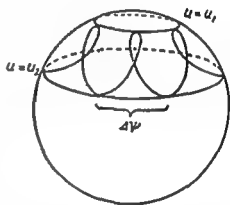
दिगंश कोण^२ ψ समी० (17) से तृतीय प्रकार के दीर्घवृत्तीय समाकल द्वारा दिया जाता है (देखिए पृ० १३५)। इस प्रकार

$$(25) \quad \psi = \int \frac{M' - M'' u}{I_1 (1 - u^2)} \frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}$$

अब पृ० १३३ की आ० २९ के बाद दिये विचारों को दोहरा सकते हैं और आ० ५३ के प्रतिरूप पर पहुँचते हैं। लट्टू के अक्ष का मात्रक गोले पर अनुरेखण^३ अक्षांश $u = \mu$

तथा $u = u_2$ वाले दो वृत्तों के बीच, उनको स्पर्श करता हुआ, आगे पीछे दोलित होता है। स्पर्शता बिंदुओं पर, जैसा कि आ० ५३ में दिखाया है, अनुरेखण या तो केवल (स्पर्श करता हुआ) निकल जाता है या एक फटा बना देता है; फटा निश्चिताग्र^१ में भ्रष्ट हो सकता है। प्रत्येक दोलन में लट्टू का अक्ष (सदैव) उसी दिगंश कोण $\Delta\psi$ से आगे बढ़ता है जो, (18.15) के सद्ग, समी० (25) से तृतीय प्रकार के एक पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकलन से प्राप्त होता है।

एक विशेष बात यह कि यदि लट्टू ऊर्ध्वाधर के प्रति एक सम पुर सरण करता है तो आवश्यक है कि समांतर वृत्तद्वय u_1 तथा u_2 एक ही में मिल जायें। उस स्थिति में आ० २९ (पृ० १३३) के वक्र $U(u)$ को भुजाक्ष^२ का नीचे से स्पर्श करना होगा। इससे ज्ञात होता है कि भारी लट्टू का समपुर.सरण गति का एक विशेष रूप है (परंतु जब कि बलो द्वारा अनियमित लट्टू के लिए वह गति का व्यापक रूप होता है)।



आकृति ५३. मात्रक त्रिज्या के गोले पर भारी समित लट्टू के अक्ष का अनुरेखण

यदि दोनों मूल u_1 और u_2 बिल्कुल ठीक सपाती न हों, केवल सन्निकटतया ही हों, तो अब भी ऐसा ही जान पड़ता है कि ऊर्ध्वाधर के चारों ओर लट्टू का अक्ष समभाव से ही आगे बढ़ रहा है। परंतु ठीक-ठीक परीक्षा करने पर हम देखेंगे कि इस आगे बढ़ने पर छोटे-छोटे अक्ष-विक्षलन अध्यारोपित हैं, जिनके कारण वह होता है जिसे "छद्म-सम पुर सरण" कहा था। लट्टूओं के साधारण प्रयोगों में इसी प्रकार की घटना लाक्षणिकतया देखी जाती है। साधारणतया उसके किनारे पर लपेटी डोरी को शीघ्रतापूर्वक खींचकर, लट्टू के अक्ष के चारों ओर जितना बड़ा हो सकता है उतना बड़ा कोणीय सवेग प्रदान कर, उसे उसकी नोक पर एक सकोटर पात्र^३ में अति सावधानी से रख देते हैं कि उसकी गति को कोई बोधगम्य पार्श्विक आवेग न लगे।

इस व्यवहार को यां समझाया जाता है कि ऐसे प्रयोग में आदि का कोणीय संवेग M , सम्मति-अक्ष के पास होता है। यही बात प्रारंभ के पूर्णन-अक्ष के लिए पूर्वांश विधि से भी निकलती है। अतएव पूर्णन-अक्ष पहले तो आकृति ४३ के मायक गोले पर एक छोटे से परिपथ की रचना करता है। इस परिपथ को स्पर्श करते हुए समांतर वृत्तद्वय, $II=II_1$ तथा $II=II_2$ आस-पास के पड़ोसी हैं और सारी गति भर में पास-पास ही रहते हैं, जैसा कि आ० ५३ के व्यापक चित्रण से देखा जा सकता है। कोणीय संवेग (मोमेंट) और इस लिए कोणीय वेग (वेलांसिटी) भी पहले अत्यधिक होते हैं और, घर्षणवृत्त हानियों को छोड़कर, वे भी गति भर में अपरिवर्तित रहते हैं। अतएव अक्षविचलन बहुत ही द्रुत और प्रायः दृष्टि-अगोचर रहते हैं। लट्ठू गुल्ल बल से प्रभावित होने में बहुत ही अर्ध दिखलाता-सा जान पड़ता है; उसके स्थान पर सतततया गुह्यवाक्येण के बल के समकोण "पार्श्वगमन" करता रहता है। यही वह मिथ्याभासी व्यवहार है जिसने शताब्दियों से अनुरागी (एनेम्बूर) एव प्रवीण (प्रोफेशनल) दोनों ही प्रकार के जिज्ञासुओं का चित्त नृत्यमान लट्ठू के सिद्धांत की ओर आकर्षित कर रखा है।

§ ३६. लाप्रांज समीकरणों का एक अन्य व्युत्पादन

इसमें कोई संदेह नहीं कि व्यापकीकृत निर्देशकों के लिए लाप्रांज समीकरणों का हैमिल्टन के सिद्धांत से व्युत्पादन स्पष्टता और सक्षिप्तता में अनतिश्रुत है, परंतु फिर भी ऐसी भावना होती है कि वह कुछ अस्वाभाविक-सा ही है। विविध गत्यात्मक घटनाशियों के जो रूपान्तर संबंधी गुण-धर्म हैं और जो लाप्रांज समीकरणों का अंतर्भाग बनाते हैं, उन पर प्रकाश नहीं पड़ता। आगे दिया हुआ व्युत्पादन इस कमी को पूरा कर देगा।

हम किसी $\frac{n}{3}$ (n तीन से विभाज्य) संहति-विंदुओं वाले ऐसे निकाय पर ध्यान केंद्रित करते हैं जो किन्हीं भी (स्वेच्छ) नियंत्रणों के अधीन हो। सरलता के लिए नियंत्रण पूर्णपदीय निर्वाचित किये जाते हैं। यदि निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ f हों तो नियंत्रणों की संख्या $n-f$ होगी। हमारा सकेतन समी० (34.2) का होगा। निर्देशकों को समकोणिक मान लेंगे और उन्हें x_1, x_2, \dots, x_n कहेंगे। इसी प्रकार बाह्य बलों के घटकों को X_1, X_2, \dots, X_n मान लेंगे। अतः हम अपने संहति-विंदुओं के संवेगों के घटकों को $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ कहेंगे। उन्हें p_1, p_2, \dots, p_n कहना अच्छा

होता, जैसा कि (35.14) में किया था, परन्तु यह संकेतन व्यापकीकृत निर्देशांकों के लिए व्यासिद्ध रहेंगे। तो

$$(1) \quad \xi_i = m_i \dot{x}_i, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

जहाँ m_i , निस्संदेह, तीन-तीन के समवायो में बराबर हैं। हमारे निकाय की गति लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरणों (12.9) द्वारा वर्णित है। प्रस्तुत संकेतन में ये होंगे

$$(2) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = X_i + \sum_{\mu=f+1}^n \lambda_\mu \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

अब व्यापकीकृत स्थान-निर्देशांकों, q_1, \dots, q_f , का प्रवेश कराते हैं। इनका निर्वाचन इस प्रकार किया जा सकता है और करना होगा कि, ठीक (34.2) की भाँति, ये $n-f$ प्रतिबंध, $F_\mu = 0$, सर्वसमतः सन्तुष्ट हो जायें तो नये और पुराने वेग-निर्देशांकों के बीच समीकरणों (34.2b) वाले संबंध होने होंगे। इन्हें हम \mathcal{L} के लिए हल करते हैं और निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं

$$(3) \quad \dot{a}_{ik} = \sum_{k=1}^f a_{ik} \dot{q}_k, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

ये a_{ik} समी० (34.2b) में F_{ik} कहे गये थे तथा x_1, \dots, x_n के और इसलिए, जैसा कि § ३४ में जोर दिया गया था, q_1, \dots, q_f के भी फलन हैं। देखिए कि पुराने और नये स्थान-निर्देशांक तो एक स्वेच्छ बिंदु-रूपांतरण द्वारा संबधित हैं, परन्तु वेग-निर्देशांक रैखिकतया रूपांतरित होते हैं और उनके गुणांक स्थान-निर्देशांकों पर निर्भर करते हैं।

तो बल के घटकों का रूपांतरण गुण क्या है? नये बल-घटकों को Q_k कहेंगे और (34.7) की भाँति उनकी परिभाषा आभासी कर्म की निश्चरता द्वारा करेंगे, अर्थात्

$$(4) \quad \delta IV = \sum_{i=1}^n X_i \delta x_i = \sum_{k=1}^f Q_k \delta q_k.$$

अब हम आभासी से वास्तविक विस्थापनों और इनसे संगत वेगों तक चले जाते हैं।

(3) के प्रभाव से समी० (4) यों हो जाता है

$$(4a) \quad \sum_{k=1}^f Q_k \dot{q}_k = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{k=1}^f a_{ik} \dot{q}_k.$$

\dot{x}_i से असदृश, ये \dot{q}_k परस्पर स्वतंत्र हैं। अतएव (4a) के दायीं तथा बायी ओर के गुणांक बराबर होंगे, जिस कारण

$$(5) \quad Q_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} X_i, \quad k=1, 2, \dots, f.$$

यह रूपांतरण (3) का पक्षांतरण¹ हुआ। (3) में तो k पर योग होता है, (5) में i पर। स्पष्ट रूप से लिखें तो यह होगा—

$$\dot{Q}_1 = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + \dots, \quad Q_1 = a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + \dots,$$

$$\dot{Q}_2 = a_{21} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2 + \dots, \quad Q_2 = a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + \dots,$$

अतएव पक्षांतरण a_{ik} और a_{ki} के मिथ-परिवर्तन से बना है। हम कहते हैं कि बल के घटक वेग-निर्देशांकों के प्रतिपरिणम्यतया रूपांतरित (या उनके "प्रतिगमक")² होते हैं।*

संवेग के घटकवृद्ध बल के घटकों के सदृश रूपांतरित होते हैं, अर्थात् उनके अनुपरिणम्यतया³, क्योंकि संवेगों को उन आवेगी बलों की भांति समझ सकते हैं जो

(*) व्यापक आपेक्षिकता के धाव में यह प्रथा है कि एक उपरिलेखन (Q^k, p^k) द्वारा Q तथा उस p (जिसकी परिभाषा अभी की जानेवाली है) जंसी राशियाँ सूचित की जायें, जो उन \dot{q}_k से प्रतिपरिणम्यतया रूपांतरित होती हों (अर्थात् जो उनके "प्रतिगमक" हों)। परंतु हमारे विचार में इस प्रथा का, जिसका व्यापक आपेक्षिकता में इतना महत्त्व है, यहाँ त्याग किया जा सकता है।

आदि को विराम देना वाले हमारे गति-सिद्धियों को वांछित वेग प्रदान करने हैं। यदि नये गति-सिद्धियों को p_k कहें तो ये पुनः ξ_i के पदों में निम्नलिखित गति-सिद्धियों द्वारा व्यक्त किये जा सकते हैं—

$$(6) \quad p_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i$$

ये p_k के परिभाषक समीकरण हैं। यह परिभाषा उचित नहीं है परन्तु इसे सहज ही अधिक मार्पक रूप दिया जा सकता है। ऐसा करने के लिए गति-सिद्धियों को, जैसे कि पृ० २५० पर, एक बार तो q का फलन और दूसरी बार \dot{q} का फलन समझिए। दोनों व्यञ्जनों का भेद, जहाँ नहीं आवश्यक हो, हम

$$T_q \text{ या } T_{\dot{q}}$$

लिखकर बतायेंगे। तो निम्नलिखित बनता है

$$(7) \quad \frac{\partial T_{\dot{q}_k}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_{\dot{q}_i}}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} \right]$$

कोष्ठक इस बात को याद दिलाने के लिए है कि \dot{q}_k के लिए अवकलन करने में हमें q_k और \dot{q}_k को तथा सभी q_i और \dot{q}_i को भी ($i \neq k$) स्थिर रखना पड़ेगा। समी० (3) के अनुसार कोष्ठकों के बीच का पद केवल मात्र a_{ik} है। दूसरी ओर, प्रारम्भिक व्यञ्जन

$$T_{\dot{q}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{q}_i^2$$

प्रकटतया प्रदान करता है

$$\frac{\partial T_{\dot{q}_i}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i$$

तो (7) के स्थान पर हम प्राप्त करते हैं

$$(8) \quad \frac{\partial T_{\dot{q}_k}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \dot{q}_i$$

इसका दक्षिणाग (6) के दक्षिणाग से सर्वसम है। अतएव निम्नलिखित परिणाम होता है

(9)

$$p_k = \frac{\partial T \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k}$$

अब हम मान सकते हैं कि बाह्य बल \dot{q}_k से स्वतंत्र एक विभव V से व्युत्पन्न होने योग्य है, और तब लाग्रान्जियन $L = T - V$ का प्रवेश करा देते हैं, तो (9) को इस तरह भी लिख सकते हैं

(9a)

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

इस प्रकार (35.14) में पूर्वभावित p_k की परिभाषा को हमने पूर्ण व्यापकतया ठीक सिद्ध कर दिया।

अब हम ऐसी स्थिति में हैं कि गति-समीकरणों (2) को व्यापकीकृत निर्देशांकों में रूपांतरित कर सकते हैं। इसके लिए उन्हें यथाक्रम विभिन्न a_{ik} ($k=1, 2, \dots, n$) से गुणा कर i पर योग कर देते हैं।
तो समी० (5) से दक्षिणाग का प्रथम पद

(10)

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

हो जाता है। बायी ओर के द्वितीय पद में λ_μ का गुणनखंड होगा

(11)

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \text{ के लिए।}$$

अब समी० (3) बतलाता है कि

(12)

$$a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

समी० (3) को तुल्य रूप

$$dx_i = \sum a_{ik} dq_k$$

में लिखने से तथा q_k को छोड़कर अन्य सब q स्थिर रखने से यह प्रत्यक्ष हो जाता है
अब (11) के स्थान में भी यह लिख सकते हैं

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_{\mu}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial F_{\mu}}{\partial q_k}.$$

परंतु (34.2) के अनुसार ठीक $\mu = f+1$, \dots, n के लिए ही F_{μ} ओं को, q_k ओं के निर्वाचन से, सर्वममतः शून्य बना दिया है। अतएव q_k के लिए F_{μ} के आंशिक अवकलज भी शून्य हो जाते हैं। इसलिए हमारे समीकरण का दक्षिणांग (10) के रूप में लघुकृत हो जाता है। वामांग,

$$\sum_i a_{ik} \frac{d\xi_i}{dt},$$

निम्नलिखित में रूपांतरित हो जाता है

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \sum_i a_{ik} \xi_i - \sum_i \xi_i \frac{da_{ik}}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - \sum_i \xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

इसमें (6) और (12) का उपयोग किया गया है। अंतिम योग इस रूप में लिखा जा सकता है

$$\sum_i m_i x_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 = \frac{\partial}{\partial q_k} T \dot{q}.$$

यहाँ T का संकेतांक \dot{q} , यह स्मरण कराने के लिए है कि q_k के लिए अवकलन करने के पहले T को q, \dot{q} के फलन में परिवर्तित करना होगा। तब (13) का दक्षिण पार्श्व निम्नलिखित हो जायगा

$$(13a) \quad \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

इसे (10) के बराबर होना है, अतएव हम अंत में प्राप्त करते हैं

$$(14) \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

(9a) को विचार में लाते हुए देखते हैं कि यह लाग्रान्ज समीकरण के (34.6) वाले रूप से, या, यदि स्थितिज ऊर्जा के अस्तित्व को न माने तो (34.8) वाले उस के रूप से, सर्वसम है।

इसका दक्षिणांग (6) के दक्षिणांग से सर्वसम है। अतएव निम्नलिखित परिणाम होता है

$$(9) \quad p_k = \frac{\partial T \dot{q}}{\partial \dot{q}_k}$$

अब हम मान सकते हैं कि बाह्य बल q_k से स्वतंत्र एक विभव V से व्युत्पन्न होने योग्य हैं, और तब लाग्रंजीय $L = T - V$ का प्रवेश करा देते हैं, तो (9) को इस तरह भी लिख सकते हैं

$$(9a) \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

इस प्रकार (35.14) में पूर्वभावित p_k की परिभाषा को हमने पूर्ण व्यापकतया ठीक सिद्ध कर दिया।

अब हम ऐसी स्थिति में हैं कि गति-समीकरणों (2) को व्यापकीकृत निर्देशकों में रूपांतरित कर सकते हैं। इसके लिए उन्हें यथाक्रम विभिन्न a_{ik} ($k=1, 2, \dots, n$) से गुणा कर i पर योग कर देते हैं।

तो समी० (5) से दक्षिणांग का प्रथम पद

$$(10) \quad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

हो जाता है। दायी ओर के द्वितीय पद में λ_μ का गुणनखंड होगा

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}, \quad \mu = f+1, \dots, n \text{ के लिए।}$$

अब समी० (3) बतलाता है कि

$$(12) \quad a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

समी० (3) को तुल्य रूप

$$dx_i = \sum a_{ik} dq_k$$

में लिखने से तथा q_k को छोड़कर अन्य सब q स्थिर रखने से यह प्रत्यक्ष हो जाता है

अब (11) के स्थान में भी यह लिख सकते हैं

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_{i\mu}}{\partial v_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial q_k} - \frac{\partial F_{i\mu}}{\partial q_k}.$$

परंतु (34.2) के अनुसार ठीक $\mu = f = 1$, n के लिए ही $F_{i\mu}$ अंशों को, q_k अंशों के नियंत्रण में, सरसंगमः शून्य बना दिया है। अतएव q_k के लिए $F_{i\mu}$ के आंशिक अवकलन भी शून्य हो जाते हैं। इसलिए हमारे समीकरण का दक्षिणाम (10) के रूप में लघुकर हो जाता है। यामाग,

$$\sum_i a_{ik} \frac{d\xi_i}{dt},$$

निम्नलिखित में रूपान्तरित हो जाता है

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \sum_i a_{ik} \xi_i - \sum_i \xi_i \frac{da_{ik}}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - \sum_i \xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial q_k}.$$

इसमें (6) और (12) का उपयोग किया गया है। अंतिम योग इस रूप में लिखा जा सकता है

$$\sum_i m_i x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} \sum_i m_i x_i^2 = \frac{\partial}{\partial q_k} T \dot{q}.$$

यहाँ T का संकेतांक \dot{q} , यह स्मरण कराने के लिए है कि q_k के लिए अवकलन करने के पहले T को q , \dot{q} के फलन में परिवर्तित करना होगा। तब (13) का दक्षिण पार्श्व निम्नलिखित हो जायगा

$$(13a) \quad \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

इसे (10) के बराबर होना है, अतएव हम अंत में प्राप्त करते हैं

$$(14) \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

(9a) को विचार में लाते हुए देखते हैं कि यह लाग्रान्ज समीकरण के (34.6) वाले रूप से, या, यदि स्थितिज ऊर्जा के अस्तित्व को न माने तो (34.8) वाले उस के रूप से, समवर्ग्य है।

इस प्रकार हमने अपने विश्वास को दृढ़ कर लिया है कि लाप्लाज समीकरणों के व्युत्पादन के लिए हैमिल्टन सिद्धांत को जानने की आवश्यकता नहीं है; केवल मात्र इस बात की आवश्यकता है कि तत्संबन्धित गत्यात्मक राशियों के रूपांतरणीय गुणधर्मों का सम्यक् अध्ययन किया जाय।

५ ३७. लघुतम क्रिया का सिद्धांत

प्रकरण ३३ की समाप्ति में (पृ० २४९) हमने समाकल सिद्धांतों के मीमांसकीय गुण का उल्लेख किया था। यह शब्द इस भाव में व्यवहृत होता है कि “किसी उद्देश्य से बना”; “किसी विशेष अंत (परिणाम) की ओर निर्देशित”; “सभी संभव गतियों में से प्रकृति उसीको निर्वाचित करती है जो अपने इष्ट-स्थान पर क्रिया के अल्पतम व्यय से पहुँचती है।” लघुतम क्रिया के सिद्धांत की यह अभ्युक्ति किंचित् अस्पष्ट ज्ञात होती हो, परंतु है वह पूर्णतया उस गठन से सहमत जो उसके आविष्कर्ता ने उसे दिया था।

इस सिद्धांत के सूत्रीकरण में न केवल मीमांसकीय वरन् आध्यात्मिक विश्वासों ने भी भाग लिया था।* मांस्वी ने अपना सिद्धांत इस दृढ़-कथन के साथ अनुशसित किया था कि वही विश्वस्यता की बुद्धिमानी को सर्वोत्तमतया व्यक्त करता है।

* जिस अंग्रेजी शब्द का यह पर्याय माना गया है वह है teleological (टेलिओलाजिकल), Teleology दो यूनानी शब्दों से बना है : telos या teleus, जिसका अर्थ है अंत, उद्देश्य, संपूर्ण; और logos, जिसका अर्थ है “शब्द” जिससे अंग्रेजी प्रत्यय logy ज्ञान की किसी शाखा के अर्थ में बना। टेलिओलाजी का शाब्दिक अर्थ हुआ उद्देश्य, अंत या संपूर्णता के लिए शब्द अर्थात् तर्क-वितर्क। प्रकृति में प्रत्येक बात के लिए उद्देश्य होता है, इस अर्थ में इस शब्द का व्यवहार किया जाता है।

मीमांसा शब्द मान् धातु पर टिका है, जिसका अर्थ है जिज्ञासा, अर्थात् ज्ञान चाहना या ज्ञान की खोज करना। हिंदी प्रामाणिक शब्दकोश के अनुसार मीमांसा का शाब्दिक अर्थ है—अनुमान या तर्क-वितर्क से यह सिद्ध करना कि कोई बात वास्तव में कंसी है।

अतएव Teleology के लिए “मीमांसा” शब्द उचित पर्याय है। (हिंदी अनुवादक) कह देने योग्य बात जान पड़ती है कि हिंदुओं के तत्त्वज्ञान संबंधी विचारों में एक विचार-पद्धति मीमांसा है। इसके दो भाग हैं जिन्हें छे दर्शन शास्त्रों में से दो प्रदान करते हैं। पूर्व मीमांसा, या केवल मीमांसा के जन्मदाता जैमिनि कहे जाते हैं।

लाइबनिज के मन में भी ऐसे ही विचार रहे होंगे, जैसा कि उनकी रचना थियोडिसे' के दीर्घ-नाम से (जिसका अर्थ है ईश्वर की ग्याय्यता) विदित होता है।

मोपत्तर्वी ने अपना सिद्धान्त १७४७ में प्रकाशित किया था। उनसे कहा गया कि उन्हें लाइबनिज का सन् १७०७ का एक पत्र देखना चाहिए (मूल पत्र खो गया है)। परन्तु फिर भी उन्होंने अपनी प्राथमिकता का बड़े जोर के साथ समर्थन किया, यहाँ तक कि विवाद में उन्होंने अपने पक्ष में बर्लिन अकादमी के प्रधान होने की हैसियत से भी जोर डाला। इस सिद्धान्त का गणित की दृष्टि से निश्चित रूप कुछ काल बाद ही यूलर और विशेष कर लाग्रेंज के हाथों मिला।

लघुतम क्रिया के सिद्धान्त के ऊपर दिये हुए सूत्रीकरण में दो बातें स्पष्ट नहीं हैं।

१. "क्रिया" शब्द का क्या तात्पर्य है? स्पष्ट है कि यह वही चीज नहीं जो हैमिल्टन के सिद्धान्त में थी, क्योंकि अब ऐसे सूत्रीकरण की बात है जो, यद्यपि हैमिल्टन के सूत्रीकरण से संबंधित है, फिर भी उससे भिन्न है।

२. "सभी संभव गतियाँ," इस पदसमूह का क्या मतलब है? यह अत्यंत आवश्यक है कि तुलना के लिए जिन सब प्रकारों की गतियों पर विचार करना है, उनकी ठीक-ठीक व्याख्या कर ली जाय। तभी इन सब प्रकारों में से उस वास्तविक गति को निर्वाचित कर सकेंगे जो अधिकतम उद्देश्यपूर्ण या अनुकूल हो।

प्रथम के बारे में—लाइबनिज ने गुणनफल $2T dt$ को अपना क्रिया-अल्पांश लिया था। जो कुछ आगे आयेगा उसमें हम भी निम्नलिखित राशि को क्रिया-समाकल कहेंगे

$$(1) \quad S = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt.$$

मोपत्तर्वी ने, देकार्टे की भाँति, सवेग mv को यांत्रिकी के लिए मौलिक समझा था। अतएव मोपत्तर्वी ने $mv ds$ को क्रिया-अल्पांश लिया। परन्तु स्पष्ट होगा कि एकाकी सहति-बिंदु की स्थिति में लाइबनिज और मोपत्तर्वी को परिभाषाएँ समतुल्य हैं, क्योंकि

$$(2) \quad 2T dt = mv \cdot v dt = m v ds.$$

इसमें धार्मिक अनुष्ठानों के अतिरिक्त नैतिक अर्थात् कानून और उपदेश के तर्क-वितर्क भी दिये गये हैं। उत्तर मीमांसा व्यास-कृत मानी जाती है और आध्यात्मिक बातों संबंधी है, अर्थात् वेदांत, वेदों का ज्ञानकाण्ड। (हिंदी अनुवादक)

1. Theodice'e, 2. Element of action

यह समझा किन्हीं-भी यांत्रिक निकायों को लागू होगी, वस्तुतः कि क्रिया से निकाय के सभी सहति-बिंदुओं के गुणनफलों, $m_k v_k ds_k$ का योग समझें।

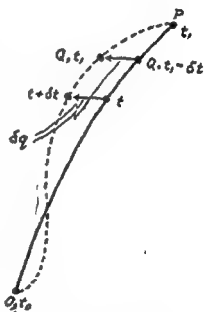
दूसरी बात के बारे में—हैमिल्टन के सिद्धान्त में तुलना की जानेवाली सभी गतियों को हमने § ३३ के (१) और (२) प्रतिबंधों से निरोधित कर दिया था। यहाँ (२) को तो हम रहने देंगे परंतु (१) में तबदीली कर देंगे। अब, $\delta t = 0$ के स्थान में हम अभियाचना करेंगे कि

$$(3) \quad \delta E = 0.$$

अतएव उन्हीं प्रक्षेप-पथों की तुलना की जायगी जिनकी ऊर्जा E वही हो जो कि अनुसंधान-अधीन वास्तविक प्रक्षेप पथ की है। इस प्रतिबंध में स्वाभाविकतया यह अंतर्भावित है कि प्रस्तुत सिद्धान्त केवल उन गतियों के लिए ही वैध है जिनमें ऊर्जा संरक्षित रहती है, अर्थात् विभवयुक्त बलों द्वारा कारित गतियाँ। यदि वास्तविक पथ की स्थितिज ऊर्जा को V कहें, तथा परिणमित पथों की स्थितिज ऊर्जा को $V + \delta V$, तो (३) के कारण हम प्राप्त करते हैं

$$(4) \quad \delta T + \delta V = 0, \quad \delta V = -\delta T, \\ \delta L = \delta T - \delta V = 2\delta T$$

इन बातों में प्रतिबंध (३) कारित परिवर्तन को कल्पनादृष्ट करने के लिए हम आकृति ५१ का स्मरण करते हैं। वहाँ परिणमन δq से संबंधित दो बिंदु एक ही समय t के थे। यह बात अब नहीं रहती किंतु परिणमित बिंदु का समय अब t नहीं $t + \delta t$ होता है (देखिए आ० ५४)। अतएव यहाँ परिणमित पथ अंतर्बिंदु को $t = t_1$ पर नहीं पहुँचता, वरन् प्रस्तुत आकृति की रचना



आ० ५४—लघुतम क्रिया के सिद्धान्त में “प्रक्षेप-पथ” का परिणमन। कारण कि ऊर्जा परिणमित नहीं होती, प्रारंभ के पथ का बिंदु q और परिणमित पथ का $q + \delta q$ भिन्न समयों t और $t + \delta t$ के होते हैं। वास्तविक पथ के अंतर्बिंदु P को परिणमित पथ का बिंदु Q अभ्यापित है।

के अनुसार, पीछे से अर्थात् t के बाद। परिणमित पथ में बिंदु Q समय $t=t_1$ पर पहुँच जाता है, परंतु प्रारम्भिक पथ में मगत-बिंदु द्वारा (जिसे भी Q से ही जकित किया गया है) इसमें पहले के समय $t_1 - \delta t$ पर पहुँच जाता है।

अब § ३३ के परिकलन हम फिर से करते हैं। उस प्रकरण के समीकरण (३) और (४) बंध रहते हैं, परंतु समी० (५) को बदलना पड़ेगा, क्योंकि जैसा वहाँ जोर दिया गया था, वह केवल $\delta t = 0$ के लिए ही बंध है। (३३.५) को प्रतिस्थापित करनेवाला प्रतिबंध हम निम्नलिखित का गठन करने से प्राप्त करते हैं

$$(5) \quad \delta \dot{x} = \frac{d(x + \delta x)}{d(t + \delta t)} - \frac{dx}{dt}.$$

दायी ओर के अवकलों के भागफल को यह लिखकर स्पातरित करिए कि

$$(6) \quad \frac{\frac{d(x + \delta x)}{dt}}{\frac{d(t + \delta t)}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt} \delta x}{1 + \frac{d}{dt} \delta t} \\ = \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt} (\delta x) - \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta t) + \dots,$$

जहाँ एक से अधिक कोटि वाली अल्पराशियों के गुणनफलों की उपेक्षा कर दी गयी है। अतएव (५) से प्राप्त करते हैं

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} (\delta x) - \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta t),$$

या

$$(7) \quad \frac{d}{dt} (\delta x) = \delta \dot{x} + \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta t).$$

यदि इसे (३३.४) में प्रवेशित कर दे तो हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं जहाँ सकेताक स्वेच्छ है।

$$(8) \quad \ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \delta \dot{x}_k - \dot{x}_k^2 \frac{d}{dt} (\delta t).$$

समी० (८) x ही के लिए नहीं y और z निर्देशांकों के लिए भी बंध है। अतएव (३३.३), पहले की भांति (३३.८) को पहुँचाने के बजाय, यहाँ निम्नलिखित प्रदान करता है

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \sum m_k (\dot{x}_k \delta x_k + \dot{y}_k \delta y_k + \dot{z}_k \delta z_k) \\ = \delta T + 2T \frac{d}{dt}(\delta t) + \delta W.$$

यहाँ (4) का उपयोग कर

$$(9a) \quad \delta W = -\delta V = +\delta T$$

रख देते हैं। वैसे करने से (9) का दक्षिणाग

$$(10) \quad 2\delta T + 2T \frac{d\delta t}{dt}$$

हो जाता है। अब (9) को t_0 से t_1 तक समाकलित करिए। इस प्रक्रिया में वामांग, प्रतिबंध (33.2) के कारण, शून्य हो जाता है। तो (10) के उपयोग से प्राप्त करते हैं

$$(11) \quad 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} T d\delta t = 0.$$

परंतु यह निम्नलिखित के सिवा और कुछ नहीं है

$$(12) \quad 2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$$

या, (1) का स्मरण करते हुए,

$$(12a) \quad \delta S = 0.$$

यह हुआ मोपत्तवी की भावनानुसार लघुतम क्रिया के सिद्धांत का सुव्यक्त प्रमाण।

आइए (11) से (12) में सक्रमण की कुछ और संपरीक्षा करें। हैमिल्टन के सिद्धांत में दोनों संकेतनों

$$\delta \int T dt \text{ तथा } \int \delta T dt$$

का, प्रतिबंध $\delta t = 0$ के कारण, परस्पर विनिमय करते हुए व्यवहार कर सकते थे। इसका उपयोग, उदाहरणतः, समी० (33.10) से (33.11) वाले सक्रमण में किया गया था। परंतु हमारे प्रस्तुत दृष्टिकोण से इन दोनों पदपुंजों के गुणों में भेद है, जैसा कि ऊपर दिये हुए समीकरणों (11) और (12) की तुलना दिखावेगी।

एक विरोध स्थिति लीजिए और दलों के अनघोन किसी गति पर विचार करिए। इस स्थिति में $T=E$ अतएव (3) की सहायता से समी० (12) प्रदान करता है

$$(13) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} dt = \delta(t_1 - t_0) = 0$$

यह है लघुतम समय का सिद्धांत ("शीघ्रतम पहुँच" का सिद्धांत) जिसे फर्माट^१ ने सूत्रीकृत किया और प्रकाश के वक्त्तन^२ पर अनुप्रयुक्त किया। प्राचीन काल में हेरान^३ ने प्रकाश के परावक्त्तन का उसी भाँति विचार किया था।

किसी एकाकी स्वतंत्र संहति-विदु के लिए, $T=E$ के स्थान पर V =नियत रख सकते हैं और (12) के स्थान में यह लिख सकते हैं—

$$(14) \quad \delta \int v dt = \delta \int ds = 0.$$

यह है "लघुतम पथ" का सिद्धांत। वह किसी स्वतंत्र संहति-विदु का प्रक्षेप पथ निर्धारित करता है, उदाहरणार्थ, किसी वक्र तल पर, या—जैसे कि व्यापक आपेक्षिकता में—कैसी भी वक्रता की बहुस्तरी में। इस प्रकार के प्रक्षेप पथ को भूरेखा कहते हैं। इस विषय पर हम § ४० में फिर आवेगे।

क्लेब्स^४ द्वारा अपने विख्यात क्यूनिग्जवर्ग के गतिकी सवधी विचार^५ प्रकाशित में याकोबी^६ ने लघुतम क्रिया के सिद्धांत से समय t के पूर्णतया निरसन की आवश्यकता होने को समर्थनीय और ठीक ठहराया। यह निरसन संभव है क्योंकि—

$$T=E-V=\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2=\frac{1}{2}\frac{\sum m_k ds_k^2}{dt^2}.$$

और इसलिए

$$dt=\left[\frac{\sum m_k ds_k^2}{2(E-V)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

1. Fermat 2. Refraction 3. Heron
4. Clebsch 5. Königsburg Vorlesungen über Dynamik
6. Jacobi

तो (12) के स्थान में अब यह अभियाचना कर सकते हैं कि—

$$(15) \quad \delta \int [2(E-V)]^{\frac{1}{2}} [\sum m_k dz_k]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

E के स्थिर होते हुए, परिणमन को यहाँ केवल निकाय के प्रक्षेप पथ के आकाशीय गुण धर्मों से मतलब है और गति भर में समय के वितरण का कोई उल्लेख नहीं होता।

आइए, एक बार फिर हैमिल्टन और लघुतम क्रिया के सिद्धांतों के मीमांसकीय पार्श्व की ओर लौट आएं। देखिए कि “लघुतम क्रिया” किन्हीं परिस्थितियों में “दीर्घतम क्रिया” भी हो सकती है। क्योंकि $\delta \dots = 0$ वाली अभियाचना का उत्तर केवल कोई अल्पतम ही नहीं, वरन् व्यापकतया वास्तव में बाह्यतमो होता है जो अल्पतम और महत्तम दोनों में से एक या दोनों ही हो सकता है। किसी गोल के तल पर भू-रेखाओं के दृष्टांत से यह बात बहुत सरलता से विदित होती है। भू-रेखाएँ वृहत् वृत्तों के चाप होती हैं। कल्पना कीजिए कि आदि बिंदु O और बिंदु P दोनों एक विशिष्ट गोलाद्वंद्व पर स्थित हैं। तो इन दोनों को मिलाने वाला वृहत् वृत्त का चाप ही उन अन्य सब चापों से छोटा होगा जो O और P से जाते हुए, पर गोल केन्द्र से न जाते हुए, किसी भी समतल पर होंगे। परंतु वह कोटिपूरक चाप भी जो O से P को विपरीत दिशा में, उस गोलाद्वंद्व को पार करते हुए जिसमें ये दो सिरे के बिंदु नहीं होते, जाता है, भूरेखा है और यह रेखा उन अन्य सब चापों से बड़ी है जो इस गोलाद्वंद्व पर होकर O और P को मिलाने हैं। इससे यह परिणाम निकला कि समाकल सिद्धांतों को प्रकृति की “सोद्देश्यता” का नि-निदर्शक समझने की कोई आवश्यकता नहीं है; वे केवल गतिकी के नियमों में सर्व-सामान्य एक बाह्यतमो ० गुणधर्म के असाधारणतया प्रभावोत्पादक गणितीय सूत्रीकरण मात्र हैं।

मोपत्तवी का दावा था कि उनका सिद्धांत प्रकृति के सभी नियमों के लिए व्यापक-तया वैध था। वर्तमान काल में यह गुणधर्म हैमिल्टन के सिद्धांत को देने की ओर हमारी प्रवृत्ति है। पृ० २४८ पर हमने उल्लेख किया था कि हेल्महोल्ट्ज ने इस (हैमिल्टन के) सिद्धांत को वैद्युतगतिकी सबंधी अपने अध्ययनों के लिए आधारिक बनाया था। उस काल से हैमिल्टनीय रूप के समाकल परिणमनीय सिद्धांतों का विविधतम क्षेत्रों में उपयोग किया गया है।

इस ग्रंथमाला की द्वितीय पुस्तक में तरल दाब की धारणा को भलीभाँति समझने के लिए इस सिद्धांत की सीधे ही धारणा लेगे। इस प्रक्रम का एक विशेष लाभ यह होगा कि समस्या सवधी अवकल समीकरणों—इस समस्या के लिए आंशिक अवकल समीकरणों—की ही नहीं, वरन् उन सीमा सवधी प्रतिबन्धों की भी हम प्राप्ति करेंगे जिन्हें इन समीकरणों के साधनों को सतुष्ट करना होगा। अन्यान्य समस्याओं के लिए भी, जिनमें अनवरत सहति वितरण हो, (केशिकत्व, कपायमान मिल्लियाँ, आदि) यही बात ठीक निकलती है।

बहुतेरी स्थितियों में आवश्यक होता है कि परिणमन सवधी सिद्धांत में उपयोग करने के लिए पहले समस्या के लाप्राजीय L की तलाश कर ली जाय। उदाहरणार्थ, ऐसी बात चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रान की गति के सवध में आती है। वहाँ आरोपित बल, विभव V से नहीं व्युत्पन्न किया जा सकता। आपेक्षिकता सवधी बातें एक दूसरा उदाहरण प्रस्तुत करती हैं। यहाँ लाप्राजीय को बनाने के लिए (4.10) में व्युत्पादित गतिज ऊर्जा के पदपुंज का उपयोग नहीं करना होगा। उसके स्थान में पदपुंज

$$(I6) \quad m_0 c^2 \int (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

के क्रिया सिद्धांत का गतिज अशदान की भाँति उपयोग करना होगा। इस पद का यूलरीय व्युत्पादन सीधे ही (3.19) के आपेक्षिकता सवधी सवेग P को, और इस लिए वेग-अधीन इलेक्ट्रान सहति के नियम को भी, पहुँचाता है।

व्यापकतया, विशेषकर यांत्रिकी से बाहर के क्षेत्रों में, दिये हुए अवकलन नियमों को (परिणमन सिद्धांत द्वारा) पहुँचाने वाले लाप्राजी फलन L की खोज एक दु.साध्य समस्या है जिसको हल करने के लिए कोई सार्वत्रिकतया बंध कायदे नहीं है। चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रान वाली ऊपर कही हुई समस्या एक सरल विधि से लार्मर^१ और श्वाशचिल्ड^२ ने हल की थी। मतलब यह कि $L = T - V$ के नमूने की भाँति का L का गतिज और स्थितिज ऊर्जा में पृथक्करण व्यापकतया साध्य नहीं है।

इस पर जोर दे देना चाहिए कि (I6) के समाकल में जो राशि अंतर्गत है वह (2.17) के उचित समय के अल्पाश के सिवा और कोई नहीं तथा जिसे मिकोवस्की^३

- | | |
|------------------|--------------|
| 1. Capillarity | 2. Larmor |
| 3. Schwarzschild | 4. Minkowski |

ने विशिष्ट आपेक्षिकतावाद की सरलतम निश्चर राशि की भाँति पहचान लिया था। आइन्स्टाइन^१ ने व्यापक आपेक्षिकतावाद में जगत्-रेखा के अल्पांश की भाँति उसे और भी अधिक व्यापक कर दिया। अतएव (16) के रूप में हैमिल्टन का सिद्धांत स्वयमेव आपेक्षिकतावाद की निश्चरता (अपरिणम्यता) संबंधी अभियाचनाओं को संतुष्ट करता है। इस गुणधर्म में प्लैंक^२* के अनुसार "हैमिल्टन सिद्धांत ने देदीप्यमानतम सफलता" प्राप्त की है।

1. Einstein 2. Planck

* देखिए Die Kultur der Gegenwart Part III, § III, 1, p.-701(B G. Teubner, Leipzig 1915), का अत्यंत शिक्षाप्रद लेख ।

सप्तम अध्याय

यांत्रिकी के अवकल परिणमन संबंधी सिद्धांत

§ ३८ गाउस कृत लघुतम नियंत्रण का सिद्धांत

गाउस केवल उत्कृष्ट गणितज्ञ ही नहीं, खगोलज्ञ तथा भूमापविद्यावेत्ता^१ भी थे और ऐसे होने के कारण संख्यात्मक परिणामों के परिकलनों से उन्हें बड़ा प्रेम था। उन्होंने ही लघुतम वर्गफलों की विधि की नींव डाली जिसका आनुक्रमिक अधिकाधिक गहराईयों के साथ विकास उन्होंने तीन विस्तृत ग्रंथों में किया। यदि, जैसा कि कभी-कभी होता था, गटिन्ज़न^२ विद्यापीठ में उनसे (अपनी इच्छा के विरुद्ध) व्याख्यान देने के लिए कहा जाता था तो सदैव ये लघुतम की विधि के विषय पर ही भाषण करना अधिकतम पसंद करते थे।

“यांत्रिकी का एक नवीन व्यापक मौलिक सिद्धांत” इस शीर्षक का १८२९ का उनका छोटा-सा एक गवेषण-निबन्ध* इस लाक्षणिक वाक्य में समाप्त होता है, “यह एक बड़ी ही उल्लेखनीय बात है कि अनिवार्य नियंत्रणों से असंगत स्वतंत्र गतियों का प्रकृति उसी प्रकार रूप-भेद कर लेती है जिस प्रकार कि अनिवार्य संबंधों से परस्पर संबंधित राशियों पर आधारित परिणामों को अनुरूपता में लाने के लिए परिकलक गणितज्ञ लघुतम वर्गफलों का उपयोग करता है।”

गाउस ने अपने नये मौलिक सिद्धांत को लघुतम नियंत्रण का सिद्धांत कहा था। नियंत्रण की माप की परिभाषा उन्होंने निम्नलिखित की थी—

निकाम का एक संहति बिंदु लीजिए और उसकी संहति तथा “स्वतंत्र गति से इस बिंदु के विचलन के वर्गफल” का गुणनफल निकालिए। निकाम के सब संहति-बिंदुओं के लिए ऐसे गुणनफलों का योग नियंत्रण को परिभाषित करता है।

1. Geodist 2. Gottingen

* Crelle's Journal f. Math, 4, 232 (1829); werke 5, 23.

यदि संहति-विंदुओं और उनके समकोणिक निर्देशांकों का पृ० ९० की भांति अंकन करें, तो n संहति-विंदुओं वाले निकाय के नियंत्रण की माप निम्नलिखित प्राप्त होती है—

$$(1) \quad Z = \sum_{k=1}^{3n} m_k \left(\ddot{x}_k - \frac{X_k}{m_k} \right)^2$$

क्योंकि यदि आंतरिक नियंत्रणों की उपेक्षा कर दी जाय तो जो “स्वतंत्र गति” होगी वह निम्नलिखित देगा द्वारा मिलेगी—

$$\ddot{x}_k = \frac{X_k}{m_k}$$

अतएव (1) के कोष्टक के भीतरवाली राशि सचमुच ही “स्वतंत्रगति से होनेवाला वह विचलन” है जो k वे संहति विंदु पर नियंत्रण के कारण होता है।

उसे संहति-विभाजित “खोया हुआ बल” भी कह सकते हैं (देखिए पृ० ८३)। अतएव (1) के स्थान में हम लिख सकते हैं—

$$(2) \quad Z = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{m_k} (\text{खोया बल})_k^2$$

देखिए कि यहाँ खोये बल और व्युत्क्रम सहितियाँ¹ उसी प्रकार आती हैं जैसे कि त्रुटियों के परिकलन में त्रुटियाँ और भार होते हैं।

अब इस बात का निश्चय कर लेना चाहिए कि “लघुतम नियंत्रण” इस पद का क्या मतलब है। अर्थात् यह इंगित कर देना चाहिए कि $\delta Z = 0$ के परिकलन में कौन-सी राशियों को स्थिर रखेंगे और कौन-सी राशियों को परिणामित करेंगे।

निम्नलिखित को हम स्थिर रखेंगे—

क—निकाय की क्षणिक दशा, अर्थात् उसके सहतिविंदुओं में से प्रत्येक का स्थान और वेग। अतएव हमें लेना चाहिए

$$(3) \quad \delta x_k = 0, \quad \delta \dot{x}_k = 0.$$

ख—वे नियंत्रण जो निकाय पर लागू हों। यदि इनको पूर्णपदीय गठन $F_i(x_1, x_2, \dots) = 0$ के रूप में ले तो परिणाम δZ में इस गौण प्रतिबंध को विचार में लेना होगा कि—

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k = 0, \quad i=1, 2, \dots, r,$$

जहाँ r प्रतिबंधों की संख्या है, और इसलिए $3n - r = f$ निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ हैं। समी० (4) का i के लिए दो बार अवकलन कीजिए। यह δx , $\delta \dot{x}$ तथा $\delta \ddot{x}$ में पदों का प्रदान करेगा। (3) के कारण इनमें से केवल $\delta \ddot{x}$ के ही रखने की आवश्यकता होगी, अर्थात्

$$(4a) \quad \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k^2} \delta \ddot{x}_k = 0$$

ग—निकाय पर आरोपित बल और, स्वभावतः, संहतियाँ; हम प्राप्त करते हैं

$$(5) \quad \delta X_k = 0, \quad \delta m_k = 0.$$

जो राशि \ddot{x}_k अब शेष रह गयी, केवल वही परिणामित की जाने वाली है।

गौण प्रतिबंधों (4a) को विचार में लेते हुए, लाग्रान्ज के अनिर्धारित गुणकों वाली विधि द्वारा, (1) से हम प्राप्त करते हैं—

$$(6) \quad \delta Z = 2 \sum_{k=1}^{3n} \left\{ m_k \dot{x}_k - X_k - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right\} \delta \ddot{x}_k = 0.$$

इन $\delta \ddot{x}_k$ ओं के केवल $f = 3n - r$ ही स्वतंत्र हैं। परन्तु, जैसे पृ० ९१ पर, अपने λ_i ओं का इस प्रकार निर्वाचन कर सकते हैं कि कोष्टकों $\{ \}$ के बीच के r शून्य हो जायें, जिस कारण (6) में केवल f पदवृत्त ही रह जायेंगे। इन बचे हुए f पदों के $\delta \ddot{x}_k$ अब स्वतंत्र की भाँति समझे जा सकते हैं। परिणामवश उनके सहारा f कोष्टकों $\{ \}$ के पदों को शून्य हो जाना चाहिए। अतएव हम (12.9) के रूप में प्रथम प्रकार के लाग्रान्ज समीकरणों को पहुँचते हैं।

स्पष्टतया यह उपपत्ति अपूर्णपदीय नियंत्रणों पर बिना किसी परिवर्तन के लागू है। इस प्रकार सचमुच ही “यांत्रिकी के एक नवीन व्यापक मौलिक सिद्धांत” की प्राप्ति हुई है, जैसा कि गाउस ने अपने निबंध के दीर्घक में दावा किया था। यह मौलिक सिद्धांत दालांघेर के सिद्धांत से पूर्णतया समतुल्य है। पदचोक्त की भांति वह एक अवकल सिद्धांत है क्योंकि उसे निकाय के भूत और भविष्य के आचार (व्यवहार) से नहीं, धरन् केवल उसके वर्तमान आचार से ही काम है। यहाँ, महत्तमों तथा अल्पतमों के निर्माण के लिए परिणमन कलन के कायदों की नहीं, केवल साधारण चलन कलन अर्थात् अवकलन गणित के कायदों की आवश्यकता है।

१ ३६. हर्ज कृत लघुतम चक्रता का सिद्धांत

ठीक-ठीक बात तो यह है कि प्रस्तुत सिद्धांत केवल गाउस के सिद्धांत की एक विशेष स्थिति है। फिर भी हर्ज अपने सिद्धांत को नया तो नहीं परंतु कम से कम पूर्णतया व्यापक अवश्य ही कह सके थे। इसका कारण यह है कि वे सभी वलों को किसी प्रस्तुत निकाय और उससे मिथःक्रियाकारी अन्य निकायों के बीच के संबंधों द्वारा प्रतिस्थापित करने में सफल हुए थे (मिलाइए पृ० ५)। इस कारण हर्ज उन निकायों में ही अपने तर्क सीमाबद्ध कर सके थे जो वलों के अधीन न थे। अपिच सिद्धांत को वह ज्यामितीय व्याख्या देने के लिए, जिसकी तलाश थी उनको यह अनुमान करना पड़ा था कि सारी संहतियाँ एक, कहिए कि परमाणवीय उत्पत्ति की, मात्रक संहति की गुणज^१ हैं। तब गाउस के व्यंजन (38.I) का गुणनखंड m_k 1 (one) हो जाता है और X_k शून्य (अर्थात् $m_k=1$, $X_k=0$), तो परिणामवश (38.I) का निम्नलिखित हो जाता है—

$$(I) \quad Z = \sum_{k=1}^n \ddot{x}_k^2$$

यहाँ योगन (सकेतन, Σ) के ऊपर के सकेतांक N से यह मतलब है कि निकाय की मात्रक संहतियों की संख्या, जिनका कि योग करना है, दिये हुए निकाय से युग्मित मिथःक्रियाकारी निकायों के संगतमात्रक संहतियों की एक समुचित सख्या द्वारा अकथित प्रकार से बढ़ा दी गयी है।

तो आइए

$$\ddot{x}_k \text{ के स्थान पर } \frac{d^2x_k}{ds^2}$$

लिखकर (1) का परिवर्तन कर लें। यहाँ

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{k=1}^N dx_k^2.$$

ऊर्जा के सिद्धान्त की विशेष गठन के कारण ऐसा करना अनुज्ञेय है। यह सिद्धान्त लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरणों का, और इसलिए लघुतम नियमन वाले सिद्धान्त का भी, परिणाम है। अपने प्रस्तुत विशिष्टीकरण के लिए ऊर्जा सिद्धान्त को यो लिख सकते हैं—

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{dx_k}{dt} \right)^2 = E$$

या, अधिकतर संक्षेप में,

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \text{ नियत।}$$

इस कारण, (1) का इस नियतांक के वर्गफल से विभाजन प्रदान करता है यह राशि

$$(3) \quad K = \sum_{k=1}^N \left(\frac{d^2x_k}{ds^2} \right)^2$$

हर्ज ds को रेखा का अल्पांश कहते हैं तथा $K^{\frac{1}{2}}$ को निकाय-रचित प्रक्षेप पथ की यन्त्रता और यह स्वीकार कर लेते हैं कि

$$(4) \quad \delta K = 0$$

प्रत्येक स्वतंत्र निकाय या तो विराम दशा में रहता है या एक लघुतम यन्त्रता वाले पथ पर एक समान गति की अवस्था में।

व्यंजन का यह ढंग (मिलाइए, पूर्वकथित (पृ० ४) हर्जंकृत ग्रंथ का ३०९ वां प्रकरण) न्यूटन के प्रथम नियम के सूत्रीकरण का स्मरण दिलाने के लिए निर्वाचित किया गया है।

स्वीकृत (4) का गणितीय उपचार गाउस के उपचार का अनुसरण करता है और, पृ० २८६ पर (क) और (ख) में लगाये हुए परिणमन प्रतिबंधों के आधार पर बिना बलों के अधीन निकाय के लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरणों को प्रकटतया पहुँचाता है ($m_2 = 1$ रखकर)।

हर्ज जो ds को "रेखा अल्पांश" तथा $K\frac{1}{\rho^2}$ को वक्रता कहता है, उसका ओचित्य क्या है? प्रकटतया इन धारणाओं की व्याख्या बहुविमितीय भाव में करनी होगी। हम तीन विमितियों में नहीं, किंतु (x_1, x_2, \dots, x_n) निर्देशांकों वाले N विमितियों के युक्लिडीय आकाश में हैं। ऐसे आकाश में रेखा का अल्पांश सचमुच ही (2) द्वारा दिया जाता है। अब यह दिखलाने के लिए कि किसी प्रक्षेप पथ की वक्रता का वर्गफल विलकुल व्यापकतया (3) द्वारा दिया जाता है, दो और तीन विमितियों की स्थितियों पर विचार-विवेचन करेंगे।

समी० (5.10) के अनुसार निर्देशांकों x_1, x_2 के आकाश में, प्राप्त करते हैं

$$(5) \quad K = \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\Delta \epsilon}{\Delta s} \right)^2$$

आकृति ४ ख से, $\Delta \epsilon$ उन दो पड़ोसी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है, जिनके स्पर्श बिंदुओं के बीच की पथवर्ती दूरी Δs है। इन स्पर्श-रेखाओं की दैशिक कोटिज्याएँ हैं, क्रमात्

$$(6) \quad \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \text{ और } \frac{dx_1}{ds} + \frac{d^2x_1}{ds^2} \Delta s, \frac{dx_2}{ds} + \frac{d^2x_2}{ds^2} \Delta s$$

यें दैशिक त्रिज्याएँ उन दो बिंदुओं के निर्देशांक भी हैं जो निर्देशांकों के मूल बिंदु के चारों ओर खींचे हुए मात्रक वृत्त तथा स्पर्श रेखाओं के समांतर मूल बिंदु से खींची हुई त्रिज्याओं के प्रतिच्छेद से बनते हैं; इसके सिवा कोण $\Delta \epsilon$ इन दोनों प्रतिच्छेद बिंदुओं के बीच के चाप की दूरी से मापा जाता है। अतएव हम (6) के अनुसार प्राप्त करते हैं

$$\Delta \in {}^2 \left[\left(\frac{d^2 x_1}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 x_2}{ds^2} \right)^2 \right] \Delta s^2;$$

और (5) से,

$$(7) \quad K = \left(\frac{d^2 x_1}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 x_2}{ds^2} \right)^2.$$

तीन निदेशकों x_1, x_2, x_3 के आकाश में, $\Delta \in$ एक बार फिर तीन विमितियों के प्रक्षेपणों की पड़ोसी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है। मात्रक वृत्त अब मात्रक गोले द्वारा प्रतिस्थापित होता है जिसके केन्द्र से दोनों स्पर्श रेखाओं के समांतरद्वय खींचे जाते हैं। गोले के तल से उनके प्रतिच्छेद-बिंदु $\Delta \in$ को चाप के मापकों में निम्नलिखित मापता है—

$$\Delta \in {}^2 = \left[\left(\frac{d^2 x_1}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 x_2}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 x_3}{ds^2} \right)^2 \right] \Delta s^2.$$

इस प्रकार अब (5) से K का व्यंजन प्राप्त करते हैं जिसमें तीन पद होंगे।

तो अब N विमितियों के आकाश के लिए और N पदों के समीकरण (3) के लिए व्यापकीकरण प्रकट है।

यही हमें हर्ज की यांत्रिकी पर अपनी विवरणिका समाप्त करनी चाहिए। जैसा कि पृ० ५ पर कहा था, उनका विचार चित्ताकर्षक तथा प्रोत्साहक है और बड़ा 'तर्कसंगत' है; परन्तु बलों को जटिल संबंधों द्वारा प्रतिस्थापित करने के कारण, उसको 'सफलता नहीं प्राप्त हुई।

§ ४० भू-रेखाओं संबंधी विषयान्तरण

भू-रेखाओं की परिभाषा यह करते हैं कि वे एक स्वेच्छ अर्थात् किसी-भी वक्र तल पर बिना बलों के अधीन (अतएव घर्षण रहित) उन सहति बिंदुओं के प्रक्षेप-पथ हैं जो उस तल पर ही गतिशील होने के लिए नियंत्रित हैं। समझिए कि कण की सहति एक है और तलका समीकरण $F(x, y, z) = 0$ है।

लघुतम क्रिया का सिद्धान्त बताता है कि ये भू-रेखाएँ संभव न्यूनतम या, अधिक-तर व्यापकतया, (देखिए पृ० २८१), बाह्यतम दैर्घ्य की रेखाएँ भी हैं। ऊर्जा का अविनाशित्व लागू होने के कारण पथ पर वेग नियत रहेगा। ऊर्जा के नियतांक का उद्भूत निर्वाचन करने से वेग को एक के बराबर रख सकते हैं और इसलिए

$\frac{d}{dt}$ के स्थान में $\frac{d}{ds}$ लिख सकते हैं।

यदि अपने प्रक्षेप पथों को लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरणों द्वारा वर्णित करें तो हम भू-रेखाओं की मौलिक परिभाषा प्राप्त करते हैं। सदिश तथा लिखी हुई प्रस्तुत स्थिति में ये होंगे—

$$(1) \quad \dot{\mathbf{r}} = \lambda \text{ grad } F. [\text{grad} = \text{gradient} = \text{प्रवणता}.]$$

यदि, जैसा कि प्रस्तुत स्थिति में होता है, $v = \text{नियत}$, जिस कारण $\dot{v} = 0$ [मिलाइए, § ५ (३) का प्रारंभ], तो $\dot{\mathbf{r}}$ की दिशा प्रक्षेप-पथ के मुख्य अभिलंब की ओर होगी। परिणामवश (देखिए उसी स्थान पर) $\dot{\mathbf{r}}$ आइलेयक समतल में होगा। दूसरी ओर, $\text{grad } F$ की दिशा F की प्रवणता (जो एक सदिश है) की तल-अभिलंब की होगी, क्योंकि तल पर होने वाले किसी स्थानांतरण (dx, dy, dz) के लिए

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

होता है जिस कारण दिशा

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

सचमुच ही विस्थापन के लंबवत् है। अतएव समी० (1) में भू-रेखाओं की परिभाषा समाविष्ट है। यह समीकरण कहता है कि किसी भू-रेखा का मुख्य अभिलंब तल-अभिलंब का संघाती है, या तुल्यात्मकतया, किसी भू-रेखा के आइलेयक समतल में तल-अभिलंब होता है।

अब हम लघुतम वक्रता सिद्धांत की शरण लेते हैं। उसके अनुसार, पड़ोसी पथों की अपेक्षा भूरेखा की वक्रता सबसे कम होती है। पड़ोसी पथों को, प्रतिबंधों (38.3) के अनुसार, उसी बिंदु से होकर जाना पड़ता है और उसकी वही स्पर्शरेखा होती है जोकि भूरेखा की है। इन सभी पड़ोसी पथों को इस भांति प्राप्त करते हैं कि विचाराधीन स्पर्शरेखा से होते हुए सभी संभव तिरश्चीन^१ समतलों को ले जाते हैं और पृष्ठ पर उनके प्रतिच्छेद निर्धारित किये जाते हैं; जिस समतल में दिये हुए पृष्ठ का अभिलंब हो वही भूरेखा को निर्धारित करता है। हर्ज के सिद्धांत के अनुसार इन तिरश्चीन काटों की वक्रता अभिलंब काट से अधिक या तुल्यात्मकतया, उनकी वक्रता त्रिज्या इससे कम, होती है।

यह तथ्य पृष्ठों की अवकल ज्यामिति के म्यूस्नियर^१ प्रमेय से सहमत है, जो कहता है कि किसी तिर्यक् (तिरछी) काट की वक्रता-त्रिज्या उस प्रक्षेप के बराबर है जो अभिलंब काट की वक्रता-त्रिज्या तिर्यक् काट के समतल पर डालती है। इस प्रकार म्यूस्नियर-प्रमेय में लघुतम वक्रता सिद्धांत की व्यापक अंतर्वस्तुके मात्रात्मक व्यंजन की प्राप्ति होती है।

अब आइए अंत में अपनी भूरेखाओं पर लाप्रांज के द्वितीय प्रकार के समीकरणों का अनुप्रयोग करें। वैसा करने में हम गॉउस के १८२७ के महान् ग्रन्थ, “पृष्ठों के वक्रों संबंधी व्यापक अनुसंधान”^२ के विचारों के वातावरण में प्रवेश करते हैं; जो चार विमितियों को बढ़ाने से, आपेक्षिकता के व्यापक वादीय विचारों का क्षेत्र बन जाता है।

लाप्रांज तो स्वेच्छ वक्रीय निर्देशांकों u का प्रवेश कराते हैं; परंतु निदेशांकों की भांति पृष्ठ पर वक्रों के दो स्वेच्छ वर्गों का उपयोग करते हैं जो पृष्ठ पर एक “जाल” बिछा देते हैं। प्रयानुसार हम उन्हें

$$(2) \quad u = \text{नियत}, \quad v = \text{नियत}$$

कहेगे। इन निर्देशांकों में गॉउस रेखा अल्पांश ds को इस रूप में लिखते हैं—

$$(3) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

“प्रथम अवकल परामितियाँ”^३ E, F और G को u तथा v के फलन समझना होगा। पृष्ठ पर के बिंदुओं के समकोणीय निर्देशांकों से उनका संबंध निम्न लिखित है

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

1. Meusnier

2. “Disquisitiones generales circa superficies curvas”.

3. Differential parameters

$2dt^2$ से विभाजित रेखा अल्पांश का वर्गफल, पृष्ठ पर गतिशील हमारे (मात्रक) सहति बिंदु की गतिज ऊर्जा T है। इस कारण व्यापकीकृत निर्देशकों के लिए लाग्रान्ज समीकरणों को गॉसीय संकेतन में निम्नलिखित संबंध बना कर रूपांतरित कर सकते हैं—

$$p_u = \frac{\partial T}{\partial u} = E\dot{u} + F\dot{v}$$

$$2\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial u}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}^2$$

यदि अंत में $\frac{d}{dt}$ के स्थान में $\frac{d}{ds}$ रख ले तो भूरेखा का अवकल समीकरण,

लाग्रान्ज की विधि के अनुसार, निम्नलिखित होगा—

$$(4) \quad \frac{d}{ds} \left(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds} \right) \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial E}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right\}$$

यह है u निर्देशक के लिए। v निर्देशक के लिए उसको लिखने की कोई आवश्यकता नहीं। ऊर्जा-सिद्धांत के प्रभाव से (प्रस्तुत स्थिति में $\frac{ds}{dt} = 1$ वह (4) के सर्वसम होगा।

समी० (4) का व्युत्पादन, गॉस अपने ग्रंथ के प्रकरण १८ में, लघुतम पथ के सिद्धांत द्वारा करते हैं। यहाँ हम केवल यही बताना चाहते थे कि गॉस की व्यापक पृष्ठ परामितियों की विधि (२), लाग्रान्ज की निकायो की यांत्रिकी की विधि के समतुल्य है। दोनों विधियाँ निर्देशकों के स्वेच्छ (भनमाने) रूपांतरण के लिए अपरिणाम्य हैं और केवल, क्रमात्, पृष्ठ या यांत्रिक निकाय के आंतरिक गुण-धर्मों पर निर्भर करती हैं।

अष्टम अध्याय

हैमिल्टन का सिद्धान्त

§४१ हैमिल्टन के समीकरण

लाग्रान्ज के समीकरणों में हमारे स्वतंत्र परिणम्य (चर राशियाँ) के q_k तथा \dot{q}_k थे। हैमिल्टन के समीकरणों में, जिन्हें दो विभिन्न प्रकारों में अब व्युत्पन्न करेंगे, स्वतंत्र परिणम्य q_k तथा p_k होंगे। पदसोफा की परिभाषा समी० (36.9a) के अनुसार है। लाग्रान्ज के समीकरणों का लाक्षणिक फलन था यह “स्वतंत्र ऊर्जा” $T-V$, जो q_k ओं और \dot{q}_k ओं का फलन समझी गयी थी। हैमिल्टन के समीकरणों का लाक्षणिक फलन है सम्पूर्ण ऊर्जा $T+V$ जिसे q_k ओं तथा p_k ओं का फलन समझेंगे। इस फलन को “हैमिल्टनीय फलन” या केवल हैमिल्टनीय कहते हैं और उसे $H(q,p)$ द्वारा सूचित करते हैं; ठीक वैसे ही जैसे कि स्वतंत्र ऊर्जा को लाग्रान्जीय कहा था और $L(q,\dot{q})$ द्वारा सूचित किया था।

H और L में संबंध (34.16) विद्यमान है जिसे, p_k की परिभाषा का उपयोग कर, हम यों लिखेंगे—

$$(I) \quad H = \Sigma p_k \dot{q}_k - L.$$

आइए, दस मिट्टात का आधार, §३७ के अंतिम भाग के अनुसार तुरत ही विस्तारित कर लें। गतिज और स्थितिज ऊर्जादान L के विघटन का त्याग कर देंगे और, साथ ही, उसको t पर मुख्यतया निर्भर करने देंगे। पृष्ठ २५६ के अनुसार, दग प्रकार का निर्भरत्व तभी होगा जब या तो नियंत्रणों के समीकरणों में या निर्देशांकों के पारिभाषिक समीकरणों में समय (t) आवे। तब लाग्रान्जीय को निम्नलिखित व्यापकीकृत रूप में लिखते हैं—

$$(1a) \quad L = L(t, q, \dot{q}).$$

समी० (I) को L के (मनो) H की परिभाषा रखिए,

$$(1b) \quad H = H(t, q, p),$$

यद्यपि यँसा करने से H संपूर्ण ऊर्जा का आशय सो देता है। पहले की भाँति, p_k निम्नलिखित संबंध द्वारा दिये जाते हैं:

$$(1c) \quad p_k = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

यदि हैमिल्टन के सिद्धान्त

$$(1d) \quad \delta \int_{t_0}^t L dt = 0$$

को यांत्रिकी का मौलिक सिद्धान्त ले लें तो लाग्रान्ज-समीकरणों को ठीक §३४ की भाँति प्राप्त करते हैं, L का नूतन, विस्तृत आशय होते हुए भी। आगे आये हुए विवरण के लिए हम इन समीकरणों को निम्नलिखित रूप में लिखेंगे

$$(1e) \quad \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

(१) हैमिल्टन समीकरणों की लाग्रान्ज-समीकरणों से व्युत्पत्ति

आइए हम H और L के पूर्ण अवकलों को लिख लें

$$(2) \quad dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k,$$

तथा

$$(2a) \quad dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k.$$

और, लाग्रान्ज समीकरणों (1e) तथा p_k की परिभाषा (1c) के द्वारा dL का रूपांतरण यों कर लें

$$(2b) \quad dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum \dot{p}_k dq_k + \sum p_k d\dot{q}_k$$

अब (1) का पूर्ण अवकल (2b) की सहायता से गठित कीजिए

$$(3) \quad dH = \sum \dot{q}_k dp_k + \sum p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum \dot{p}_k dq_k - \sum p_k d\dot{q}_k.$$

दायी ओर के अंतिम पद को द्वितीय पद से काट देने पर प्राप्त होता है

$$(3a) \quad dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum \dot{p}_k dq_k + \sum \dot{q}_k dp_k$$

dH का यह व्यंजन निस्सदेह समी० (2) के उसके व्यंजन से सर्वसम होना चाहिए। यदि dt के गुणाकों का समीकरण करें तो मिलता है—

$$(3b) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

dq_k तथा dp_k के गुणाकों की तुलना प्रदान करती है

$$(4) \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

देखिए कि इन संबंधों में आश्चर्यजनक सम्मिति है। ये ही “हैमिल्टन के साधारण अवकल समीकरणवृंद” या संक्षेप में, हैमिल्टन-समीकरणवृंद हैं।

प्रसंगवश, वे पहले-पहल लाग्रान्ज की इससे बहुत पहले प्रकाशित पुस्तक ‘वैश्लेषिक यांत्रिकी’ में आ चुके थे (प्रकरण ५५१४)। परंतु वहाँ वे केवल अल्प दोलों के संबंध में उपयोग के लिए व्युत्पन्न किये गये थे।

(२) हैमिल्टन-समीकरणों का हैमिल्टन-सिद्धांत से व्युत्पादन

समी० (1) के प्रकाश में हम इस सिद्धांत को इस रूप में लिखते हैं—

$$(5) \quad \begin{aligned} -\delta \int L dt &= \delta \int [H(t, q, p) - \sum p_k \dot{q}_k] dt \\ &= \sum_{k=0} \int \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k - \dot{q}_k \delta p_k - p_k \delta \dot{q}_k \right) dt = 0, \end{aligned}$$

जहाँ कोष्ठक के बीच के अंतिम पद को आंशिक समाकलन द्वारा रूपांतरित कर सकते हैं। यों

$$(6) \quad -\int_{t_0}^{t_1} p_k \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_k \delta q_k dt - p_k \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

हैमिल्टन-सिद्धांत में जिस प्रकार परिणामन^३ किया जाता है उसके कारण समाकलित पद शून्य हो जाता है। (5) में (6) का प्रतिस्थापन, तदुपरांत δq_k तथा δp_k में पदों का एकत्रण प्रदान करता है

$$(7) \sum_k \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta q_k + \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} + \dot{q}_k \right) \delta p_k \right] dt = 0.$$

यदि इन δq_k और δp_k औरों को स्वतंत्र परिणमनों की भाँति ले सकते तो δq_k तथा δp_k के गुणनखंडों को अलग-अलग, संकेतांक k के प्रत्येक मान के लिए, शून्य रख देना ठीक होता और इस प्रकार हैमिल्टन-समीकरणवृंद (4) की प्राप्ति हो जाती। परंतु यह अनुज्ञेय नहीं है, क्योंकि यद्यपि q_k और p_k का H में प्रवेश स्वतंत्र परिणमनों की भाँति होता है, वे समी० (1c) द्वारा समय के साथ संबंधित हैं। यह एक ऐसा तथ्य है जिसके कारण समी० (7) का सर्वसंमत सतुष्ट होना विचारणीय हो सकता है। परंतु देखते हैं कि (q_k को नियत रखते हुए) p_k के लिए (1) का आंशिक अवकलन (7) के द्वितीय कोष्ठकों () को सर्वसंमत शून्य कर देता है। तो यह परिणाम निकलते हैं कि प्रथम () को भी शून्य हो जाना चाहिए।

हैमिल्टन-समीकरणों को द्वितीय विधि से व्युत्पन्न करने के हेतुओं में से एक यह है कि उसके बारे में अब हम एक महत्वपूर्ण बात कहना चाहते हैं।

हम जानते हैं कि स्वेच्छ "विदु रूपांतरणों" के अधीन लाग्रान्ज समीकरणवृंद अपरिणम्य हैं, अर्थात् यदि q_k औरों को एक ऐसे नये निर्देशांकों के जुट Q_k औरों द्वारा प्रतिस्थापित कर दें, जो पूर्वोक्त से निम्नलिखित प्रकार के संबंधों द्वारा संबंधित हों, तो उनका रूप नहीं बदलता—

$$(8) \quad Q_k = f_k(q_1, q_2, \dots, q_f)$$

तो सहायमी P_k निम्नलिखित द्वारा मिलते हैं

$$(8a) \quad P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i p_i a_{ik},$$

अर्थात् ऐसे p_i के रेखिक फलनों द्वारा जिनके गुणांक a_{ik} , ठीक वैसे ही जैसे कि (36.3) में q_k के फलन हैं।

अब हम दिखायेंगे कि निम्नलिखित और भी अधिकतर व्यापक रूपांतरणों के अधीन हैमिल्टन समीकरण अपरिणम्य होते हैं

$$(9) \quad Q_k = f_k(q, p), \\ p_k = g_k(q, p).$$

जहाँ ये f_k और g_k चरराशियाँ q_k तथा p_k के जुटों के स्वेच्छ फलन हैं— परन्तु स्वेच्छ आगे दिये हुए एक निरोध के भीतर ही भीतर । एक विशेष बात यह है कि q_k ओं को p_k में रैखिक होने की आवश्यकता नहीं ।

मान लीजिए कि समीकरण वृद्ध (9) Q, P के पदों में q, p के लिए हल किये गये हैं (निस्संदेह यह आवश्यक होगा कि समीकरणवृद्ध (9) में गठित किये जायें कि यह संभव हो सके) और व्यंजन $H(q, p)$ में प्रतिस्थापित कर दिये गये हैं । उन रूपांतरित हेमिल्टनीय को यदि \bar{H} कहें तो प्राप्त होता है

$$(10) \quad H(q, p) = \bar{H}(Q, P)$$

इसके सिवा, (5) में जायी हुई राशि $\sum p_k \dot{q}_k$ की $\sum p_k \dot{Q}_k$ से तुलना कीजिए । हम सहज ही देख सकते हैं कि रूपांतरण 8, (8a) में दोनों पदपुंज बराबर होंगे । अब यह अभियाचना है कि एक योजनीय पद के अतिरिक्त, व्यापक रूपांतरण (9) में भी यह समता बनी रहे । इन योजनीय पदों को q और p के एक फलन F' का, या वैकल्पिकतया q तथा Q के फलन F का पूर्ण समय अवकलज होना चाहिए ।* अतएव हम निम्नलिखित रख देते हैं

$$(11) \quad \sum p_k \dot{q}_k = \sum p_k \dot{Q}_k + \frac{d}{dt} F(q, Q).$$

यह F स्वेच्छ है । यही ऊपर कहा हुआ रूपांतरण (9) पर लगानेवाला निरोध है ।

समीकरणों (10) और (11) के (5) में प्रतिस्थापन में अतिरिक्त पद $\frac{dF}{dt}$ समा-कलन और तदनंतर परिणमन में, शून्य हो जाता है, क्योंकि सिरों (के बिंदुओं) पर δq और δQ शून्य हो जाते हैं । अतएव समी० (5) अपना पहले का रूप कायम रखता है और निम्नलिखित हो जाता है

$$\delta \int \{ \bar{H}(Q, P) - \sum p_k \dot{Q}_k \} dt = 0.$$

* यदि F' प्रारंभ में q और p के फलन की भाँति दिया हुआ हो तो निस्संदेह उसे प्रथम समी० (9) द्वारा p के लिए हल कर सकते हैं और F' में प्रतिस्थापित कर सकते हैं । इस प्रकार q तथा Q का एक नया फलन F प्राप्त करते हैं ।

इसके सिवा रूपांतरणों (6) और (7) में भी कोई परिवर्तित नहीं होता। इससे परिणाम निकलता है कि नवीन परिणम्यों (चर-राशियों) में हेमिल्टन-समीकरणबुंद बंध रहते हैं। तो अब, समीकरणों (4) से पूर्ण सागत्य में हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$(12) \quad \dot{p}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}.$$

निरोध (11) लगाये हुए रूपांतरण (9) को वैषिक रूपांतरणबुंद या स्पर्श-रमक रूपांतरणबुंद कहते हैं।* पदचोक्त नाम का कारण ज्यामितीय है।

q_1, q_2, \dots, q_f के f विमितियों वाले आकाश में निम्नलिखित द्वारा दिये हुए एक, अतिपृष्ठ का ध्यान कीजिए—

$$(13) \quad z = z(q_1, q_2, \dots, q_f).$$

यहाँ नीचे दी हुई राशियाँ, अर्थात्

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

उक्त अतिपृष्ठ के स्पर्श-समतल का स्थान निर्धारित करती हैं और, कारण, इस समतल के निर्देशांकण समझी जा सकती है। अभियाचना यह है कि बिंदु q_k के निर्देशांकों तथा समतल p_k के निर्देशांकों के बीच यह प्रतिबंध हो कि,

$$(14) \quad dz = \sum_{k=1}^f p_k dq_k.$$

* ये दो वाक्य, कैनानिकल रूपांतरण बुंद, तथा कंटिक्ट रूपांतरण बुंद पूर्णतया समानार्थक नहीं कहे जा सकते। उनमें जो भेद है वह पारिभाषिक है। इस भेद पर चकने की आवश्यकता नहीं; केवल इतना कह देना चाहिए कि समुचित परिस्थितियों में दोनों रूपांतरण-बुंद एक-दूसरे की एक विशेष स्थिति के रूप में दिखलाये जा सकते हैं। देखिए उदाहरणार्थ Whittaker, *Analytical Dynamics* (Dover), Chapter XI; अथवा, Osgood, *Mechanics* (Macmillans), Chapter, XIV —अंग्रेजी अनुवादक

यह प्रतिबंध "रेखिक अल्पांशों के मिलन" का निश्चय करा देता है, अर्थात् निर्देशांकों Q_k वाले किसी भी बिंदु से पड़ोसी बिंदु तक जाने में निरंतरता रहती है। अब समी० (9) द्वारा नवीन निर्देशांकों Q_k, P_k का प्रवेश कराइए और (13) का इन नये निर्देशांकों के पदों में परिकलन कीजिए। समझिए कि परिकलन का फल हुआ—

$$z = Z(Q, P).$$

अब हम यह अभियाचना करते हैं कि यह नया पदपुंज भी एक अतिपृष्ठ निरूपित करे जिसे Q द्वारा निर्धारित बिंदुओं पर निर्देशांक P वाले निर्देशांक से स्पर्श करे। अतएव (14) से हमें प्राप्त करना होगा—

$$(15) \quad dZ = \sum_{k=1}^f P_k dQ_k,$$

या, यदि ρ को समानुपात-गुणनखंड ले लें तो

$$(16) \quad dZ - \sum P_k dQ_k = \rho(dz - \sum p_k dq_k).$$

अतएव, बिंदु के रूपांतरण में, किसी दिये हुए बिंदु पर पृष्ठ तथा उसके स्पर्श-समतल की स्पर्शता परिरक्षित रही है। अब प्रतिबंध (16) की समी० (11) से तुलना कीजिए।

(16) को dt से गुणा करने पर उसे यों लिख सकते हैं —

$$(16a) \quad \sum p_k dq_k = \sum P_k dQ_k + dF.$$

यदि (16a) में $dF = dz - dZ$ रख दे और (16) में $\rho = 1$, तो दोनों प्रतिबंध एक जैसे हो जाते हैं। इस प्रकार "स्पर्शत्मक रूपांतरण" वाला नाम काफी ठीक ही ठहराया हुआ समझा जा सकता है।

समीकरणों (9) जैसी व्यापकता वाले रूपांतरणों में P_k ओं का सवेग के घटक-वृद्ध होने का तात्पर्य छिप गया है। इस कारण हम P_k, Q_k ओं को वैधिक परिणम्य कहना अधिक पसन्द करते हैं, और तब P_k, Q_k वैधिकतया संयुग्मी' कहे जाते हैं। कारण कि हैमिल्टन के समीकरण (निरोध (11) के साथ) रूपांतरणों (9) में अपरिणम्य हैं, उन्हें बहुधा हैमिल्टन के वैधिक समीकरण कहते हैं।

वैधिक रूपांतरणों के अधीन इस अपरिणम्यता के कारण ही हैमिल्टन-समीकरणों के खगोलविद्या संबंधी स्थान-व्युत्तिसिद्धान्त में विशेष गौरव है। गिब्ब^१ की सांख्यिकीय यांत्रिकी में भी वे महत्वपूर्ण भाग लेते हैं। इस विषय पर विचारविवेचन इस माला की पंचम पुस्तक में होगा।

हैमिल्टन-समीकरणों की इस विवृति को हम ऊर्जा-सिद्धान्त के बारे में एक बात कह कर समाप्त करेंगे।

समी० (२) से सहमत होते हुए, व्यापकतया,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

(४) के अनुसार, कोष्ठक समी० k के लिए शून्य होता है। तो व्यापकतया हम प्राप्त करते हैं —

$$(17) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

विशेष करके, यदि H सुव्यक्ततया t पर नहीं निर्भर करता, तो निम्नलिखित संरक्षण (अविनाशित्व) नियम की प्राप्ति होती है

$$(18) \quad \frac{dH}{dt} = 0, \quad H = \text{नियत}.$$

यह नियम ऊर्जा के अविनाशित्व (संरक्षण) वाले नियम से अधिक व्यापक है, क्योंकि (I) तथा (Ic) के अनुसार, वह कहता है कि

$$(18a) \quad \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - L = \text{नियत},$$

जहाँ L को t पर सुव्यक्ततया निर्भर नहीं करना होगा, परंतु अन्यथा वह बिल्कुल कुछ-भी (अर्थात् स्वेच्छ,) हो सकता है। पष्ठ अध्याय की पाठटिप्पणी, पृ० २५५ में इसी नियम का उल्लेख हुआ है। समी० (18a) से ऊर्जा के संरक्षण (अविनाशित्व) की प्राप्ति होती है, यदि L को दो अशदानों में विभक्त कर सके; एक तो \dot{q}_k ओ के द्वितीय घात में समाग गतिज भाग; और दूसरा इन q_k ओं से स्वतंत्र स्थितिज भाग।

§ ४२. राउय के समीकरण और चक्रीय निकाय गण

§ ३४ के समीकरणों (10) और (11) में हमने लाग्रान्ज के प्रथम और द्वितीय प्रकार के समीकरणों में निकले हुए एक मिश्रित प्रकार* के समीकरण पर विचार किया था। अब हम एक ऐसे मिश्रित प्रकार के समीकरण से परिचित होंगे जो लाग्रान्ज के द्वितीय प्रकार के और हैमिल्टन के समीकरणों के संयोग में निकलता है। इन नये प्रकार के समीकरणों का नाम राउय* परपत्र, 'ट्राइपन' के लिए "गृहनिधक" तथा परीक्षक के रूप में जिनका मिखा केम्ब्रिज विद्यापीठ में यांत्रिकी की शिक्षा पर दसकों तक जमा रहा। कुछ काल उपरांत हेल्महोल्ट्ज* में उन्हीं समीकरणों का विकास एक-चक्रीय तथा बहुचक्रीय निकायों के अपने बाद के मध्य में किया। ऊन्मागतिकी की भौतिक समस्याओं के माध्यम के लिए इन बाद का उपयोग करने का उनका विचार था।

निकाय की स्वतंत्रता-संख्याओं को दो वर्गों में विभक्त कर लेते हैं। एक वर्ग, जिसमें $f-r$ स्वतंत्रता संख्याएँ होंगी, लाग्रान्ज के स्थान तथा वेग निर्देशकों

$$q_1, q_2, \dots, q_{f-r}; \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{f-r}$$

द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। दूसरा, जिसमें r स्वतंत्रता संख्याएँ होंगी, हैमिल्टन के वैश्विक परिणम्यों

$$q_{f-r+1}, q_{f-r+2}, \dots, q_r;$$

$$p_{f-r+1}, p_{f-r+2}, \dots, p_f$$

के पदों में निरूपित होने की है। लाग्रान्जीय L या हैमिल्टनीय H के स्थान पर अब

*इस संबंध में राउय (Rouths) के *Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies* (बढ़ पिंडों के निकाय के गोस्की संबंधी ग्रंथ) का उल्लेख कर देना चाहिए जो दो भागों में है—I. प्रारंभिक भाग, II उच्चतर भाग। Problem of unique variety of richness संग्रह है। राउय ने अपने गतिकीय समीकरणों के गठन का विकास पहले पहल अपने एक पुरस्कार-निबंध, *A Treatise of Stability of a Given State of Motion* (किसी दो हुई गति की साम्यता संबंधी रचना) में किया था जो १८७७ में प्रकाशित हुआ था।

1. Helmholtz, Berliner Akad, (1884) तथा *Crelle's Journal f. Math* 97

एक राज्यफलन R की रचना करते हैं जिसे ऊपर गिनाये हुए $2f$ परिणम्यों का एवं, व्यापकता के लिए, समय का भी, फलन होना होगा। ती फलन होगा—

$$(1) \quad R(t, q_1, q_2, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{f-r}, p_{f-r+1}, \dots, p_f)$$

R निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित होगा—

$$(2) \quad R = \sum_{k=f-r+1}^f p_k \dot{q}_k - L(t, q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f).$$

देखिए कि $r=f$ के लिए R हैमिल्टनीय (4I.1) के में रूपांतरित हो जाता है तथा, $r=0$ के लिए दक्षिण ओर का योजन^१ शून्य हो जाता है और (चिह्न को छोड़कर) R लाग्रंजीय हो जाता है। प्रकटतया, R की परिभाषा (2) को हम तुल्यात्मक प्रतिबंध

$$(2a) \quad R = H(t, q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) - \sum_{k=1}^{f-r} p_k \dot{q}_k$$

द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते थे।

इसके आगे हम वैसे ही बढते हैं जैसे कि समीकरणों (4I.2) से (4I.4) तक। R के पूर्ण अवकल का गठन हम करते हैं, एक तो (1) से—

$$(3) \quad dR = \frac{\partial R}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^f \frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{f-r} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^f \frac{\partial R}{\partial p_k} dp_k;$$

और दूसरा (2) से,

$$(3a) \quad dR = \sum_{k=f-r+1}^f \dot{q}_k dp_k + \sum_{k=f-r+1}^f p_k d\dot{q}_k - dL.$$

dL के लिए पदपुंज (4I.2b) का उपयोग कर सकते हैं। अधिक स्पष्टता के लिए इसे हम निम्नलिखित में विघटित कर लेंगे—

$$(3b) \quad dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^f \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^{f-r} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^f p_k d\dot{q}_k$$

(3a) में का प्रतिस्थापन (3b) के अंतिम पद को (3a) के मध्यपद से कटवा देता है और निम्नलिखित रह जाता है

$$(4) \quad dR = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{k=1}^f \dot{p}_k dq_k - \sum_{k=1}^{f-r} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^f \dot{q}_k dp_k.$$

पद-प्रति-पद (3) से तुलना करने पर मिलता है

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

तथा निम्नलिखित समीकरणों की अनुमूची—

$k=1,2,\dots,f-r$ के लिए	$k=f-r+1, f-r+2, \dots, f$ के लिए
(5) $\dot{p}_k = -\frac{\partial R}{\partial q_k}$ $p_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}$	$\dot{p}_k = -\frac{\partial R}{\partial q_k}$ $\dot{q}_k = -\frac{\partial R}{\partial p_k}$

बायी ओर के $f-r$ समीकरण लाग्रान्ज प्रकार के हैं, जहाँ $L = -R$; एवं दायी ओर के r समीकरण हैमिल्टनीय प्रकार के हैं, जिनमें $H = R$.

इन समीकरणों के मूत्रीकरण के समय राउथ का विचार उनका चक्रीय निकायो के सवध में अनुप्रयोग करने का था। यह अनुप्रयोग यो चलता है—मान लेते हैं कि द्वितीय वर्ग के निर्देशांक चक्रीय हैं, जिस कारण पृ० २६६ से वे लाग्रान्जीयो में नहीं आते; इस स्थिति में वे राउथ-फलन में भी नहीं होते। तब सहायक p_k निश्चर (नियत) रहते हैं (राउथ के समीकरणों (5) के दक्षिणी वर्ग के ऊपर वाले समीकरण से, अथवा, जैसा कि पृ० २६६ पर कहा था, लाग्रान्ज के समीकरणों से)। तो p_k ओं के इन निश्चर मानों की तथा समी० (4I.1c) की सहायता से, समी० (2) के समागत (व्यापकतया स्वेच्छ) \dot{q}_k के मानों की भी प्रतिस्थापित कर सकते हैं। इस प्रकार एक राउथ-फलन प्राप्त होता है, जो प्रथम वर्ग के q_k तथा \dot{q}_k के केवल $f-r$ निर्दे-

शाकों पर ही निर्भर रहता है। इन निर्देशांकों के लिए ऊपर दिये हुए समी० (5) का बायें वर्ग वैध है। अतएव इस प्रकार प्रस्तुत समस्या को लाग्रान्ज-प्रकार के $f-r$ समीकरणों में लघुकृत कर लिया है।

राउय ने अपनी विधि का उपयोग मुख्यतया दी हुई गति की दशाओं की स्थायित्व संबंधी कठिन समस्या में किया था। इसके स्थान में हम इस विधि को एक यथोचित सरल उदाहरण, स-समिति-लट्टू के दृष्टान्त द्वारा निर्दिष्ट करेंगे। इस द्विगुणित चक्रीय समस्या के चक्रीय निर्देशांकवृंद यूक्लीय कोणद्वय ϕ और ψ है। समीकरणों (35.15) से (35.17) के अनुसार,

$$\begin{aligned} p\dot{\phi}\dot{\phi} + p\dot{\psi}\dot{\psi} &= \\ M'' \left(\frac{M''}{I_2} - \cos \theta \frac{M' - M'' \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \right) \\ &+ M' \frac{M' - M'' \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{M''^2}{I_2} + \frac{(M' - M'' \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

तो, (35.13) के प्रभाव से राउय-फलन निम्नलिखित हो जाता है

$$\begin{aligned} R &= \frac{M''^2}{I_2} + \frac{(M' - M'' \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} - \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{(M' - M'' \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} \\ &\quad - \frac{M''^2}{2I_2} + P \cos \theta \\ &= -\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \Theta(\theta), \quad \Theta = \frac{M''^2}{2I_2} + \frac{(M' - M'' \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + P \cos \theta. \end{aligned}$$

तो, $p_\theta = 0$ के साथ, ऊपर दी हुई अनुसूची (5) के बायें वर्ग का निचला समीकरण प्रदान करता है—

$$p_\theta = I_1 \dot{\theta},$$

और उसी वर्ग का ऊपर वाला समीकरण देता है—

$$(6) \quad I_1 \ddot{\theta} = -\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$$

जो स्वाभाविकतया “व्यापकीकृत गोलक समीकरण” (35.19) में महमन है। यह दृष्टांत राउथ-विधि की उपयोगिता निर्दिष्ट कर सकेगा। विशेषतया प्रस्तुत किये हुए दृष्टांत से अधिकतर कठिन उदाहरणों में।

मन् १८९१ में वोल्त्जमान^१ ने म्यूनिख विद्यापीठ में मैक्सवेल^२ के वैद्युत-चुम्बकीय याद पर कई व्याख्यान लगातार दिये जिनमें के प्रारम्भिक व्याख्यानों को दो वैद्युत-परिणामों के बीच अन्योन्य प्रेरणीय प्रभाव का निर्दिष्ट करने के लिए उन्होंने एक द्विगुणित चकीय यांत्रिक निकाय का सविस्तर विचार करने में समर्पित किया था। निदर्शनार्थ एक विशेषतया तैयार की हुई यंत्र-गचना थी जिसमें मुख्यतया अपकेन्द्र नियंत्रकों में युक्त, भिन्न दिशाओं में घूमनेवाले, कोंर मारे हुए दंतुर पत्रियों के दो जोड़े थे। सायधानता पूर्वक बनाया हुआ यह प्रतिमान हमारे इन्स्टीट्यूट^३ के सप्रहालय (अजायब-घर) में परिरक्षित है। हम लोगों को यह सब स्वयं मैक्सवेल के याद (ध्यूरी) से, जिसको उन्हें निर्दिष्ट करना था, कहीं अधिक पेशीला ज्ञात हुआ था। अतएव हम इस याद (ध्यूरी) के स्पष्टीकरण के लिए उसका उपयोग न करेंगे, किन्तु इसके स्थान पर अनिवार्य मुख्यावयवों में उसमें बहुत कुछ मिलते-जुलते, मोटरगाड़ी के डिफरेंशियल^४ सन्धी एक अनुशीलन का समस्या VI. 5 में लाभ उठावेंगे।

अब आइए अतत उस गणितीय अनुष्ठान का, जिसने हमें लाग्रान्ज-समीकरणों से हैमिल्टन और राउथ के समीकरणों तक पहुँचाया, हम दो परिणम्यों (या परिणम्यों के दो जुटों) x और y के एक फलन Z पर विचार करते हैं और समझ लेते हैं कि—

$$(7) \quad dZ(x,y) = Xdx + Ydy.$$

यदि x,y को स्वतंत्र परिणम्यों की भाँति X,Y द्वारा प्रतिस्थापित करना चाहे तो Z के स्थान पर निम्नलिखित “रूपभेद किये हुए फलन” पर विचार करते हैं—

$$(8) \quad U(X,Y) = xX + yY - Z(x,y)$$

वास्तव में (7) के विचार से (8) का अवकलन तुरत ही देता है

$$(9) \quad dU(X,Y) = x dX + y dY$$

समीकरणद्वय (7) और (9) निम्नलिखित “पारस्परिकता सबधों” के सर्वसम हैं—

1. Boltzmann 2. Maxwell

3. Institute, संस्थान 4. Differential, एक वैद्युत्कारक योन्त्र (दंतुर पहिया)

$$(10) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = Y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = x, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = y.$$

यदि, दूसरी ओर, प्रारंभ के परिणम्यों में से केवल एक को ही, कहिए कि y को, उसके "वैधिकतया संयुग्मी" Y द्वारा प्रतिस्थापित करना चाहें तो (8) का निम्नलिखित में "रूपभेद" करना होगा—

$$(11) \quad V(x, Y) = yY - Z,$$

जो प्रदान करता है

$$(12) \quad dV(x, Y) = -Xdx + ydY,$$

और, साथ ही, निम्नलिखित "पारस्परिकता संबंधगण" भी

$$(13) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = y.$$

Z से U के रूपांतरण की तुलना लाग्रान्ज से हेमिल्टन को रूपांतरण से की जा सकती है और Z से V के रूपांतरण की लाग्रान्ज से राउय को रूपांतरण से।

इस प्रकार का स्वतंत्र परिणम्यों का परिवर्तन और लाक्षणिक फलन का आनु-पंगिक रूप-भेद लाग्रान्ज रूपांतरण कहलाता है और वैश्लेषिक गणित में विस्तृत भाग लेता है। यहाँ पर उसका उल्लेख मुख्यतया इसलिए किया गया है कि आगे चलकर (पंचम ग्रंथ में) ऊष्मागतिकी के अपने अध्ययन में उससे काम लेना होगा।

§ ४३. अपूर्णपदीय वेग-परामितियों के अवकल समीकरणबंध

अब तक जिन अवकल समीकरणों पर विचार किया गया है वे सब व्यापकीकृत निर्देशांकों सबधी लाग्रान्ज-समीकरणों के नमूने के थे, परंतु नचाने के लट्टू के बाद (थ्यूरी) ने हमारा संपर्क बिल्कुल भिन्न प्रकार के, बहुत सरलतर गठन के, समीकरणों से कराया, अर्थात्, कोणीय वेगों ω_1 , ω_2 और ω_3 के गूलर-समीकरणों (26.4) से। तो आइए निर्धारित करें कि लाग्रान्ज-समीकरणों से उनका क्या संबंध है। दोनों प्रकारों का भेद इस तथ्य से निकलता है कि ω_1 , ω_2 , ω_3 पूर्णपदीय निर्देशांकगण नहीं हैं जैसे कि θ , ψ , ϕ हैं, किंतु इनके रेखिक फलन हैं जो समय (t) के लिए समा-कलनीय नहीं। उनके बीच का संबंध समी० (35.II) देता है। तो तुरत ही असंमित लट्टू पर विचार करिए जिसकी गतिज ऊर्जा है—

$$(1) \quad T = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2);$$

और, संक्षिप्तता के लिए, बिना बलों के अधीन लट्टू की स्थिति पर ही विचार कीजिए।

निम्नलिखित ϕ -निर्देशांक के लिए हम लाग्रान्ज-समीकरण से प्रारंभ करते हैं—

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0.$$

समी० (35.II) के अनुसार,

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\phi}} = 1,$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} = \omega_2, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} = -\omega_1, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} = 0.$$

अतएव, (1) के विचार से,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\phi}} + I_2 \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\phi}} + I_3 \omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\phi}} = I_3 \omega_3,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = I_1 \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} + I_2 \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} + I_3 \omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2.$$

तो अब (2) से प्राप्त करते हैं

$$(3) \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2.$$

यह तृतीय यूलर समीकरण (26.4) है।

ऐसा ही परिकलन θ -निर्देशांक के लिए प्रदान करता है—

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\theta}} = \cos \phi, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\theta}} = -\sin \phi, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi,$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \theta} = -\dot{\psi} \sin \theta.$$

समी० (1) से हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \omega_1 \cos \phi - I_2 \omega_2 \sin \phi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (I_1 \omega_1 \sin \phi + I_2 \omega_2 \cos \phi) \dot{\psi} \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\psi} \sin \theta.$$

अतएव लाग्रेंज समीकरण

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

निम्नलिखित हो जाता है—

$$\begin{aligned} 0 = & I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \cos \phi - I_1 \frac{d\omega_2}{dt} \sin \phi \\ & - I_1 \omega_1 \sin \phi (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \\ & - I_2 \omega_2 \cos \phi (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \\ & + I_3 \omega_3 \dot{\psi} \sin \theta. \end{aligned}$$

परंतु, (35.11) के अनुसार,

$$\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \omega_3, \quad \dot{\psi} \sin \theta = \omega_1 \sin \phi + \omega_2 \cos \phi,$$

जिस कारण (5) के अंतिम तीन पदों के स्थान पर लिख सकते हैं—

$$(I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \sin \phi - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \cos \phi;$$

और, प्रथम दो पदों को इनसे जोड़कर, प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned} (6) \quad 0 = & \left\{ I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \right\} \cos \phi \\ & - \left\{ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \right\} \sin \phi. \end{aligned}$$

अतः, लाग्रेंज-समीकरण,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,$$

परिणामों के उपयुक्त रूपांतरण के बाद और (3) के विचार से, निम्नलिखित हो जाता है—

$$(7) \quad O = \left\{ I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \right\} \sin \phi \\ - \left\{ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \right\} \cos \phi$$

(6) और (7) से परिणाम निकलना है कि दोनों $\{ \}$ को अवश्यमेव शून्य हो जाना चाहिए, जिस कारण हम प्रथम और द्वितीय यूलर समीकरण (26.4) प्राप्त करते हैं।

एक विशिष्ट दृष्टांत के लिए जो स्पष्टीकरण किया है, वह बिल्कुल व्यापकतया उस स्थिति के लिए भी किया जा सकता है, जब स्वेच्छ मर्यादा की अपूर्णपदीय वेग-परामितियाँ हों जो वास्तविक वेग-निर्देशकों के रैखिक (या अधिकतर) व्यापक फलनों द्वारा निश्चित हों।* यदि, जैसे कि दृढ़ पिंड के लिए, इन परामितियों में व्यक्त की गयी गतिज ऊर्जा एक विशेषतया सरल रूप धारण करे, तो गति समीकरणों के समाकलन के लिए इस प्रकार के रूपांतरण अपूर्वतया बहुमूल्य हो सकते हैं। वे इसलिए भी उपयोगी हो सकते हैं कि वे अपूर्णपदीय प्रतिबंधों को भी सतुष्ट कर सकते हैं। बोल्जमान¹ ने अपूर्णपदीय वेगों के सगत घूर्णनों के घटकों को गैसों के गत्यात्मक सिद्धांत में प्रवेश कराना आवश्यक समझा था। इन घटकों को उन्होंने "घूर्णमि" नाम दिया था।

§ ४४. हेमिल्टन-याकोबी समीकरण

पिछली शताब्दी के प्रारम्भ में सैद्धांतिक भौतिकी का सर्वाधिक महत्त्व का प्रश्न था, "प्रकाश का तरंगात्मक वाद किंवा कणात्मक² वाद?" तरंगात्मक वाद की नींव हाइगेंस³ ने डाली थी और, उल्लिखित काल में टॉमस यंग⁴ के व्यतिकरण संबंधी दृष्टिपर्य के आविष्कार ने उसका पुष्टीकरण किया। दूसरी ओर, कणात्मक वाद को न्यूटन का समर्थन प्राप्त था जो देखने में उस समय आधिकारिक ही प्रतीत होता था। उसी समय हेमिल्टन,⁵ खगोलज्ञ तथा गणित के परम विवेचक, आलोक यंत्रों में प्रकाश-

*. मिलाइए, विशेषकर, G. Hamel, *Math. Ann.* 59, (1904) तथा *Sitzungsber. der Berl. Math. Ges.* 37, (1938) और भी देखिए, *Enzykl. d. Math. Wiss.* IV. 2. Art. Prange No. 3. and ff.

1. Boltzmann 2. Corpuscular theory 3. Huygens

4. Thomas Young 5. W.R. Hamilton

किरणों के पथों के अध्ययन में निरत थे। इन अध्ययनों के परिणाम १८२७ में प्रकाशित होने लगे।* लगभग उसी समय तरंगात्मक आलोकिकी^१ के दो प्रधानतम प्रतिपादकों फ्राउनहोफर^२ और फ्रेनल^३ की मृत्यु प्रायः एक जैसी ही अल्पवयु में हुई। हैमिल्टन का व्यापक गतिकी संबंधी कार्य कुछ बाद में हुआ, परंतु किरण-आलोकिकी^४ पर उनके अनुसंधानों से उसका अंतरंग संबंध है।† प्रस्तुत प्रकरण में इसी गतिकी संबंधी कार्य के फलों का छोटा-सा संक्षेपण दिया जायगा।

आइए, अवान्तर रूप से, यह भी कह दें कि प्लाक द्वारा क्रिया के मौलिक क्वांटम के आविष्कार के बाद अब उपर्युक्त प्रश्न भिन्नतया रखा जाना चाहिए। अब यह नहीं पूछते कि “तरंग या कण?”; वरन् कहते हैं कि “तरंग एवं कण!” प्रथम दृष्टि में तो, प्रतीयमान परस्पर-विरोधी इन दो भावनाओं में सामञ्जस्य स्थापित कराना असंभव जान पड़ता है। वास्तव में वे आलोकिकी एवं गतिकी दोनों के ही परस्पर-विरोधी नहीं, वरन् पूरक पार्श्व हैं। जैसा कि श्राडिगर ने स्वीकार किया है, हैमिल्टन के विचारों के तर्कसंगत विस्तरण से उनके तयकथित विरोध का शमन हो जाता है और वह हमें तरंगात्मक किंवा क्वांटमात्मक यांत्रिकी तक पहुँचा देता है।

किरण-आलोकिकी प्रकाश-कणों की यांत्रिकी है। आलोकीयतया विपरीत माध्यमों में इन कणों के पथ सर्वदा ऋजु-रेखीय ही कदापि नहीं होते, वरन् हैमिल्टन के साधारण अवकल समीकरणों द्वारा निर्धारित किये जाते हैं, या हैमिल्टन के सिद्धान्त द्वारा; और यह सिद्धान्त उन समीकरणों के समतुल्य ही है। दूसरी ओर, तरंगात्मक आलोकिकी के दृष्टिकोण से, प्रकाश-किरणें तरंग-मूर्ष्टों या तरंगार्थों की परंपरा के लंबकोणिक

* *Treatises on ray optics*, (किरण-आलोकिकी संबंधी रचनाएँ), *Trans Roy. Irish Acad.* 1827; तथा 1830 और 1832, के शेष पूरक। गतिविज्ञान संबंधी उनकी कृति (work) 1834 तथा 1835 के *Trans. Roy. Soc. London*, में प्रकाशित हुई।

1. Wave optics 1. Fraunhofer

3. Fresnel 4. Ray optics

‡ याकोबी कृत इस विषय के सूत्रोक्ति में यह संबंध खो गया है। 1891 में F. Klein, (क्लाइन) ने उसका फिर से उद्धार किया (देखिए *Naturforscherges. in Halle; Ges., Abhandlt.* Vol. II pp. 601, 603)।

प्रक्षेप पथों द्वारा दी जाती है।* हार्मिज सिद्धान्तानुसार ये तरंगग्रहण समांतर पृष्ठ बृंद होते हैं। हैमिल्टन ने इस तरंग-पृष्ठ-परिवार को एक (वाच्यतया आशिक) अवकल समीकरण द्वारा निरूपण करने का तथा इस विधि का बहुविधमतीय आकाश में किसी-भी यांत्रिक निकाय के q_k ओं को विम्बरण करने का भार उठाया। जैसा कि हम देखेंगे, तरंग-पृष्ठों का परिवार S =नियत द्वारा दिया जाता है, जहाँ S समी० (37.1) का लघुतम क्रिया-फलन है। इन पृष्ठों के लवकोणिक प्रक्षेपपथवृंद निम्नलिखित समीकरण द्वारा निर्धारित किये जाते हैं—

$$(1) \quad pk = \frac{\partial S}{\partial q_k}$$

अब इसका अनुप्रयोग अविनाशी अर्थात् संरक्षित एवं क्षयशील निकायों के लिए करेंगे।

(१) संरक्षित निकायवृंद

पहले ऐमा निकाय लेते हैं जिसमें ऊर्जा संरक्षित है और एक गतिज अंश T तथा एक स्थितिज अंश V में विघटित की जा सकती है। अतएव T , V और H , इनमें का कोई भी t पर सुव्यक्ततया नहीं निर्भर करता।

आरंभ हम समी० (37.9) से करते हैं और उसके दक्षिणांग के δW को

$$-\delta V = \delta(T - E) = \delta T - \delta E$$

द्वारा प्रतिस्थापित कर लेते हैं। तो (37.9) का दक्षिणांग निम्नलिखित हो जाता है—

$$(2) \quad 2\delta T + 2T \frac{d}{dt} \delta T - \delta E.$$

तदुपरांत उस समीकरण के वामांग को व्यापकीकृत निर्देशकों p, q में रूपांतरित कर लेते हैं। यो—

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \sum p_k \delta q_k.$$

तो (3) और (2) का समीकरण प्रदान करता है

*यह आलोकोपतया समदिक् माध्यमों के लिए ही ठीक है। मणिभों अर्थात् क्रिस्टलों जैसे विषमदिक् माध्यमों में फिरण और तरंगग्रह के बीच की लंब कोणिकता साधारण युक्लिदीय नहीं रहती वरन् अन युक्लिदीय, (generalised tensor orthogonality) व्यापकीकृत टेन्सर लंब कोणिकता होती है।

$$(4) \quad 2\delta T + 2T \frac{d}{dt} \delta T - \delta E = \frac{d}{dt} \sum p_k \delta q_k.$$

समी० (4) का सीमाओं q और t के बीच t के लिए हम कलित कर लेते हैं, तो प्राप्त करते हैं

$$(5) \quad \delta S - t \delta E = \sum p \delta q - \sum p_0 \delta q_0,$$

जहाँ S तो समी० (37.1) द्वारा निश्चित है और p_0 तथा δq_0 समाकलन की नीचे वाली सीमा $t=0$ के लिए हैं, p तथा δq ऊपर की सीमा t के लिए।

समी० (5) इंगित करता है कि क्रिया-समाकल S को आदि-स्थान q_0 अंतस्थान q तथा ऊर्जा E का फलन समझना चाहिए, अर्थात् हमें समय t के स्थान में स्वेच्छया अम्यपित पूर्ण ऊर्जा E का परिणम्य (चर राशि) की भाँति उपयोग करना पड़ेगा।

$$(6) \quad S = S(q, q_0, E).$$

तो, (5) के अनुसार, समय के फलन की भाँति गति यों दी जायगी

$$(7) \quad t = \frac{\partial S}{\partial E},$$

जहाँ q और q_0 स्थिर रखे जाते हैं। यदि इसके स्थान में E स्थिर रखी जाय और q किवाँ q_0 का परिणमन करें, तो (5) प्रदान करता है—

$$(8) \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad p_0 = - \frac{\partial S}{\partial q_0}.$$

इनमें का प्रथम संबंध ऊपर दी हुई अम्युक्ति, समी० (6) से, सहमत है। रहा दूसरा, उसे शीघ्र ही एक अधिकतर सुभीते के गठन में रूपांतरित कर देंगे।

मानना पड़ेगा कि जब तक S गठन (6) के रूप में न ज्ञात हो-तब तक गति का कुछ बहुत ज्ञान नहीं होता। परंतु ऊर्जा-समीकरण

$$H(q, p) = E$$

का स्मरण कीजिए। इसमें समी० (8) से p का मान प्रतिस्थापित कीजिए। तो प्राप्त होता है—

$$(9) \quad H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E.$$

समी० (9) को लाघणिक फलन S के निर्वाक समीकरण की भाँति समझते हैं।

ल्टन-याकोबी समीकरण कहते हैं। T यदि p के द्वितीय घात में समाग हो (V को p से स्वतंत्र मान सकते हैं) तो वह द्वितीय घात और प्रथम कोटि का होगा।

मान लीजिए कि हमने इस समीकरण का पूर्ण समाकल प्राप्त कर लिया है, अर्थात् ऐसा साधन जिसमें अभ्यर्पणीय नियताकों की सख्या समस्या की स्वतंत्रता-सख्याओं की सख्या के बराबर है। इन नियताकों को

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$$

कहिए। कारण कि S समी० (9) में नहीं आता, उसे (9) के द्वारा केवल एक योग-नीय (सकाली) नियताक तक ही निर्धारित कर सकते हैं। अतएव ऊपर दिये हुए समाकलन में का एक, कहिए कि α_1 , फाजिल है और उसके स्थान पर एक ऐसा योगात्मक नियताक रख सकते हैं जो अनभ्यर्पित रहता है। तो α_1 को अपनी ऊर्जा-परामिति E द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं, जिस कारण पूर्ण समाकल यों लिखा जा सकता है—

$$(10) \quad S = S(q, E, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_f) + \text{नियताक}$$

ऐसे संपूर्ण साधन की प्राप्ति के लिए जो चिरसम्मत विधि है वह परिणम्यों के पूर्यकरण की विधि है। वह ऐसी विधि है जो बहुधा, परंतु सर्वदा नहीं, अनुप्रयोजनीय है। इस विधि की चर्चा हम § ४६ में करेंगे। § ४५ में हम दिखावेगे कि समी० (10) निकाय की गति का ज्ञान कैसे कराता है।

(२) क्षयशील निकाय

अब हम यह व्यापक दृष्टिकोण लेंगे कि लाग्रांजीय L और इसलिए हैमिल्टनीय H भी t पर निर्भर करते हैं। इस स्थिति में, व्यापकतया, L और H को T तथा V में विघटित करना असम्भव होता है। यदि किसी विशेष स्थिति में कुछ स्थितिज ऊर्जा V हुई भी, तो उसे समय पर निर्भर करना पड़ता है। यह स्थिति खगोल विद्या की तथा क्वांटमयांत्रिकी की स्थान-व्युत्ति समस्या के लिए महत्वपूर्ण है। उस स्थिति में कोई ऊर्जा सिद्धांत नहीं रहता और इसलिए कोई पूर्ण ऊर्जा नियताक p भी नहीं होता। परिणाम यह होता है कि हम लघुतम-क्रिया-सिद्धांत का उपयोग नहीं कर सकते और हमें हैमिल्टन-सिद्धांत की शरण लेनी पड़ती है। अतः हैमिल्टन सिद्धांत में आये हुए समाकल द्वारा प्रदत्त एक लाक्षणिक फलन S^* को निश्चित करना होता है। यो—

$$(11) \quad S^* = \int_{t_0}^t L dt,$$

और S^* को आदि तथा अंत के स्थानों तथा यात्रा-काल t के फलन की भांति समझना होता है, अर्थात्

$$(12) \quad S^* = S^*(q, q_0, t).$$

इसकी समी० (6) से तुलना करनी है जिसमें (प्रस्तुत स्थिति में अनुपस्थित) निश्चर पूर्ण ऊर्जा E ने t का स्थान लिया था।

तो आइए पहले (11) के द्वारा $\frac{dS^*}{dt}$ का गठन करें—

$$(13) \quad \frac{dS^*}{dt} = L,$$

तदुपरांत (12) की सहायता से, प्राप्त होता है—

$$(14) \quad \frac{dS^*}{dt} = \sum \frac{\partial S^*}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \sum p_k \dot{q}_k + \frac{\partial S^*}{\partial t}.$$

निम्नलिखित संबंध (15) जो (8) का समघर्मी है और जिसका यहाँ उपयोग हुआ है,

$$(15) \quad p_k = \frac{\partial S^*}{\partial q_k}$$

सहज में ही सत्यापित किया जा सकता है। केवल मात्र (11) का q_k के लिए अवकल निकालिए और समी० (41, I c) का स्मरण कीजिए।

तो अब (41-I) वाली H की व्यापक परिभाषा के विचार से, (13) और (14) की तुलना प्रदान करती है—

$$(16) \quad \frac{\partial S^*}{\partial t} + H = 0.$$

अतएव समी० (15) से हम प्राप्त करते हैं

$$(17) \quad \frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S^*}{\partial q}, t\right) = 0.$$

८.४५ हैमिल्टन याकोबी समीकरण के समाकलन के लिए याकोबी का नियम ३१७

यह है व्यापक रूप में हैमिल्टन-याकोबी समीकरण । इसमें हमारा पहले का समीकरण (९) एक विशेष स्थिति की भांति सम्मिलित है । इस बात को सिद्ध करने के लिए मान लीजिए कि, पृ० ३१४ के (१) की भांति, H स्वतंत्र है t से । तो (१७) से निकलता है कि t में S^* रैखिक है । अतएव हम रख लेते हैं कि

$$S^* = at + b$$

और (१६) से ज्ञात होता है कि $-a = H$, अर्थात् ऊर्जा नियतांक E के बराबर जो अब विद्यमान है । b हमारे पुराने लाक्षणिक फलन S के सर्वसम सिद्ध होता है । इस प्रकार प्रस्तुत स्थिति में (१७) का केवलमात्र विशेष रूप (९) ही रह जाता है ।

पिछले उपप्रकरण (१), पृ० ३१४, में जो कुछ (९) के समाकलन के बारे में कहा था, वह अधिकतर व्यापक समी० (१७) को भी उतना ही लागू है । इसके पूर्ण समाकल में अब $f+1$ नियतांक होते हैं, जिनमें का एक फिर योगनीय होगा तो (१०) के स्थान में अब हम लिख सकते हैं

$$(18) \quad S^* = S^*(q, t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f) + \text{नियतांक} ।$$

§ ४५ हैमिल्टन-याकोबी समीकरण के समाकलन के लिए याकोबी का नियम

समीकरणों (४४.८) के संबन्ध में हमने कहा था कि इनमें के दूसरे का समाकलन तत्क्षणात् नहीं किया जा सकता । इसका कारण यह है कि हमने अपने आंशिक अवकल समीकरणों का समाकलन (४४.६) के रूप में नहीं, किन्तु क्रमात्, (४४.१०) और (४४.१८) के रूपों में किया था । समी० (४४.७) में

$$(1) \quad t = \frac{\partial S}{\partial E} .$$

दूसरी ओर, हमने एक ऐसा समीकरण प्राप्त किया था, जो सीधे ही सीधे, समय में गति का वर्णन करता था । अब यह सिद्ध करेंगे कि यदि S का E के लिए नहीं, उसके स्थान पर, समाकलनाकों, $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_f$, के लिए अवकलन करें तो निम्नलिखित समीकरणों की प्राप्ति होती है—

$$(2) \quad \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}, \quad k=2, 3, \dots, f.$$

ये समीकरण निकाय के पथ की ज्यामितीय रूप-रचना बताते हैं, वशात् कि β_k को समाकलनाकों का एक दूसरा जुड़ समझें । यह है याकोबी का नियम पिछले प्रकरण की

स्थिति (1) के लिए। स्थिति (2) में तो यह और भी सरल निम्नलिखित रूप धारण कर लेता है—

$$(3) \quad \beta_k = \frac{\partial S^*}{\partial x_k}, \quad k=1, 2, \dots, f.$$

यहाँ एक-जैसी रचना के ये f समीकरणवृंद हैं जो निकाय की गति को कालात्मक एवं स्थानात्मक दोनों भागें देते हैं।

ऐसी ही सरलता का स्थिति (1) में भी हम प्रवेग करा सकते हैं यदि औपचारिक तया लिख लें कि—

$$(3a) \quad \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1},$$

जहाँ हमने $t = \beta_1$ और $E = x$ रख लिया है।

केवल स्थिति (1) के लिए ही इसे सिद्ध करेंगे। स्पर्शात्मक रूपांतरण की परिभाषा (41-11) का स्मरण कीजिए। आगे कही जानेवाली बातों के लिए इसे यों लिख लेंगे—

$$(4) \quad dF(q, Q) = \sum p_k dq_k - \sum \dot{P}_k dQ_k$$

इसकी तुलना लाक्षणिक फलन (44.10) के (निम्नलिखित) पूर्ण अवकल से कीजिए—

$$dS(q, E, \alpha) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial S}{\partial E} dE + \sum_{k=2}^f \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} d\alpha_k,$$

जो (44.8) और (2) से प्रतिस्थापन करने के बाद, इस प्रकरण का (3a) हो जाता है,

$$(5) \quad dS(q, \alpha) = \sum_{k=1}^f p_k dq_k + \sum_{k=1}^f \beta_k d\alpha_k$$

यह समीकरण समी० (4) से सहमत है यदि

$$(6) \quad F \text{ को } S \text{ के, } Q_k \text{ को } \alpha_k \text{ के, } P_k \text{ को } -\beta_k \text{ के}$$

सर्वसम समझ लें। अब हम जानते हैं कि प्रतिबंध (4) सतुष्ट करते हुए, एक रूपांतरण $q_k p_k \rightarrow Q_k P_k$ द्वारा हेमिल्टन समीकरणवृंद (41.4),

८.४१ हेमिल्टन याकोबी समीकरण के समाकलन के लिए याकोबी का नियम ३१३

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

से समीकरणों (4I.12)

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k}, \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}$$

को जा पहुँचते हैं। प्रस्तुत स्थिति में, (6) के विचार में, ये निम्नलिखित हो जाते हैं—

$$(7) \quad -\dot{\beta}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_k}, \dot{x}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k}.$$

परंतु (4I.10) से

$$\bar{H}(Q, P) = H(q, p),$$

या, (6) के प्रभाव से,

$$\bar{H}(\alpha - \beta) = E = x_1.$$

तो परिणाम निकलता है कि

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 & \text{for } k=1, \\ 0 & \text{for } k>1; \end{cases} \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k} = \begin{cases} 0 & \text{for } k=1, \\ 0 & \text{for } k>1. \end{cases}$$

इस प्रकार समीकरण (7) निम्नलिखित हो जाते हैं—

$$(10) \quad \dot{\beta}_k = \begin{cases} 1 & \text{for } k=1, \\ 0 & \text{for } k>1; \end{cases} \quad \dot{x}_k = \begin{cases} 0 & \text{for } k=1, \\ 0 & \text{for } k>1. \end{cases}$$

ये समीकरण α_k ओं के बारे में कोई नयी बात नहीं बताते, वे केवल इसी बात की पुष्टि कर देते हैं कि ये समाकलनाक हैं। यही बात β_1 के समीकरण के बारे में भी कही जा सकती है। $\beta_1 = 1$ से एक महत्वहीन योजनीय नियन्त्राक के भीतर ही भीतर केवल $\beta_1 = 1$ प्राप्त करते हैं, जो समी० (3a) को विचार में रखते हुए, कोई नयी बात नहीं है। दूसरी ओर, β_k ($k>1$) के लिए समीकरण बंद (10), याकोबी के नियम का प्रमाण प्रस्तुत करते हैं; वे कहते हैं कि α_k ओं की भाँति β_k भी समाकलन हैं।

यही उपपत्ति, बिना किन्हीं महत्वपूर्ण परिवर्तनों के, स्थिति (2) के लिए लागू की जा सकती है, बसतों कि स्पर्शात्मक रूपांतरण की परिभाषा को कुछ अधिक व्यापक कर ले। परंतु इस फल की यहाँ आगे कोई आवश्यकता न पड़ेगी, अतएव उसके कारण हम यह यहाँ और न रुकेंगे।

§ ४६ केपलर समस्या की चिरसम्मत तथा क्वांटम-तैद्धान्तिक विवृति

इस प्रकरण में हम दिखाना चाहते हैं कि किस भाँति समाकलन की हैमिल्टन-याकोबी विधि बिना किसी दुविधा के सीधे-सीधे खगोल विद्या की ग्रहीय समस्या के समाधान पर पहुँचा देती है। इसके अतिरिक्त हमें यह देख कर आश्चर्य होगा कि परमाणवीय भौतिकी की आवश्यकता के लिए यह विधि (मानों) जानबूझकर बनवायी गयी है और स्वाभाविक रूप से हमें (पुराने) क्वांटमवाद तक पहुँचा देती है।

विषय का आरंभ हम स्थिर M सूर्य वाले द्वि-पिंड की समस्या के निम्नलिखित ध्रुवी निर्देशांकों में व्यक्त लाग्रेंजीय से करते हैं—

$$(I) \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + G \frac{mM}{r}.$$

इससे हम घूर्णों का परिकलन करते हैं कि

$$(Ia) \quad p_r = m\dot{r}, \quad p_\phi = mr^2\dot{\phi}.$$

इनका (I) में परिस्थापन तथा स्थितिज ऊर्जा में चिह्न का परिवर्तन निम्नलिखित हैमिल्टनीय प्रदान करते हैं—

$$(Ib) \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\phi^2 \right) - G \frac{mM}{r},$$

और, (44.9) से, हैमिल्टन-याकोबी समीकरण मिलता है—

$$(2) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 = 2m \left(E + G \frac{mM}{r} \right).$$

आइए, इस उदाहरण में “परिणम्यों के पृथक्करण” वाली विधि का अनुप्रयोग करें जिसका उल्लेख पृ० ३१५ पर किया था।

अवकल समीकरण (2) को हल करने के लिए निम्नलिखित गठन के साधन से यत्न करते हैं—

$$(3) \quad S = R + \Phi$$

इसमें R केवल r पर और Φ केवल ϕ पर निर्भर करते हैं। यदि (2) के दक्षिण-पार्श्व को व्यापक फलन $f(r, \phi)$ द्वारा प्रतिस्थापित करें तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(3a) \quad \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\Phi}{d\phi} \right)^2 = f(r, \phi).$$

सामान्यतया, ऐसा संभव होता नहीं। परंतु यदि f ϕ से स्वतंत्र हो, जैसा कि प्रस्तुत

स्थिति में होता है, तो $\frac{d\Phi}{dr}$ को किसी नियतांक, कहिए कि C , के बराबर रख देते हैं, (इस C को "पृथक्करण नियतांक" कहते हैं)। तब R निम्नलिखित समीकरण से निर्धारित होता है—

$$(4) \quad \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = f(r) - \frac{C^2}{r^2},$$

जो क्षेत्रफलन^१ द्वारा निर्धारित किया जाता है जिनमें एक पूर्ण समीकरण मिलता है। यह अनुमान कि $f(r)$ में स्वतंत्र प्रकटनवा इस मध्य के मुख्य है कि प्रमुख स्थिति में ϕ चक्रीय है, अर्थात् यह अवकल समीकरण में मुख्यकलनवा नहीं होता। तो देखते हैं कि परिणम्यो के पृथक्करण की विधि दिव्य हुए, अवकल समीकरण के गमिति संयधी विगेर गुणधर्मों पर निर्भर करती है, गमितीय गुणधर्म जो बहुत, यद्यपि सर्वदा नहीं, पाये जाते हैं।

अब हम § ४५ के व्यापक रूप पर चलते हैं, C को α_2 के बराबर रख देते हैं और (२) का पृथक्करण यों करते हैं—

$$(5) \quad \frac{\partial S}{\partial \phi} = \alpha_2,$$

तथा

$$(6) \quad \frac{\partial S}{\partial r} = \left[2m \left(E + G \frac{Mm}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

समी० (५) कोणीय संवेग के संरक्षण (अविनाशित्व) का नियम है, अर्थात् केपलर का द्वितीय नियम पृथक्करण नियतांक, α_2 , निश्चर कोणीय संवेग है, जो समी० (६.२) में प्रयुक्त क्षेत्रफलीय वेगाक से सारतः संबंधित है। समी० (६) परिणम्य त्रिज्या संवेग^२ देता है।

लाक्षणिक फलन S के परिकलन के लिए, हम (५) तथा (६) का समाकल कर (३) का गठन करते हैं। E के स्थान पर α_1 रखकर हम प्राप्त करते हैं—

$$(7) \quad S = \int_{r_0}^r \left[2m \left(\alpha_1 + G \frac{Mm}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} dr + \alpha_2 \phi + \text{नियतांक}.$$

समाकलन की निचली सीमा स्वेच्छतया कुछ भी निर्वाचित की जा सकती है क्योंकि वह केवल योगनीय नियतांक के परिमाण पर ही प्रभाव डालती है।

इस समय हम ज्यामितीय प्रक्षेप पथ अर्थात् केप्लर के प्रथम नियम पर ही ध्यान देगे। वैसा ही करने के लिए हम (45.2) का अनुसरण करते हैं और निम्नलिखित गठित करते हैं—

$$(8) \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\alpha_2 \int_{r_0}^{r_1} \left[2m + \left(\alpha_1 + G \frac{mM}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r^2} + \phi.$$

प्रत्यक्षतः, सुविधाजनक होगा कि समाकलन-परिणम्य के लिए r के बदले $S = \frac{1}{r}$ का प्रवेश कराया जाय और (8) को फिर से यों लिखा जाय—

$$(9) \quad \begin{aligned} \beta_2 - \phi &= \alpha_2 \int_{s_0}^s \left[2m \left(\alpha_1 + GmMs \right) - \alpha_2^2 S^2 \right]^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= \int_{s_0}^s \frac{ds}{\left[(s - s_{\min})(s_{\max} - s) \right]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

यहाँ S_{\min} and S_{\max} [$S_{\text{अल्पतम}}$ $S_{\text{अधिकतम}}$] सूर्य से अपभानु तथा अभिभानु तक की दूरियों के व्युत्क्रम है। दोनों समाकलों की तुलना प्रदान करती हैं—

$$(10) \quad \begin{aligned} s_{\min} s_{\max} &= -\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2} \\ s_{\min} + s_{\max} &= \frac{2Gm^2M}{\alpha_2^2} \end{aligned}$$

जब हम (9) को सुविधाजनक त्रिकोणमितीय रूप में प्राप्त करना चाहते हैं। इसके लिए निम्नलिखित स्नातकरण मूल पड़ता है—

$$(11) \quad s = \frac{s_{\min} + s_{\max}}{2} + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2} u.$$

यह $s=s_{\max}$ को $u=+1$ में और $s=s_{\min}$ को $u=-1$ में ले जाता है। तो (9) से हम प्राप्त करते हैं—

$$(12) \quad \beta_2 - \phi = \int_{u_0}^u \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

और, समाकल की अभ्यर्पणीय निम्न सीमा को 1 के बराबर करने पर प्राप्त होता है

$$(13) \quad \phi - \beta_2 = \cos^{-1} u, \quad u = \cos(\phi - \beta_2).$$

अंत में (11) के मार्ग से u से s को लौट आते हैं और इस बात का ध्यान करते हैं कि आकृति II के अनुसार—

$$s_{\min} = \frac{1}{a(1+\epsilon)}, \quad s_{\max} = \frac{1}{a(1-\epsilon)};$$

और इसलिए,

$$s = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)} + \frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)} u.$$

तो अब (13) से दीर्घवृत्त का समीकरण निम्नलिखित परिचित रूप में प्राप्त करते हैं

$$(14) \quad s = \frac{1}{r} = \frac{1+\epsilon \cos(\phi - \beta_2)}{a(1-\epsilon^2)},$$

जहाँ निश्चर β_2 को ϕ की परिभाषा के भीतर रख सकते हैं।

प्रायोगिक हेतुओं के कारण खगोलज्ञ की जिज्ञासा प्रक्षेपपथ के ज्यामितीय रूप में उतनी अधिक नहीं होती जितनी कि समय के फलन के रूप में गति में। यहाँ फिर हैमिल्टन-याकोबी विधि सर्वाधिक सुव्यवस्थित रूप में उत्तर प्रदान करती है, अर्थात् समी० (45.1) के द्वारा कि,—

$$t = -\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial x_1}.$$

इसमें परिणम्य s के प्रतिस्थापन से हम प्राप्त करते हैं—

$$(15) \quad t = -\frac{m}{\alpha_2} \int_{s_0}^s \frac{ds}{S^2[(s-s_{\min})(s_{\max}-s)]^{\frac{1}{2}}}$$

इस समीकरण से § ६ में दी हुई अपनी पुरानी विवृति पूरी कर देते हैं। वहाँ समय के फलन की भांति ग्रह का स्थान अनिर्धारित ही छोड़ दिया गया था। समस्या १.१६ की “उत्केंद्र अनमली” को एक नया समाकलन परिणम्य मानकर (उसके संकेतन II तथा समी० (11) के सहायक u में गड़बड़ी न करनी चाहिए), उसकी सहायता से

समी० (15) सादे ही समाकलन द्वारा हल किया जा सकता है और सीधे ही सीधे निम्नलिखित सुविख्यात केप्लर समीकरण की प्रगति करा देता है—

$$nt = u - \epsilon \sin u,$$

जिसका उल्लेख उपर्युक्त समस्या में किया गया है।

यह भलीभाँति विदित है कि आधुनिक परमाणवीय भौतिकी में भी द्वि- तथा बहु-पिंड समस्याएँ मुख्य भाग लेती हैं। हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रान नाभिक, प्रोटान्, के चारों ओर वैसे ही परिक्रमण करता है जैसे कि ग्रह के चारों ओर। यहाँ भी हैमिल्टन-याकोबी विधि आश्चर्यजनक मान की सिद्ध हुई है। वह अक्षरशः उस स्थान को बता देती है जहाँ क्वांटम-संख्या को प्रवेश कराना चाहिए।

पुराने क्वांटम वाद में, जब कभी भी स्वतंत्रता-संख्याओं की k वीं अन्त्यो से पूर्य की जा सकती थी तब k -वीं स्वतंत्रता-संख्या का एक कला-समाकल निश्चित किया जाता था (जिसे "क्रिया परिणम्य" भी कहते थे) और जो यो दिया जाता था कि—

$$(16) \quad J_k = \int p_k dq_k.$$

यह समाकल q_k के मानों के सारे अधिक्षेत्र के लिए किया जाता था। तब अभियाचना यह होती थी कि J_k प्लांक के मौलिक क्रिया-क्वांटम का पूर्ण-संख्यक गुणज होवे (देखिए पृ० २४४), अर्थात्,

$$(16a) \quad J_k = n_k h,$$

जहाँ h उपर्युक्त प्लांक का मौलिक क्रिया-क्वांटम है जिसे प्लांक (प्लांक नियतांक) कहते हैं। (16) के p_k को लाक्षणिक फलन S के पदों में व्यक्त कर हम प्राप्त करते हैं—

$$(17) \quad \int \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k = \Delta S_k = n_k h.$$

ΔS_k फलन S का k वाँ "आवर्तत्व मापक" है, अर्थात् q_k के अपने मानों के पूरे चक्र में जाने में होने वाला S में परिवर्तन है।

हाइड्रोजन परमाणु के इलेक्ट्रान के निर्देशांक $q_1 = \phi$ तथा $q_2 = r$ होते हैं। S का अवकल समीकरण (2) और उसका साधन (7) सीधे ही सीधे एगोल विज्ञान से परमाणवीय भौतिकी को स्थानांतरित किये जा सकते हैं, वस्तुतः कि गुह्यत्वाकर्षीय स्थितिज ऊर्जा को कूलम्ब ऊर्जा, $\frac{e^2}{r}$, द्वारा प्रतिस्थापित कर लें।

कारण कि, निर्देशांक ϕ का अधिक्षेत्र 0 से 2π तक चिम्नग्न होता है, अतएव (7) और (17) में प्राप्त करने हैं—

$$(18) \quad \Delta S_\phi = 2\pi x_2 = n_\phi h.$$

यह n_ϕ दिगंशी क्वांटम संख्या है, x_2 , जैसा कि हम जानते हैं, दिगंशी गत्य-पूर्ण p_ϕ के गत्यंगम है।

निर्देशांक r के मानों के अधिक्षेत्र का चिम्नग्न है अल्पतम r (r_{min}) से लेकर महत्तम r (r_{max}) तक और वहाँ में फिर वापस। अतएव समीकरण (7) और (17) में हमें मिलता है—

$$(19) \quad \Delta S_r = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[2m \left(E - \frac{e^2}{r} \right) - \frac{n_\phi^2 h^2}{4\pi^2 r^2} \right]^{\frac{1}{2}} dr = n_r h.$$

यह n_r प्रिन्स क्वांटम-संख्या है। क्षेत्रफलन की सर्वोत्तम रीति r के समतल में समिश्र समाकलन करना होगा। ऐसा करने पर (19) निम्नलिखित हो जाता है

$$(20) \quad -n_\phi h + 2\pi i \frac{mc^2}{(2mE)^{\frac{1}{2}}} = n_r h.$$

अतएव, हाइड्रोजन इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा, क्वांटम दशा $n_r + n_\phi$ में, निम्नलिखित होगी,

$$(21) \quad E = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2}.$$

पहू श्रृणात्मक इसलिए है कि इलेक्ट्रॉन-प्रोटॉन के बीच की अनन्त दूरी के लिए ऊर्जा को शून्य माना था (देखिए स्थितिज ऊर्जा के उपर्युक्त व्यञ्जन)।

समीकरण (21) तथा “क्वांटम-छलायां में ही ऊर्जा-विकिरण” वाली बोर की परिकल्पना, इन दोनों ने ही हाइड्रोजन वर्णक्रम (तथोक्त बामर^१ माला) के पहले-पहल अवबोधन पर पहुँचाया और वहाँ से व्यापक रूप में हम वर्णक्रम रेखाओं के आधुनिक वाद तक पहुँच सके।

परमाणुवाद में हुए आधुनिक विकास यहाँ प्रस्तुत की गयी इलेक्ट्रॉन-कक्षाओं के वर्णन से बहुत आगे चले गये हैं। जैसा कि § ४४ के प्रारम्भ में उल्लेख किया गया था, हैमिल्टन की विचार-रेखा के बाद होने वाले अनुमानों के परिणाम स्वरूप परमाणवीय प्रक्रियाओं की और भी अधिक गम्भीर तरंग-यात्रिकीय भावनाओं का प्रादुर्भाव हुआ है।

१४ अत्रदास्य टक्कर, इन्ड्रेस्ट्रान की परमाणु में—एक m महति तथा v वेग वाला इन्ड्रेस्ट्रान आदि में विगन दशा के M महति के एक परमाणु में केंद्रीयतया टक्कर जाता है। परमाणु खूब हो जाता है और अपनी भीम दशा में ऊर्जा तक E मात्रको दाग ऊपर उठा दिया जाता है। तो इन्ड्रेस्ट्रान का अत्यन्त वेग v_0 क्या हाना चाहिए ?

इन्ड्रेस्ट्रान तथा परमाणु के अन्तिम वेगों, क्रमान् u तथा V , से किण एक एक बर्णामिक समीकरण प्राप्त होगा। अत्यन्त मान v_0 उन नांग में निश्चयता है कि v तथा V के माधनों में आया हुई कर्णों' बाम्बधिक हों। यदि रंय्य ऊर्जा के मरक्षण का मिद्वान लागू होता तो जिम वेग की प्रत्यागा की जानी उनमें v का मान कुछ अधिक होगा, यद्यपि दोनों का अन्तर प्रेक्षणीय न हाना क्योंकि अनुपात $\frac{M}{m} (\geq 2000)$ बहुत बड़ा है।

यदि टक्कर लगाने वाले कण की महति उनकी ही या लगभग उनकी ही बड़ी हो जितनी कि टक्कर खाये हुए कण की, तो जिम अत्यन्त ऊर्जा की आवश्यकता हाना है वह केवल ऊर्जा-मरक्षण-मिद्वानानुसार प्रत्यागित ऊर्जा में प्राप्त दूनी हाना है।

१.५. राकंट, चंद्रमा को—अनवरण इगसास्ट' दागनों के माध एक राकंट (हवाई वान) ऊर्ध्वाधर ऊपर को दागा जाता है। समझिए कि राकंट की अपेक्षा में रेचन-वेग a है तथा प्रति सेकंड निष्कामित महति $\mu = -m$ है और मान लीजिए कि दोनों ही समय में नियत (नमय के विचार में एक जैम) रहने हैं। यह भी मान लीजिए कि गति नियत उपेक्षणीय घर्षण के कारण गुरुत्वाकर्षी त्वरण g में हाना है। तो गति समीकरण का गठन कीजिए और यह मान कर कि राकंट का आदि-वेग पृथिवी पृष्ठ पर शून्य है, समीकरण का समाकलन कीजिए। यदि $\mu =$ आदि की महति m_0 का

$\frac{1}{100}$ या भाग और $a = 2000$ मीटर-सेकंड⁻¹ हो तो $t = 10, 30, 50$ सेकंड में राकंट किण ऊँचाई पर पहुँचता है ?

1. Radical

*केवल हाइड्रोजन परमाणु के लिए ही M/m इतने छोटे, 1847 के बराबर है, हाइड्रोजन से निकटतम संहति वाले परमाणु हीलियम के लिए यह अनुपात कोई 4×1847 के बराबर होगा।

2. Exhaust—रेचक, शून्यकारक

समस्याएँ

प्रथम अध्याय संबंधी

१.१. प्रत्यास्थ टक्कर*—एक ऋजुरेखा में n संख्यक एक-समान संहतियाँ M परस्पर छूती हुई, रखी हैं। दो अन्य M संहतियाँ, वेग v से चलती हुई, बायीं ओर से उन संहतियों की पक्ति से टकराती हैं। प्रकटतया यदि बायीं ओर से आयी हुई दो संहतियाँ दायीं ओर की दो संहतियों को अपने वेग हस्तांतरित कर दें तो संवेग तथा ऊर्जा नियम संतुष्ट रहते हैं। दिखलाइए कि यदि दाहिनी ओर से केवल एक संहति ही निकल जाय, या यदि अंतिम दो संहतियाँ विभिन्न वेगों v_1, v_2 , से चल निकलें, तो इन नियमों का पालन नहीं हो सकता।

१.२. प्रत्यास्थ टक्कर-असमान संहतियों में—अब दायीं ओर की अंतिम संहति m शेष अन्य संहतियों से कम (संहति, m) रखिए। इस बार वेग v_0 से चलती हुई एक ही संहति M फिर बायीं ओर से टकराती है। ऊर्जा और संवेग के सिद्धांतों से दिखलाइए कि यह असंभव है कि केवल एक ही संहति m गति में हो जाय। यदि मान लिया जाय कि केवल दो संहतियाँ गतिशील की जाती हैं तो उनके वेग क्या होंगे ?

१.३. प्रत्यास्थ टक्कर-असमान संहतियाँ—दाहिनी ओर की अंतिम संहति M' को शेष अन्यो से बड़ी लीजिए। वे ही सब अनुमान फिर कीजिए जो प्रश्न २ में किये थे। परंतु देखिए कि अब दायीं ओर की अंतिम-से-पिछली संहति अपना संवेग बायीं ओर हस्तांतरित करती है। तो M' का वेग तथा पक्ति की बायीं ओर की प्रथम संहति क्या होंगे ? यदि M' बहुत ही बड़ा हो तो क्या होता है ?

*—यह अत्यावश्यक है कि प्रश्नावली १-१ से १-३ में वर्णित प्रयोगों को विद्यार्थी स्वयं करे। किसी चिकने आधार पर मुद्राओं द्वारा वे किये जा सकते हैं। या डोरियों से लटकाये हुए प्रत्यास्थ गोलों द्वारा भी वंसा कर सकते हैं। लटकाये हुए गोलों को विराम अवस्था में परस्पर छूते हुए होना चाहिए। अंततः और कुछ नहीं तो, प्रोणिका में रखी हुई मारबिल की गोलियों से ही काम चल सकता है।

१.४. अप्रत्यास्य टक्कर; इलेक्ट्रान की परमाणु से—एक III संहति तथा v वेग वाला इलेक्ट्रान आदि में विराम दशा के M संहति के एक परमाणु में केंद्रीयतया टक्कर खाता है। परमाणु क्षुब्ध हो जाता है और अपनी भीम दशा से ऊर्जा तक E मात्रकों द्वारा ऊपर उठा दिया जाता है। तो इलेक्ट्रान का अल्पतम वेग v_0 क्या होना चाहिए ?

इलेक्ट्रान तथा परमाणु के अंतिम वेगों, क्रमात् v तथा V , के लिए एक एक वर्गात्मक समीकरण प्राप्त होगा। अल्पतम मान v_0 इस माँग से निकलता है कि v तथा V के साधनों में आयी हुई करणों वास्तविक हों। यदि केवल ऊर्जा के संरक्षण का सिद्धांत लागू होता तो जिस वेग की प्रत्याप्ता की जाती उससे v का मान कुछ अधिक होगा, यद्यपि दोनों का अंतर प्रेक्षणीय न होगा क्योंकि अनुपात $\frac{M}{m} (\geq 2000)$ बहुत बड़ा है।

यदि टक्कर लगाने वाले कण की संहति उतनी ही या लगभग उतनी ही बड़ी हो जितनी कि टक्कर खाये हुए कण की, तो जिस अल्पतम ऊर्जा की आवश्यकता होती है वह केवल ऊर्जा-संरक्षण-सिद्धांतानुसार प्रत्यागित ऊर्जा से प्रायः दूनी होती है।

१.५. राकेट, चंद्रमा को—अनवरत इगझास्ट^१ दागनों के साथ एक राकेट (हवाई वान) ऊर्ध्वाधर ऊपर को दागा जाता है। समझिए कि राकेट की अपेक्षा में रेचन-वेग u है तथा प्रति सेकंड निष्कासित संहति $\mu = -\dot{m}$ है और मान लीजिए कि दोनों ही समय में नियत (समय के विचार से एक जैसे) रहते हैं। यह भी मान लीजिए कि गति नियत उपेक्षणीय घर्षण के कारण गुरुत्वाकर्षी त्वरण g से होती है। तो गति समीकरण का गठन कीजिए और यह मान कर कि राकेट का आदि-वेग पृथिवी पृष्ठ पर शून्य है, समीकरण का समाकलन कीजिए। यदि $\mu =$ आदि की संहति m_0 का

$\frac{1}{100}$ वाँ भाग और $a = 2000$ मीटर-सेकंड⁻¹ हो तो $t = 10, 30, 50$ सेकंड में राकेट किस ऊँचाई पर पहुँचता है ?

1. Radical

*केवल हाइड्रोजन परमाणु के लिए ही M/m इससे छोटे, 1847 के बराबर है, हाइड्रोजन से निकटतम संहति वाले परमाणु होलियम के लिए यह अनुपात कोई 4×1847 के बराबर होगा।

2. Exhaust—रेचक, शून्यकारक

१.६. संतृप्त वायु से गिरता हुआ जल-बिंदु—पानी की एक गोलाकार बूंद का जलवाष्प से संतृप्त वायु में, बिना घर्षण के, गुरुत्व के वश, गिरती है। आदि ($t=0$) में उसकी प्रिज्या c और उसका वेग v_0 है। संघनन के कारण जल-बिंदु की संहति निरन्तर बढ़ती रहती है, संहति वृद्धि की दर बूंद के पृष्ठ के समानुपाती है। जैसा दिखाया जायगा, उसकी प्रिज्या r की वृद्धि समय t के साथ रेखिकतया होगी। स्वतंत्र चर राशि के लिए t के स्थान पर r लेकर गति के अवकल समीकरण का समाकलन कीजिए। दिखाइए कि $c=0$ के लिए वेग-वृद्धि समय के साथ रेखिकतया होती है।

१.७. गिरती हुई जंजीर—किसी मेज के किनारे पर एक जंजीर रखी हुई है जिसके सिरे के पास का थोड़ा-सा भाग किनारे से लटक रहा है, बाकी सब जंजीर सिकोड़ी हुई है। आदि में लटका हुआ सिरा विराम दशा में है। अब जंजीर की कड़ियाँ एक-एक करके गिरना प्रारंभ करती हैं। घर्षण की उपेक्षा कर दीजिए। चलिता रूप में लिखी हुई ऊर्जा यहाँ गति का समाकल नहीं रहती। उसके स्थान में ऊर्जा का घोर भाग लिखने में आवेगी (कानों)। ऊर्जा-हानि को विचार में लेना होगा।

१.८. गिरती हुई रस्ती—लम्बाई l की एक रस्ती मेज के किनारे से नीचे खनक रही है। आदि में उनका एक टुकड़ा x_0 मेज से बिना गति के लटक रहा था। किसी समय t पर समझिए कि रस्ती की लंबाई x ऊर्ध्वाधर नीचे लटक रही है। मान लीजिए कि रस्ती पूर्णतया नम्य है। दिखाइए कि $T+V$ नियत के रूप में ऊर्जा सिद्धांत गति-समाकल प्रदान करता है।

१.९. पृथिवी के आकर्षण वश चंद्र का त्वरण—पृथिवी से चंद्रमा की दूरी लगभग ६० पृथ्वी-प्रिज्याओं की है। मान लीजिए कि चंद्राय कक्षा वृत्ताकार और २७ दिन ७ घंटे ४३ मिनटों में परिक्रमित है। इससे पृथ्वी की ओर चंद्र का त्वरण (अभिकेंद्र त्वरण) परिकलित किया जा सकता है। न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण-नियम से निकाले हुए त्वरण के साथ इस त्वरण की तुलना ने ही प्रथम बार उक्त नियम की सत्यता ठहरायी थी।

१.१०. ऐंठ, सदिश राशिवत्। एक समकोणीय निर्देशांक प्रणाली (x, y, z) लीजिए। इनमें किसी बल F के, अनुप्रयोग-बिंदु की सदिश प्रिज्या को r समझिए। अब प्रथम से पूर्णन द्वारा प्राप्त एक दूसरी निर्देशांक प्रणाली (x', y', z') को जाते हैं। दिखाइए कि प्रथम निर्देशांक प्रणाली के मूल बिंदु के प्रति बल F का पूर्ण सदिश की

भांति स्पांतरित होता है, अर्थात्, $r = (x, y, z)$ की भांति । इसको सिद्ध करने के लिए यह मान लेना पड़ेगा कि दोनों निर्देशांक प्रणालियाँ एक ही भाव में हैं (दोनों दक्षिणावर्त्त या दोनों वामावर्त्त) ।

१.११. ग्रह-गति का वेगालेख—समी० (6.5) से, $t=0$ के साथ, ग्रह-गति का वेगालेख^१ निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है—

$$\xi = \dot{x} = -\frac{GM}{C} \sin \phi,$$

$$\eta = \dot{y} = +\frac{GM}{C} \cos \phi + B,$$

जहाँ M सूर्य की संहति है; C कोणीय संवेगांक^२ है; ϕ सत्य अनमली^३ है (देखिए आकृति ६); और G तो गुरुत्वाकर्षण है ही । दिखलाइए कि इन बात पर निर्भर करते हुए कि वेगालेख का "ध्रुव" $\xi = \eta = 0$ उसके बाहर या भीतर है, प्रक्षेप-पथ अतिपरवलय या दीर्घवृत्त होगा । इस ध्रुव के स्थान के पदों में सीमात स्थितियों के परवलय और वृत्त का भी वर्णन कीजिए ।

१.१२. इलेक्ट्रानों के एक समांतर बंड का आयन-क्षेत्र में से जाना : प्रक्षेप पथों का अन्वालोप^४—अनन्त दूरी पर स्थित एक उद्गम इलेक्ट्रानों को समांतर पथों में दाग रहा है । प्रत्येक इलेक्ट्रान का आवेश (चार्ज) e , संहति m और आदि-वेग v_0 है । एक आयनित^५ परमाणु A (आवेश E , संहति M) मूल बिंदु पर स्थित है । यदि m तथा E के चिह्न एक जैसे हों तो A के चारों ओर का कितना क्षेत्रफल इलेक्ट्रान कभी न छू पावेगे ?

y -अक्ष को आपाती कणों की दिशा मानिए और समझिए कि समस्या समतल की है । इलेक्ट्रान का प्रक्षेपपथ ध्रुवी निर्देशांकों में लिखना और A को निर्देशांक प्रणाली का ध्रुव तथा अतिपरवलयिक प्रक्षेपपथ की नाभि समझना सबसे सरल होगा । उक्त क्षेत्रफल का सीमात ही इलेक्ट्रानीय प्रक्षेपपथों का अन्वालोप होगा । $M \gg m$ के कारण A को विराम दशा में समझ सकते हैं ।

दिखलाइए कि यदि e और E विरुद्ध चिह्नों के हों तो भी प्रक्षेपपथों का अन्वालोप वही सीमात देता जान पड़ता है; परंतु अब उसका कोई भौतिकीय अाधाय नहीं ।

- | | |
|-----------------|-----------------------------|
| 1. Hodograph | 2. Angular moment |
| 3. True anomaly | 4. Envelope 5. Ionized |

१.१३. दीर्घवृत्तीय प्रक्षेप-यय, दूरी के अनुलोमतया केन्द्रीय बल के अधीन—समझिए कि एक संहति m एक स्थिर बिंदु O की ओर निर्देशित बल के प्रभाव में है [O को बल का केन्द्र (बल-केन्द्र) कहते हैं]। तो

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r},$$

जहाँ $\mathbf{r} = \vec{Om}$, $k =$ एक नियतांक।

दिखलाइए कि m की गति के लिए निम्नलिखित तीन नियम होते हैं :

१. m एक दीर्घवृत्त की रचना है जिसका केन्द्र O है।
२. सदिश त्रिज्या r समान समय में समान क्षेत्रफल घेरती है।
३. आवर्तकाल T दीर्घवृत्त के रूप से स्वतंत्र है और केवल बल-नियम पर निर्भर करता है, अर्थात् k और m के मानों पर।

१.१४. लिथियम का नाभिकीय विभंजन—यदि एक हाइड्रोजन-नाभिक [प्रोटॉन^१ संहति m_p], वेग v_p से, L_1^7 [लिथियम^१ परमाणवीय भार, ७] के नाभिक से टकरावे, तो पक्षोक्त दो α -कणों [$\alpha =$ अल्फा; अल्फा कण, संहति $m_\alpha = 4m_p$] में विभक्त हो जाता है। ये दो α -कण (पूर्णतः तो नहीं पर) करीब-करीब विपरीत दिशाओं में भाग निकलते हैं। मान लीजिए कि α -कण टक्कर-रेखा के विचार से सम्मिततया एक समान वेगों से जाते हैं; तो उनके बीच के कोण 2ϕ का परिकलन कीजिए। देखिए कि प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा E_p के अतिरिक्त; संहति-न्यूनता के कारण, कुछ और ऊर्जा E का भोचन (मुक्ति-प्रदान) होता है जो E से-कहीं अधिक है और जो E की ही भांति उन दो α -कणों को संचारित होती है। अतएव $\cos \phi$ के लिए अंतिम उत्तर में न केवल m_p और m_α ही आते हैं, वरन् प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा E_p तथा E भी।

उत्त मायकों में जो प्रायः परमाणवीय भौतिकी में मिलते हैं $E = 14 \times 10^6 \text{ eV}$ [electron volts, इलेक्ट्रॉन वोल्ट]। एक प्रयोग में $E_p = 0.2 \times 10^6 \text{ eV}$ निकला था। तो ϕ और 2ϕ के क्या मान होंगे ?

१.१५. न्यूट्रॉनों और परमाणवीय नाभिकों के बीच केन्द्रीय टक्करें, पेरिफिन की ईंट का प्रभाव—सीसे (lead, लेड) की पचास सेटीमीटर मोटी पट्टिका द्वारा

समझते हैं। यदि दीर्घवृत्त के मुख्याक्षों को निर्देशाक्ष अक्षों की भाँति लें, तो बिंदु K का भुजांक वही होगा जो E का है। E अपने ध्रुवी निर्देशांकों r, ϕ (ध्रुव S) द्वारा प्रदत्त है, तो K , ध्रुवी निर्देशांकों a, u (ध्रुव M) द्वारा निर्धारित होता है। अतएव सत्य अनमली ϕ का सहायगी उत्केन्द्र अनमली u है (जैसे कि मूल रचना में वैसे ही यहाँ, दोनों ही को अभिमानु से ग्रहगति की दिशामें मापते हैं, न कि खगोल-विज्ञान की भाँति जहाँ अनमलियाँ अभिमानु से मापी जाती हैं; यद्यपि वहाँ भी मापने की दिशा वही है जो यहाँ पर अर्थात् ग्रह की गति की दिशा घटिका-प्रतिकूल।)

ग्रह E के निर्देशाक्ष, x तथा y , एक ओर तो r तथा ϕ के पदों में व्यक्त किये जा सकते हैं; और, दूसरी ओर, दीर्घवृत्त के एक अर्धाक्ष तथा उत्केन्द्र अनमली u के पदों में। अतएव जब K दिया हो तो E भी दिया होता है। तो अब वृत्त पर K की गति का अभिक्षेत्र निम्नलिखित विस्मात केप्लर-समीकरण द्वारा प्रदत्त है—

$$u = (u - e \sin u),$$

यहाँ e दीर्घवृत्तीय प्रक्षेपपथ की उत्केन्द्रता है और

$$u = \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{ab},$$

जहाँ a, b अर्धाक्ष है तथा, G है गुरुत्वाकर्षणांक; M सूर्य की सहति; और C क्षेत्र-फलीय वेगांक।

केप्लर समीकरण को व्युत्पन्न करने के लिए, S को ध्रुव और किरण SA (A , अपकेन्द्र) को ध्रुवी अक्ष लेकर, दीर्घवृत्त के समीकरण से प्रारम्भ कीजिए। समीकरण है—

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \phi},$$

जहाँ p "परामिति" $a(1 - e^2)$ है। अब उपर्युक्त रूपांतरण संबंधों का उपयोग कर, ϕ के स्थान पर u रखिए, और निम्नलिखित समीकरण प्राप्त कीजिए—

$$r = a(1 + e \cos u).$$

इन दोनों समीकरणों का अवकलन, r तथा ϕ का निरसन, कोणीय वेग के सिद्धांत का तथा समी० (6.8) का उपयोग अतः एक समाकलन के उपरांत, केप्लर-समीकरण की प्राप्ति कराते हैं, वस्तु यह ध्यान लगाएँ कि $t=0$ पर ग्रह अपकेन्द्र पर है।

1. Abscissa
2. Areal velocity constant

द्वितीय अध्याय संबंधी

२.१. चलते पहिये के अपूर्ण पदोप्य प्रतिबंध—पैने किनारे वाला एक पहिया बिना स्खलन किये हुए किसी खुरदुरे समतल आधार पर चल रहा है, (उदाहरणतः किसी बच्चे द्वारा चौरस सड़क पर खेल के लिए चलाये हुए एक गोल चक्कर का ध्यान करिए)। पहिये की त्रिज्या a है। उसकी क्षणिक स्थिति के निर्धारण के लिए निम्नलिखित बातों के मानों को ठहरा लेना होगा—

१. पहिये और आधार के स्पर्शबिंदु के निर्देशांक x, y एक ऐसे समकोणीय निर्देशांकों की प्रणाली x, y, z को अभिदेशित जिसका xy -समतल आधार का संपाती हो ;

२. पहिये की धुरी और z -अक्ष के बीच का कोण 0 ;

३. पहिये की (x, y) पर) स्पर्शरेखा (पहिये के समतल का आधार के समतल से प्रतिच्छेद) और x -अक्ष के बीच का कोण ψ ;

४. पहिये के स्पर्श बिंदु की त्रिज्या तथा किसी एक स्वेच्छया निश्चित की हुई त्रिज्या के बीच का कोण ϕ , यह कोण धनात्मक समझा जायगा यदि वह, कहिए कि, पहिये के घूर्णन की दिशा में हो।

अतएव, परिमित गति में, पहिये की स्वतंत्रता सख्याएँ पाँच होंगी। परंतु पहिये की चलनशीलता शुद्ध (स्खलन हीन) लुठन के प्रतिबंध से निरोधित है, जो कि पहिये और आधार के बीच सर्पी घर्षण^१ के कारण होता है। अतएव यह ठीक है कि पहिये के अपनी क्षणिक दिशा में घूमते हुए, अपनी स्पर्शरेखा की दिशा पर चली हुई दूरी δs , $a\delta\phi$ के बराबर होगी। इस समीकरण को निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षिप्त करने से नियंत्रण के वे प्रतिबंध प्राप्त करते हैं जिन्हें δx , δy और $\delta\phi$ को सन्तुष्ट करना होगा। ये हैं—

$$\delta x = a \cos \psi \delta\phi; \quad \delta y = a \sin \psi \delta\phi.$$

अतएव लुठन करते हुए पहिये की, अत्यणुगति में, केवल तीन स्वतंत्रता-सख्याएँ होंगी।

दिखलाइए कि प्रतिबंध (१) को स्वयं निर्देशांकों के बीच के समीकरणों में नहीं लिख सकते। ऐसा करने के लिए दिखलाना होगा कि समीकरण $f(x, y, \phi, \psi) = 0$ का अस्तित्व प्रतिबंध (१) से असंगत है (० प्रतिबंध (१) में नहीं आता)।

२.२ द्विदिक् क्रियाशील एकाकी तिलिङ्गर वाले भाफ इंजन के लिए एक गति-पालक चक्र का सन्निकट परिरूप (५९ (४) पृ० ७७, को भी देखिए)। द्विदिक् क्रियाशील पिस्टन इंजन ऐसा होता है कि उसके पिस्टन के दोनों ओर पारी-पारी से भाफ प्रवेशित करायी जाती है ताकि पिस्टन के गदत के दोनों प्रहारों में काम किया जा सके।

सरलता के लिए मान लेंगे कि प्रत्येक प्रहार में दाब नियत (एक जैसा ही) रहता है (पूर्ण दाब चक्र या डीजल—Diesel—चक्र); और यह भी मान लेंगे कि संधक दंडिका अनन्त लंबाई की है। तो पिस्टन से क्रैंक ईपा को संचारित क्रैंक कोण ϕ के फलनवत् परिणमनीय ऐंठ, उस अर्द्ध चक्र के लिए जिसमें क्रैंक पीछे से आगे के स्तंभ स्थान तक जाता है, निम्नलिखित से दी जाती है (मिलाइए समी० 9.5):

$$L = L_0 \sin \phi.$$

यहाँ L_0 एक नियतांक है और ϕ पिछले स्तंभ स्थान से होने वाले घूर्णन की दिसा में मापा जाता है। आगे से पिछले स्तंभ स्थान को जाने वाले दूसरे अर्द्ध चक्र में, उक्त अनुमानों के ही अधीन [अर्थात्, (1) द्विदिक् क्रियाशील इंजन; (2) पूर्ण दाब के अधीन कार्य; (3) अनंत संबंधक दंडिका], ऐंठ उसी नियम के अनुसार बदलती है, बशर्ते कि अब ϕ अगले स्तंभ स्थान से घूर्णन की दिसा में मापा जाय।

समझिए कि इंजन पर का बोझ एक नियत ऐंठ W द्वारा प्रवृत्त है; तथा तदनुसार अक्षवृत्ति N और प्रति मिनट घूर्णनों की संख्या n है। अतएव चालक ऐंठ L परिणमनीय होगी और बोझवाली ऐंठ ω नियत रहेगी। परिणाम वरत इंजन का कोणीय वेग अधिकतम (maximum) मान ω_{max} और अल्पतम (minimum) मान ω_{min} के बीच घटता बढ़ता रहेगा। मध्यमान (mean value) ω_m लगभग यों दिया जावेगा

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

आपेक्षिक उच्चावचन अर्थात् इंजन के असंतुलन की मात्रा (δ) यों दी जाती है—

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m}$$

गतिपालक चक्र का काम यह होता है कि इस आपेक्षिक उच्चावचन को एक सीमा

प्रयुक्त सारे अपकेन्द्र बल के, तथा एक-एक सहति अल्पांशों पर आरोपित अपकेन्द्र बलों के परिणामी घूर्ण के, परिणाम है।

पृ० ७४ से हम जानते हैं कि अकेले पिंड के भार की क्या प्रतिक्रियाएँ होती हैं; अतएव उनके प्रभाव को यहाँ छोड़ सकते हैं।

२.७ यो-यो संबंधी याद—सहति M तथा अवस्थितित्व घूर्ण I वाले एक मंडलकाकार अर्थात् टिकिया के रूप पिंड के माध्यिकायी समतल में अक्ष के लंबवत् एक गहरी स-समित नाली खुदी हुई है। नाली में, ईपा पर एक डोरी लपेटी हुई है। ईपा की त्रिज्या r है। डोरी का छुट्टा सिरा हम हाथ से पकड़ते हैं। अब डोरी को सदा कसी रखते हुए पिंड को गिरने देते हैं। जैसे-जैसे पिंड गिरता है, उसे तब तक एक घूर्णनात्मक त्वरण प्राप्त होता रहता है जब तक कि सारी डोरी खुल न जाय। अब एक संक्रमण दशा आती है जिसका पूरा व्यौरा हम यहाँ न देगे पर जिसका परिणाम यह होता है कि पिंड डोरी के एक ओर से दूसरी ओर चला जाता है। तदुपरांत डोरी ईपा के चारों ओर दूसरी दिशा में लपटने लगती है और पिंड घूर्णनीय अवत्वरण के साथ अर्थात् वेग कम होते हुए ऊपर उठने लगता है, इत्यादि इत्यादि; तो निम्नलिखित दशाओं में डोरी में तनाव क्या है

(क) उतरने में ?

(ख) चढ़ने में ?

मान लीजिए कि अक्ष से डोरी के छुट्टा सिरे की दूरी की अपेक्षा r इतना छोटा है कि डोरी को सब समय ऊर्ध्वाधर समझ सकते हैं।

२.८. एक गोले के पृष्ठ पर गतिमान कण—एक संहति बिंदु किसी गोले के ऊपरी आधे के बाहरी पृष्ठ पर चल रहा है। उसका आदि स्थान α_0 और आदि वेग ϕ_0 कुछ-भी होने दीजिए, सिवाय इस बात के कि पक्षोक्त को गोले के पृष्ठ से स्पर्श रेखिक होना होगा, तथा गति को धर्पणहीन, केवल मात्र गुह्य के अधीन होना होगा। तो किस ऊँचाई पर संहति बिंदु गोले को छोड़ देगा ?

३. तृतीय अध्याय संबंधी

३.१. अत्यणु दोलनों युक्त गोलीय लोलक—व्यापकतया गोलीय लोलक के प्रक्षेपय के निम्न बिंदु गति के दौरान में आगे बढ़ते हैं। परंतु पर्याप्त छोटे दोलनों के

लिए निष्पंद विदुओं को स्थिर रहना होगा क्योंकि अब एक आवर्त दीर्घवृत्तीय गति की बात है। कूतिए कि दीर्घवृत्त के क्षेत्रफल के शून्य होने में निष्पंद विदुओं का अंगे बढ़ना, $\Delta\phi$ किस क्रम में शून्य होता है।

३.२. प्रणोदित, अवमंदित दोलनों के अनुनाद-शिखर का स्थान—प्रणोदित अवमंदित दोलनों में महत्तम आयाम $\omega = \omega_0$ पर होता है; परंतु अवमंदनयुक्त प्रणोदित दोलन में इस स्थान पर नहीं होता, वरन् ω_0 से कम पर होता है (देखाए आकृति ३३)। कितना कम, वह अवमंदन पर निर्भर करेगा।

ज्ञात कीजिए कि ω के किस मान के लिए $|C|$ महत्तम होगा।

[दिखाइए कि वेग-आयाम, $|C|$ ω , (या गतिज ऊर्जा के समय-औसत) का महत्तम मान ठीक $\omega = \omega_0$ पर ही होता है।]

३.३. गैल्वानोमापी—एक स्विच द्वारा एक गैल्वानोमापी (विद्युत्धार मापी) नियत मान E के वि० वा० ब० (विद्युत् वाहक बल electro-motive force) के एक एक-दिश-धारा दायक उद्गम से संवधित है। समय $t=0$ पर स्विच बंद कर दिया जाता है। पर्याप्त अधिक समय के बाद गैल्वानोमापी का विक्षेप अपने अंतिम मान α_∞ पर पहुँचता है। तो उसके आदि के विरामस्थान, $\alpha=0$; $\dot{\alpha}=0$, और अंत के स्थान, $\alpha=\alpha_\infty$ के बीच उसकी गति क्या हुई?

तीन प्रभावों को विचार में लेना होगा। पहले तो विद्युत्-धारा के अतएव वि० वा० ब० के समानुपाती एक बाहरी ऐंठ, अवस्थितित्व-पूर्ण I वाले गैल्वानोमापी पर आरोपित है। दूसरे, कोणीय वेग के समानुपाती एक अवमंदक ऐंठ आरोपित है, जो गति को धीमी करती है। तीसरे, अवलंबन की ऐंठन एक प्रत्यानयक ऐंठ की भाँति आरोपित रहती है और जो विक्षेप α के समानुपाती होती है। अवमंदक ऐंठ के समानुपात-गुणनखंड को ρ समझिए, और प्रत्यानयक ऐंठ को ω_0^2 ।

निम्नलिखित तीन स्थितियों का भेद बताइए तथा चित्रों द्वारा उन्हें समझाइए।

- (क) दुर्बल अवमंदन ($\rho < \omega_0^2$),
- (ख) अनावर्ती ("क्रांतिक") अवमंदन ($\rho = \omega_0^2$),
- (ग) सबल अवमंदन ($\rho > \omega_0^2$)।

३.४. अवलंबन बिंदु की प्रणोदित गति के अधीन लोलक—दो स्थितियाँ उठायी जाती हैं—

(क) अविलंबनीय^१ डोरी द्वारा एक कण अवलंबित है और गुप्तत्व के अधीन बिना अवमंदन के दोलायमान है। अवलंबन बिंदु, किसी दिये हुए विस्थापन-नियम $\delta = f(t)$ के अनुसार, एक क्षैतिज ऋजुरेखा पर चलाया जाता है।

इस निकाय के गति समीकरण बृंद क्या होंगे? डोरी की संहति की उपेक्षा कर दीजिए। समीकरणों को या तो दालाँवेर-सिद्धांत द्वारा या लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरणों से व्युत्पन्न कीजिए।

गति समीकरण बहुत ही सरल हो जाते हैं यदि हम छोटे-छोटे दोलों पर चले जायें, अर्थात् केवल प्रथम कोटि के पदों को ही रहने दें।

यदि एक और अनुमान कर लें कि अवलंबन बिंदु के विस्थापन समय के विचार से आवृत्ति है तो गति-समीकरणों को सहज ही समाकलित कर सकते हैं। लोलक को, कहिए कि, उसके अवलंबन बिंदु की गति के द्वारा, दोलायमान कर दें तो उसकी निजी आवृत्ति उत्तेजित हो उठती है। इस निजी आवृत्ति का आयाम अवमंदन द्वारा शून्य-शून्य निकल जाता है (यद्यपि अपने विश्लेषण में हम अवमंदन की उपेक्षा कर देंगे)। इस प्रकार हम दोलों की एक स्थिर भाव की दशा को पहुँचते हैं जिसकी आवृत्ति वही होगी जो अवलंबन बिंदु पर प्रणोदित है। दिखलाइए कि जब गति इस प्रकार से स्थिर भाव की हो गयी है तब अवलंबन बिंदु और संहति m अनुनाद आवृत्ति के नीचे तो एक ही दिशा में, परंतु उसके ऊपर विरुद्ध दिशाओं में जाते हैं।

(ख) इसी प्रकार का विश्लेषण उस स्थिति के लिए कीजिए जिसमें अवलंबन बिंदु को ऊर्ध्वाधर विस्थापन η दिया जाता है। उस स्थिति पर विशेष जोर दीजिए जिसमें बिंदु पर आरोपित त्वरण नियत रहता है। दोलों का काल क्या होगा यदि अवलंबन बिंदु त्वरणों $+g$ तथा $-g$ से विस्थापित किया जाय?

३.५. युग्मित लोलकों की व्यावहारिक (प्रायोगिक) व्यवस्था, (आकृति ५६ में यह रेखांकित) —दो स्थिर आधारों A और B के बीच एक भारहीन, नम्य तथा प्रत्यास्थ तार तना हुआ है। उसका तनाव S एक समजनीय बाट G द्वारा नियामित किया जाता है जो लौह कोण B के ऊपर से गये हुए लटकते तार के छुट्टा सिरे पर लगाया हुआ रहता है। दो लोलक द्विसूत्रतया C और D पर लटकाये हुए हैं। C

तथा D तार AB को तीन, कहिए कि, बराबर खंडों में विभाजित करते हैं। दोनों द्विसूत्री अवलंबन रेखाकन में मादे अर्थात् एकाकी अवलंबनों की भांति ही दिखलाये गये हैं। ये लोलकों को काफी ठीक-ठीक अनुप्रस्थतया, अर्थात् रेखन के समतल में लववत् झूलने योग्य बना देते हैं। G को अधिक करने से लोलक-द्वय का युग्मन दुर्बलतर हो जाता है (न कि मबलततर, जैसा कि कदाचित् पहले-पहल समझा जाय !)। जो आगे कहना है उसके लिए मान लेंगे कि युग्मन दुर्बल है, जिगका अर्थ यह हुआ कि लोलक-लोलकों के भार की अपेक्षा S बड़ा है। यह भी मान लेंगे कि लोलकों के ऊर्ध्वाधर में विक्षेप कोण ϕ_1 , तथा ϕ_2 , छोटे-छोटे हो हैं। (मकेनन के लिए आ० ५६ देखिए)। ३' और ४' अवलंबन बिंदुओं C तथा D के ३ और ४ के म-ममिततया अभिमुख विक्षेप हैं।) तो ये कोण निम्नलिखितों के मन्त्रिस्ट होंगे—

$$\sin \phi_1 = \phi_1 = \frac{x_1 - x_3}{l_1}, \quad \cos \phi_1 = 1;$$

$$\sin \phi_2 = \phi_2 = \frac{x_2 - x_4}{l_2}, \quad \cos \phi_2 = 1.$$



आ० ५६—तार $ACDB$ को बाट G द्वारा कसा हुआ रखते हैं। उसे $A34B$ में या, अभिमुख विक्षेप के लिए $A3'4'B$ में विरूपित करते हैं। विक्षेप न केवल संहतियों m_1 और m_2 पर गुरुत्वाकर्षण क्रिया द्वारा बरत् लोलकों के अवस्थितित्व प्रभावों द्वारा भी होता है। लोलकों को १ और २ द्वारा सूचित किया है, उनके दैर्घ्य l_1 तथा l_2 हैं, और वे द्विसूत्रतया लटकाये हुए हैं जिस कारण वे रेखन के समतल से लववत् झूलते हैं (आकृति में द्विसूत्र अवलंबन नहीं दिखलाये गये हैं)। ϕ_1 तथा ϕ_2 ऊर्ध्वाधर से क्षणिक विक्षेप हैं।

छोटे दोलों के लिए y -घटकों की अपेक्षा करते हुए हम m_1 , और तथैव m_2 के लिए प्राप्त करते हैं—

$$(1) m_1 g = S_1 \cos \phi_1 = S_1, \quad m_2 g = S_2 \cos \phi_2 = S_2; \text{ और}$$

$$(2) m_1 \ddot{x}_1 = -S_1 \sin \phi_1 = -\frac{m_1 g}{l_1} (x_3 - x_1),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -S_2 \sin \phi_2 = -\frac{m_2 g}{l_2} (x_4 - x_2).$$

अबलवन बिंदुओं C और D पर, किसी भी क्षण, क्रमात् S_1 और S_2 , तनाव S साथ साम्यावस्था में होंगे। पश्चोक्त (अर्थात् S) में S_1 और S_2 द्वारा परिवर्तन नहीं के बराबर होता है। यह x_1, x_2, x_3 तथा x_4 के बीच दो और प्रतिबन्ध प्रदान करता है। इन्हें x_3 तथा x_4 के लिए हल कर सकते हैं और (2) में उन प्रतिस्थापित कर देते हैं। तब हम युग्मित लोलकों के युग्मत् अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं। स्थापित कीजिए कि ये वास्तव में ही समीकरणों (20.10) से सहमत हैं।

३.६. बोलन क्षमक— x -दिशा में बोलनशील एक निकाय (संहति, M) प्रत्यानयन बल का समानुपाती नियतांक, K) एक कमानी (नियतांक, k) द्वारा एक संहति m से इस भाँति युग्मित है कि m भी x -दिशा में बोलन कर सकता है। माँग यह है कि जब कोई बाह्य बल $P \cos \omega t$ संहति M पर आरोपित हो तब यह संहति M विराम में रहे। तो निकाय (m, k) को किन प्रतिबंधों का अनुपालन करना चाहिए?

चतुर्थ अध्याय संबंधी

४.१. एक समतलीय संहति-वितरण के अवस्थितिव घूर्णबृन्ध—सिद्ध कीजिए कि कैसे-भी संहति-वितरण के लिए (समतल के लंबवत्) “ध्रुवी” अक्ष के प्रति का अवस्थितिव-घूर्ण (संहति-वितरण के समतल में, ध्रुवी अक्ष पर प्रतिच्छेद करते हुए) दो परस्पर समकोणिक “निरक्षीय” अक्ष के प्रति के अवस्थितिव-घूर्णों के योग के बराबर होता है। किसी वृत्तीय मंडलक के लिए इसको विशिष्टीकृत कीजिए।

४.२. लट्टू का अपने मुख्य अक्षों पर घूर्णन—आकृति ४६ क, ख (पृ० १९८) के अनुसार किसी असमित लट्टू के घूर्णन अपने सबसे बड़े और सबसे छोटे अवस्थितिव घूर्ण के अक्षों पर तो स्थायी, पर मझोले अवस्थितिव घूर्ण के अक्ष पर अस्थायी होते हैं। इसे वैश्लेषिक रीति में सिद्ध कीजिए। यूलेर के गति समीकरणों से चलिए और अक्ष के चारों ओर के घूर्णन के कोणीय वेग ω को नियत रख लीजिए ($\omega_1 =$ नियत ω_0)। अन्य दो मुख्य अक्षों के प्रति के कोणीय वेग, ω_2 तथा ω_3 आदि में

तो शून्य होंगे, परंतु किसी स्थान-च्युति के कारण शून्य से अन्य मानों के हो जाते हैं। यदि स्थानच्युति छोटी-सी हो मान लें तो प्रथम यूलेर समीकरण बताता है कि प्रथम सन्निकटता तक ω_1 अपरिवर्तित, $\approx \omega_0$ रहता है। अन्य दो समीकरणों से ω_2 और ω_3 में प्रथम कोटि के दो रैखिक अवकल समीकरणों की प्राप्ति होती है। अब $\omega_2 = ae^{\lambda t}$ तथा $\omega_3 = bc^{\lambda t}$ रख दीजिए, जहाँ a और b कोई-भी (स्वेच्छ) नियतांक हैं, और उन दो समीकरणों में प्रतिस्थापित कर लीजिए। परिणाम में निकले λ के लिए वर्गात्मक समीकरणों का विचार-विवेचन उपर्युक्त अभ्युक्ति का प्रमाण प्रदान करता है।

४.३. बिलियर्ड खेल में ऊँचे और नीचे निशाने—पिच्छू निशाना तथा खीच निशाना^१। क्षैतिज ब्यू^२ से बिलियर्ड का गेंद उसके माध्यिका-समतल में, अर्थात् बिना "इग्लिश" के, मारा जाता है। केन्द्र से कितनी ऊँचाई, h , पर गेंद मारा जाना चाहिए कि शुद्ध (स्खलन हीन) लुठन प्रारंभ होवे? कपड़े और गेंद के बीच गतिज घर्षण को ध्यान में रखते हुए ऊँचे और नीचे पर मारे हुए गेंद का सिद्धांत निकालिए। ऊँचे निशाने में, जितने समय तक कि घर्षण आरोपित रहता है, उस समय में, सहति केन्द्र का वेग कितना बढ़ेगा तथा नीचे निशाने में कितना कम होगा? केवल शुद्ध लुठन के ही रह जाने में कितना समय लगता है?

किसी दूसरे गेंद से टक्कर खाने में अर्थात् पिच्छू और खीच निशानों में, क्या बातें होती हैं यह भी यही विधि समझा देती है।

४.४ बिलियर्ड गेंद की परवलयिक गति—गेंद को कैसे मारना चाहिए कि उसके गुरुत्व-केन्द्र की आदि की गति और घूर्णन-अक्ष परस्पर अभिलंब न हो? दिखलाइए कि जबतक गेंद स्खलन करता रहता है तब तक घर्षण बल की दशा नियत रहती है। गेंद के केन्द्र का प्रक्षेप-मध्य क्या होगा? कितनी देर बाद शुद्ध लुठन होने लगता है?

पंचम अध्याय संबंधी

५.१. समतल में आपेक्षिक गति—परिणमनीय कोणिक वेग ω से एक समतल अपने किसी बिंदु O पर खींचे हुए अभिलंब के चारों ओर घूर्णन कर रहा है।

अपकेन्द्र बल के अतिरिक्त अन्य कौन से बल किसी संहति-विंदुपर अनुप्रयुक्त करना चाहिए ताकि घूर्णनयुक्त समतल में उसके गति-समीकरणों का रूप वही हो जाय जो कि स्थानीयतया स्थिर समतल के अवस्थितत्वीय ढाँचे में था ? सुविधाजनक होगा कि स्थानीयतया स्थिर समतल में सम्मिश्र परिणम्यों $x+iy$ का और घूर्णनयुक्त समतल में $\xi+i\eta$ का प्रवेश कराया जाय ।

५.२ घूर्णनयुक्त ऋजु रेखा पर एक कण की गति—किसी ऋजु रेखा पर एक संहति-विंदु बिना घर्पण के चल रहा है। ऋजु रेखा स्वयं नियत कोणीय वेग से अपने लंबवत् उसको प्रतिच्छेद करती हुई एक क्षैतिज अक्ष के चारों ओर घूर्णन कर रही है। घूर्णनयुक्त ऋजु रेखा पर समय के फलन के रूप में कण की गति का परिकलन कीजिए और दिखाइए कि नियंत्रण बल (गति-नियंत्रक बल) तथा इस बल की ओर का गुश्तवीय आकर्षण का घटक, ये दोनों कारिओलिस बल का सतुलन भर कर पाते हैं।

५.३. अपूर्णपदीय निकाय के सरलतम उदाहरणवत् “स्ले” (C. Carathiodory (करायेआँदारी) *Z. angew. Math. Mech* (13), 71 (1933) के आधार पर।) बरफ पर सरकने वाली वे-पहिये की गाड़ी को स्ले कहते हैं। वह एक दृढ़ समतल निकाय की भाँति समझी जाती है जिसकी परिमित गति के लिए तीन स्वतंत्रता संख्याएँ होती हैं तथा अत्यणु गति के लिए केवल एक स्वतंत्रता संख्या होती है। (मिलाइए समस्या २.१ का चलता (लुठन करता) हुआ पहिया जिसकी परिमित गति में पाँच, अत्यणु गति में तीन स्वतंत्रता संख्याएँ थी।)

बरफ पर के सर्पि घर्पण की उपेक्षा कर दीजिए, या, अन्यांतरतया, समझिए कि सदा के लिए अश्व-कर्पण (घोड़े की खीच) द्वारा उसका प्रतिकार होता रहता है। परंतु हाँ, उस घर्पण F को अवश्य विचार में लेना होगा जो बरफ की पथ-नालियाँ स्ले के लंबे पटरों के विरुद्ध (जिन पर स्ले सरकती है) पार्श्वतः डालती हैं क्योंकि वही इन पटरों की पार्श्वगति को रोकता है। समझिए कि यह घर्पण एक ही अनुप्रयोग विंदु O पर सकेन्द्रित है।

स्ले में एक $\xi-\eta$ प्रणाली स्थित की जाती है। ξ -अक्ष लंबे पटरों की मध्य-रेखा पर संहतिकेन्द्र G (निर्देशांक $\xi=a, \eta=0$) से होता हुआ क्षैतिजतया जाता है; और η -अक्ष क्षैतिजतया F के अनुप्रयोग विंदु O से होता हुआ

जाता है । बरक्त के अंतित ननान ने एक x, y - पनानी हिवत करो है । नननिए कि δ और x अंशों के ढीन का कोण ϕ है ; $\omega = \phi$, स्ले का ऊर्जापर के प्रति क्षणिक कोणिक वेग , M स्ले की सहति है । उसका केद्र से जाते हुए ऊर्जापर के प्रति का अवस्थितित्व धनं बिंदु O (निर्देशक $\delta = \eta = 0$) के वेग के δ और η की ओर के घटक u, v है ।

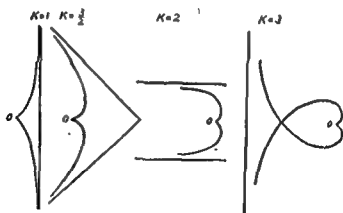
तो अब

(क) समस्या ६.१ की मम्मिय परिणम्यों जाती विधि का उपयोग कर, राशियों u, v, ω के लिए तीनों युगपत् अवकल समीकरण युलान कीजिए । F बाह्य बल है ;

(ख) अपूर्णपदीय प्रतिरथ $r=0$ का प्रवेश करा कर उहे सरलीकृत कीजिए तथा उनसे F निर्धारित कीजिए ;

(ग) कोण ϕ के बदले ϕ का समानुपाती एक सहायक कोण प्रवेश करा कर उन्हें समाकलित कीजिए ;

(घ) सत्यापित कीजिए कि स्ले की गतिज ऊर्जा नियत रहती है (यमोकि F कोई कर्म नहीं करता) ।



आ० ५६— k के विविध मानों के लिए स्ले के प्रक्षेपनय, कराथेब्रिदारी के अनुसार ।

(ड) दिखलाइए कि, समय-मापक्रम का उचित निर्वाचन करने पर, x y -समतल में बिंदु O के प्रक्षेपपथ में $t=0$ पर एक निश्चिताग्र¹ होता है और ऋजुरेखाओं $t=\pm\infty$ के वह अनंतस्पर्शतः² समीप जाता है जैसा कि कारायेआ-दरो से उद्धृत आ० ५७ के चक्रों में दर्शाया गया है।

षष्ठ अध्याय सम्बन्धी

६.१. हैमिल्टन-सिद्धांत निदर्शक दृष्टांत—निम्नलिखित स्थितियों में हैमिल्टन के समाकल का, सीमाओं $t=0$ तथा $t=t_1$ के बीच, परिकलन कीजिए—

(क) एक गिरते हुए कण की वास्तविक गति के लिए, $z=\frac{1}{2}gt^2$;

(ख) दो कपोल-कल्पित गतियों, $z=ct$ तथा $z=at^3$ के लिए, जहाँ नियतांक c और a का निर्धारण यों करना है कि आदि तथा अंत-स्थान, हैमिल्टन-सिद्धांत के परिणमन-नियमों के अनुसार, वास्तविक पथ के उन स्थानों के सपाती हों। दिखलाइए कि समाकल का मान वास्तविक गति (क) के लिए कपोल कल्पितों (ख) से छोटा है।

६.२. समतल में सापेक्ष गति तथा घूर्णनयुक्त ऋजु रेखा पर गति—एक बार फिर, अब समस्याओं ५.१ तथा ५.२ का लाग्रान्ज विधि से साधन कीजिए।

६.३. एक बार फिर घूर्णनयुक्त पृथिवी पर स्वतंत्र पतन तथा फूको-लोलक—सत्यापित कीजिए कि ये समस्याएँ भी लाग्रान्ज विधि से, सापेक्ष गति के नियमों के ज्ञान के बिना ही हल की जा सकती हैं। यह प्रक्रम³ चित्ताकर्षक है तथा उसका विचार पंचम अध्याय के प्रक्रम की अपेक्षा सरलतर है। परंतु हाँ, इसमें आने वाले बहुतेरे छोटे-छोटे पदों के सावधानतापूर्वक निरीक्षण की आवश्यकता अवश्य होगी। अवकलों $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}$ तथा $\frac{\partial}{\partial q}$ के कर चुकने के उपरांत ही पार्थिव त्रिज्या की विशालता तथा उसके कोणीय वेग की लघुता के कारण सामान्यतः प्रचलित⁴ सन्निकटनों को करना होगा; तब तक सभी पदों को रखना होगा।

साधारण भौलीय ध्रुवी निर्देशांकों, r, θ, ψ से प्रारंभ कीजिए, जहाँ r पृथ्वी केंद्र से मापा गया है। फिर आकृति ४९ में प्रवेशित निर्देशांकों δ, η, ζ के साथ इनकी तुलना कीजिए। समझिए कि पृथ्वी की त्रिज्या R है और

$0_0, \psi_0$ स्वतंत्रतापूर्वक गिरते हुए कण के आदिस्थान के, या लोलक के अवलम्बन बिंदु के, पृथिवी पृष्ठ पर प्रक्षेप के निर्देशांक हैं। तो घटन या दोलन करते हुए कण m के निर्देशांकों r, θ, ψ तथा ξ, η, ζ के बीच ये संबंध होंगे—

$$(1) \quad \xi = R(\theta - \theta_0), \quad \eta = R \sin \theta (\psi - \psi_0), \quad \zeta = r - R;$$

तथा

$$(2) \quad \dot{\psi}_0 = \omega t, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \phi = 0 \text{ अक्षान्त-कोटि।}$$

इससे प्राप्त होते हैं—

$$\dot{\xi} = R \dot{\theta}, \quad \dot{\eta} = R \sin \theta (\dot{\psi} - \omega) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \eta \dot{\theta}, \quad \dot{\zeta} = \dot{r};$$

तथा, विलोमतया,

$$(3) \quad \dot{r} = \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \dot{\xi}, \quad r \sin \theta \dot{\psi} = \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \dot{\eta} \\ + \omega R \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \sin \theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\eta}{R} \dot{\xi}, \quad \dot{r} = \dot{\zeta},$$

जिसमें दक्षिणी पार्श्व में आये हुए कोण θ को, (1) के अनुसार ξ का फलन समझना चाहिए।

इन मानों को गतिज ऊर्जा के व्यंजन

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2)$$

में प्रतिस्थापित करना होगा जो, तब $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \xi, \eta$ और ζ का फलन हो जाता है। यदि उन पदों को जो पीछे से छोड़ दिये जायेंगे... .. से ब्यक्त करें तो T से, उदाहरणतः, हम निम्नलिखित परिकलित कर सकते हैं—

$$(4) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)^2 \dot{\zeta} - m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\eta}{R}, \\ \left\{ \dots + \omega R \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \sin \theta + \dots \right\},$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m \ddot{\xi} - m \omega \cos \theta \dot{\eta} + \dots$$

$$(6) \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{r}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = +m \omega \cos \theta \dot{\eta} + \dots$$

प्रस्तुत समस्या में स्थितिज ऊर्जा के लिए हम यह ले सकते हैं —

$$(7) \quad V = mg(r - R) = mg \xi.$$

सत्यापित करिए कि इस प्रकार स्वतंत्र पतन के लिए समीकरणों (30.5) को और फूको-लोलक के लिए समीकरणों (31.2) को प्राप्त करते हैं, जिनसे वे सब परिणाम निकलते हैं जो पहले विकसित किये जा चुके हैं।

६.४. समतल आधार पर लुढ़कते हुए सिलिंडर का “लड़खड़ाना”,—त्रिज्या a एक वृत्तीय सिलिंडर का संहति-वितरण विपरीत है जिस कारण सिलिंडर का गुरुत्व केंद्र G अक्ष से s दूरी पर है। एक क्षैतिज समतल पर गुरुत्व के प्रभाव-वशा, सिलिंडर लुठन कर रहा है अर्थात् लुढ़क रहा है। समझिए कि सिलिंडर की संहति m है तथा संहति केंद्र से सम्मिति-अक्ष के समांतर जाते हुए अक्ष के प्रति उसका अवस्थितिस्त्व-पूर्ण T है। लाग्रेंज विधि से गति का अनुसंधान कीजिए। पूर्णतः कोण ϕ का व्यापकीकृत निर्देशांक q की भाँति प्रवेश कराइए। गतिज ऊर्जा के परिकलन में, अभिदेश बिंदु को सिलिंडर के

(क) संहति केंद्र पर,

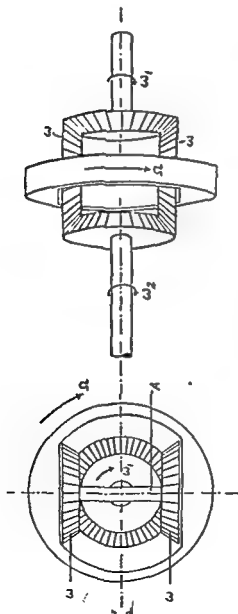
(ख) ज्यामितीय केंद्र पर,

रखिए और सत्यापित कीजिए कि दोनों स्थितियों में ϕ के लिए एक ही अवकल समीकरण निकलता है।

“लघु दोलनों की विधि” से दिखलाइए कि सिलिंडर की साम्यावस्था स्थायी होगी जब G निम्नतम स्थान में होगा तथा जब G उच्चतम स्थान में होगा तब वह अस्थायी होगी।

६.५. मोटरकार का “डिफरेंशियल” (वैषम्य कारक)। मोटरकार के दो पहिये जिनके द्वारा गाड़ी चलती है अर्थात् जो पिस्टन से संबंधित होते हैं, उन्हें चालित पहिये कहेंगे। यदि चालित पहियों को बिना स्खलन किये हुए चलाना है तो किसी वक्र पर उनको अलग-अलग चारों से जाना होगा। यह काम डिफरेंशियल (आ० ५८) द्वारा प्राप्त किया जाता है। (इसीलिए उसका नाम यहाँ वैषम्य कारक

है।) इंजन तो चालित पहियों (Ω) को चलाता है (परन्तु गाड़ी के लिए ये चालन-पहिये होते हैं। आकृति में एक पहिया दिखलाया है)। इन्हीं में



आकृति ५८

मोटरगाड़ी का वैषम्यकारक (डिफरेंशियल)। साथ ही यही (बोल्ट्ज़मान के) दो युग्मित परिधियों के प्रेरण-प्रभाव का प्रति-
मान भी है। बायें, गाड़ी की पिछली धुरी का दृश्य। दायें,
इस धुरी का पार्श्व दृश्य।

धुरी A लगी हुई होती है। दो कोर-योकत्र^१ (भिन्न दिशाओं में घूमने वाले कोरदार पहिये) , (ω) धुरी A पर इस प्रकार बँधाये होते हैं कि वे A के चारों ओर परस्पर स्वतंत्रतया घूम सकें। वे स्वयं कोर-योकत्रों के एक जोड़े (ω_1, ω_2) से फँसे होते हैं जिनपर वे, A के घूमने पर, लुंठन कर सकते हैं (देखिए आ० ५८ के दायें को)।

मोटरगाड़ी के पिछले पहियों की धुरी मध्य में कटी हुई होती है (आ० ५८, दायीं)। उसके दक्षिणार्ध के दायें सिरे पर कोर-योकत्र (ω_1) लगा है, वामार्ध के दायें सिरे पर कोर-योकत्र (ω_2) , अतएव पिछली धुरी के दो अर्ध वैषम्यकारक द्वारा इस प्रकार से युग्मित हो गये कि वे विभिन्न कोणीय वेगों से घूम सकते हैं।

कोणीय वेगों Ω, ω, ω_1 और ω_2 के बीच के चलात्मक संबंधों को स्थापित कीजिए। तदुपरांत, आभासी कर्म के सिद्धांत का उपयोग कर, (Ω) पर आरोपित चालन ऐंठ L और (ω_1) तथा (ω_2) पर आरोपित ऐंठे L_1 तथा L_2 के बीच साम्यावस्था का प्रतिबध व्युत्पन्न कीजिए।

निकाय का गति-समीकरण क्या है? (ω_1) तथा (ω_2) के अवस्थितित्व घूर्णों को क्रमात् I_1 तथा I_2 लीजिए, योकत्र-जोड़े (ω) का A के अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण I और उसी (ω) का चालन-पहिये के अक्ष के प्रतिका I' लीजिए। I' के लिए (Ω) के अंशदान की उपेक्षा कर दीजिए।

यदि एक पिछला पहिया त्वरित हो जाय, उदाहरणतः घर्षण के कम हो जाने से, तो दूसरा पहिया मंदित हो जाता है चाहे चालन-ऐंठ और घर्षणीय ऐंठ वहाँ बराबर भी रहें।

समस्याओं को हल करने के लिए संकेत

इन समस्याओं के प्रायः सभी मध्यात्मक परिकलन स्लाइड-रूल (सर्पी पटरी-बिसर्पी गणक) की सहायता से पर्याप्त यथार्थता के साथ किये जा सकते हैं। गोद्यतापूर्वक सन्निकट हल प्राप्त करने के लिए इस उपयोगी करण (टूल) की ओर स्पष्टतया ध्यान दिला देना चाहिए।

१.१ इसका प्रमाण कि $v_1 = v_2 = v$ या तो बीजत या ज्यामितीयतया व्युत्पन्न किया जा सकता है। पश्चोक्त रोलि में किमी समतलीय रेखाचित्र में v_1 तथा v_2 का समकोणीय निर्देशांकवत् व्यवहार कीजिए।

१.२ वहिष्कृत सहितियों के वेग क्रमात् ये हैं—

$$\frac{2M}{M+m} v_0 \quad \text{तथा} \quad \frac{M-m}{M+m} v_0$$

१.३ यहाँ हम १.२ के सूत्रों को चिह्न-परिवर्तन के साथ प्राप्त करते हैं।

१.४. सत्यापित कर लीजिए कि V का वर्गात्मक समीकरण उसी लघुतम मान v_0 को पहुँचाता है जो v के लिए है।

१.५. जिस अवकल समीकरण का समाकल करना है वह है

$$m\dot{v} - \mu a = -mg.$$

t के स्थान में $m = m_0 - \mu t$ को स्वतंत्र चर-राशि लेने से हम प्राप्त करते हैं

$$v = -a \ln \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t \right) - gt;$$

तथा, एक और समाकलन के बाद (z = पृथ्वी तल से ऊँचाई) ;

$$(1) \quad z = \frac{am_0}{\mu} \left\{ \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t \right) \ln \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t \right) + \frac{\mu}{m_0} t \right\} - \frac{1}{2} g t^2.$$

छोटे t के लिए, t के उच्चतर घात वाले पदों की उपेक्षा कर, प्राप्त करते हैं—

$$(2) \quad z = \left(\frac{\mu a}{m_0} - g \right) \frac{t^2}{2}.$$

समीकरण (1) का संख्यात्मक परिकलन प्रदान करता है

t	10 सेकंड	30 सेकंड	50 सेकंड
z	0.54 किलो मीटर	5.65 किलो मीटर	18.4 किलो मीटर

१.६ जल का आपेक्षिक गुस्त्व λ होने के कारण, विदु की संहति $m = \frac{4\pi}{3} r^3$

है, अर्थात्, $dm = 4\pi r^2 dr$ परन्तु, दूसरी ओर, संवनन^१ में, $dm = 4\pi r^2 \alpha dt$, जहाँ समानु-
पातीय—गुणनखंड के लिए α लिया गया है। इससे निकला कि $dr = \alpha dt$ तो
 r के पदों में अवकल समीकरण होगा

$$\alpha \frac{d}{dt} [r^3 v] = r^3 g.$$

आदि-दशाओं में $r=c$ के लिए $v=v_0$ होने के कारण, इसका साधन होगा

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4} + \frac{c^3}{r^3} \left[v_0 - \frac{g}{\alpha} \frac{c}{4} \right].$$

तो $c=0$ और $v_0=0$ के लिए प्राप्त करते हैं, क्रमात्,

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4}, \quad v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4} \left(1 - \frac{c^4}{r^4} \right).$$

१.७ जंजीर के नीचे लटकती हुई तात्कालिक लंबाई x लीजिए। यदि
जंजीर की प्रति मात्रक लंबाई की संहति को λ रख लें तो गति-समीकरण होगा—

$$\frac{d}{dt} [x \dot{x}] = x \ddot{x} + \dot{x}^2 = g x.$$

इसका समाकलन जरा कठिन होने के कारण प्रतिस्थापन $x = u^{\frac{1}{2}}$ के बाद दीर्घवृत्तीय
समाकल प्राप्त हो जाता है—हमें इसी से सतोष कर लेना होगा कि राशियों T, \dot{V}
तथा \dot{Q} (प्रति मात्रक समय में कानों ऊर्जा हानि) को x, \dot{x} तथा \ddot{x} के पदों
में रख लें और यह दिखला दें कि गति-समीकरण द्वारा निम्नलिखित की प्राप्ति
होती है

$$\dot{T} + \dot{V} + \dot{Q} = 0;$$

और इसलिए,

$$\dot{T} + \dot{V} \neq 0.$$

१.८. यहाँ गति-समीकरण है, $\ddot{x} = gx$. नियत गुणांक वाले इस गति-समीकरण का साधन (3.24 b) के रूप का होगा। ऊर्जा-मिद्धात की वैधता या तो गति-समीकरण से अवकल रूप में या उसके निम्नलिखित माधन से समाकल रूप में पढ़ी जा सकती है—

$$x = a \left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t} \right), \alpha^2 = \frac{g}{l}, a = \frac{x_0}{2}.$$

१.९. समस्या में दिये हुए सख्यात्मक न्यास (दत्त—data) से चंद्र का अपकेन्द्र त्वरण 111.500^{-2} [सहति $\times \frac{1}{\text{सेकंड}^2}$] में परिकलित किया जा सकता है। पृथिवी की त्रिज्या r के लिए उसकी प्रारम्भिक परिभाषा ले सकते हैं कि $r = \frac{2}{\pi} 10^7$ मीटर। दूसरी ओर, पृ० २६ की भाँति g के द्वारा गुरुत्वाकर्षणोंक G के निरसन के बाद, गुरुत्वाकर्षण नियम प्रदान करता है कि अपकेन्द्र त्वरण $\frac{g}{60^3}$ है। इस प्रकार जो दो सख्यात्मक मान प्राप्त होते हैं उनमें सतोपजनक सहमति है।

१.१०. निर्देशांकों के लिए रूपांतरण समीकरणों का स्थापन कीजिए जैसे कि (2.5) में परंतु $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ रख दीजिए। देखेंगे कि रूपांतरित घूर्ण L के घटक L के घटकों के रेखिक पदपुज होंगे जिनके गुणांक रूपांतरण व्यवस्था के समगुणन खडों के बराबर होंगे। रूपांतरण व्यवस्था के लिए ये संबंध हैं—

$$\rho\gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \rho\gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}, \dots\dots\dots$$

इन्हें लव कोणीयता के प्रतिबंधों द्वारा सिद्ध करना होगा। यहाँ $\rho = \pm 1$, इस बात के अनुसार कि रूपांतरित प्रणाली उसी भाव में है जिसमें कि प्रारम्भिक प्रणाली (इसे “माप एक का रूपांतरण” कहते हैं) या प्रतिकूल भाव में।

१.११. समी० (6.8) से निम्नलिखित प्राप्त करते हैं [आ० ७ तथा समी० (6.5) के अनुसार, B ऋणात्मक है]

$$e = \frac{-B}{\frac{GM}{C}} = \frac{|B|}{\frac{GM}{C}}.$$

परिणामवश, दीर्घवृत्त ($e < 1$) के लिए $\frac{GM}{C} > |B|$, तथा अतिपरवलय ($e > 1$) के लिए $\frac{GM}{C} < |B|$, परंतु $R = \frac{GM}{C}$ वेगालेख वृत्त¹ की त्रिज्या है और $|B|$ केन्द्र की ध्रुव से दूरी। इससे प्रश्न के सिलसिले में किया गया दृढ़ कथन तुरत ही निकल आता है।

नीचे दी हुई सारणी, जिसमें

$$v_0 = \frac{GM}{C} + |B|,$$

से अभिमानु पर ग्रह के वेग का मतलब है, दिखलाती है कि वृत्त तथा परवलय वाली सीमात स्थितियाँ व्यवस्था में आ जाती हैं।

ग्रहीय प्रक्षेप पथ	e	$ B $	वेगालेख	v_0
वृत्त	$= 0$	$= 0$	केन्द्र ध्रुव पर	$\frac{GM}{C}$
दीर्घवृत्त	< 1	$< R$	ध्रुव वेगालेख के भीतर	$< \frac{2GM}{C}$
परवलय	$= 1$	$= R$	वेगालेख ध्रुव से होकर जाता है	$= \frac{2GM}{C}$
अतिपरवलय	> 1	$> R$	ध्रुव वेगालेख के बाहर	$> \frac{2GM}{C}$

१.१२. अवकल समीकरणों (6.4) में GM के स्थान पर $\pm \frac{cE}{m}$ रखना होगा, जहाँ उपरला चिह्न (आकर्षण) पनात्मक आयन के लिए है, निचला चिह्न (प्रतिकर्षण) ऋणात्मक आयन के लिए। देखिए कि यहाँ $\dot{x}=0$, $\dot{y}=-v_0$ और ϕ का मतलब वही है जो आ० ६ में है, जिन कारण, समीकरण (6.5) $\phi = \frac{\pi}{2}$ के लिए प्रदान करते हैं—

$$A = \pm \frac{cE}{m} C, \quad B = -v_0$$

और तब समी० (6.6) निम्नलिखित हो जाता है—

$$(1) \quad \frac{1}{r} = \pm \frac{cE}{m_0 C^2} (1 - \sin \phi) - \frac{v_0}{C} \cos \phi.$$

C एक प्रक्षेपय से दूसरे को, y -अक्ष से परे की निशाना लगाने की दिशा की दूरी के साथ, बदलता रहता है। इससे परिणाम यह निकलता है कि ऊपर दिया हुआ समीकरण (1) वक्रों का एक परिवार निरूपित करता है। इस परिवार के अन्वालोप की प्राप्ति के लिए समी० (1) का C के लिए अवकलन करिए और फिर इससे तथा प्रारम्भिक समीकरण से C का निरसन कर प्राप्त करिए

$$(2) \quad x^2 = p^2 - 2py, \quad p = \pm \frac{4cE}{m_0 v_0^2}.$$

देखिए कि कोई भी इलेक्ट्रॉन-पथ अतिपरवलय की केवल एक शाखा ही होता है, परन्तु (1) दोनों शाखाएँ निरूपित करता है। सत्यापित कर लीजिए कि समी० (2) इलेक्ट्रॉनों के वास्तविक पथों का अन्वालोप केवल प्रतिकर्षण की स्थिति में ही है—सत्यापन सरलतमतया सगत वक्र परिवारों के आलेख्य द्वारा किया जा सकता है।

१.१३. यहाँ § ३ (४) के सरलावर्त दोलनों की विधि का उपयोग सबसे अधिक सुखसाध्य होगा। परन्तु शिक्षाप्रद होगा कि जाँच कर ली जाय कि § ६ की विधियाँ भी वांछित नतीजे पर पहुँचाती हैं।

१.१४. यहाँ दी हुई नाभिकीय प्रतिक्रिया प्रत्यास्थ टक्कर नहीं है और न ही वह अप्रत्यास्थ टक्कर है। उसे, कहने के लिए, “अतिप्रत्यास्थ” टक्कर कह सकते हैं, क्योंकि यहाँ नाभिकीय बंधन ऊर्जा E को प्राथमिक (प्राइमरी) ऊर्जा E_p

के साथ जोड़ देना होता है। अल्फा-कणों की गतिज ऊर्जा चिर-सम्मत रूप $E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$ में परिकलित की जा सकती है।

तब ऊर्जा तथा संवेग के समीकरणों द्वारा स-संमिति स्थिति के लिए किर्चनर (Kirchner) के फल की प्राप्ति होती है कि

$$\cos \phi = \left(\frac{m_p}{2m_\alpha} \frac{E_p}{E + E_p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

समस्या में कहा हुआ eV (इलेक्ट्रान-वोल्ट) वह ऊर्जा है जो एक वोल्ट ($=10^9$ विभव के वंद्युत चुवकीय मात्रकों) विभवनपात में से होकर जाने वाले इलेक्ट्रानीय आवेश e ($=1.6 \times 10^{-20}$ आवेश के वंद्युत चुवकीय मात्रक) को प्राप्त होती है। अतएव एक eV (इलेक्ट्रान-वोल्ट) $=1.6 \times 10^{-12}$ अर्ग।

प्रोटान की सहति है $m_p = 1.65 \times 10^{-24}$ ग्राम। अतएव अल्फाकण की सहति हुई $m_\alpha = 6.6 \times 10^{-24}$ ग्राम। पदचोक्त की आवश्यकता इसलिए है कि E_α पहले eV में व्यक्त की गयी और फिर अर्ग में परिवर्तित की गयी, और E_α से वेग v_α को निकालना है। इस प्रकार से प्राप्त हुआ v_α का मान के चिरसम्मत रूप को ठीक ठहराता है और दिखलाता है कि समी० (4.11) का आपेक्षिकता-शोषण उपेक्षणीय है।

१.१५. द्वितीय समी० (3.27) में $V_p = 0$ रख लीजिए और, कहिए कि $v_0 = 1$, ताकि मारे हुए कण की टक्कर के बाद की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} M V^2$ को तुरंत ही $x = \frac{M}{m}$ के फलनवत् परिकलित कर सकें। विशेष बात यह है कि $x = 1$ के लिए वह महत्तम निकलती है तथा $x = 206$ के लिए छोटी-सी ही—महत्तम मान की केवल १.९ प्रतिशत अर्थात् १.९/१०० मात्र।

इस प्रकार के विचारों से चलते हुए फर्मी ने १९३५ में "उष्मीय" न्यूट्रानों के उत्पादन की अपनी विधि निकाली, अर्थात् एक-समान वेग के मंदग न्यूट्रान बृद्ध जो बारबार टक्करो द्वारा पैरेफिन में समायी उष्मीय ऊर्जा वाले प्रोटानों के साथ सामंता में पहुँच गये हैं।

१.१६. E के निर्देशांक है—

$$(1a) \quad x = ML = a \cos u \\ = SL - SM = r \cos \phi - \epsilon a,$$

$$(1b) \quad y = EL = r \sin \phi = b \sin u.$$

दीर्घवृत्त का r, ϕ में ध्रुवी समीकरण इस रूप में लिखिए—

$$(1) \quad r = \epsilon r \cos \phi + p, \quad p = a(1 - \epsilon^2).$$

इसमें (1a) से $r \cos \phi$ का मान प्रतिस्थापित कर प्राप्त कीजिए

$$(2) \quad r = \epsilon(a \cos u + \epsilon a) + a(1 - \epsilon^2) = a(1 + \epsilon \cos u)$$

इस समी० (2) का अवकलन प्रदान करता है

$$(3) \quad dr = -\epsilon a \sin u du$$

समी० (1) का अवकलन देता है

$$\epsilon \sin \phi d\phi = -p \frac{dr}{r^2}.$$

इससे प्राप्त होता है

$$(4) \quad \frac{-p}{\epsilon \sin \phi} \dot{r} = r^2 \dot{\phi} = C,$$

जहाँ C क्षेत्रफलीय वेगांक है। समीकरणों (1b) और (3) से समी० (4) यों रूपांतरित हो जाता है

$$\frac{pa}{b} \dot{u} = C.$$

अंततः (2) से r को प्रतिस्थापित कर लीजिए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण की प्राप्ति हो जाय—

$$(5) \quad (1 + \epsilon \cos u) du = n dt. \quad (6) \quad n = \frac{Cb}{pa^2}$$

इस (5) का समाकलन प्रदान करता है

$$u - \epsilon \sin u = nt.$$

यहाँ समाकलनाक लुप्त हो जाता है क्योंकि हमने मान लिया था कि समय को इस प्रकार मापेंगे कि $u=0$ के लिए $t=0$ । राशि nt को माध्य्य अनमली कहते हैं और, खगोल विज्ञान में अन्य अनमलियों की भांति, वह अभिमानु से मापी जाती है। नाम इस बात से निकला कि समी० (6.9) द्वारा ऊपर दिये हुए (6) का दर्शनाय

॥ $\frac{2\pi}{T}$ में रूपांतरित हो जाता है।

के साथ जोड़ देना होता है। अल्फा-कणों की गतिज ऊर्जा चिर-सम्मत रूप $E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$ में परिकलित की जा सकती है।

तब ऊर्जा तथा संवेग के समीकरणों द्वारा स-समिति स्थिति के लिए किर्चनर (Kirchner) के फल की प्राप्ति होती है कि

$$\cos \phi = \left(\frac{m_p}{2m_\alpha} \frac{E_p}{E + E_p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

समस्या में कहा हुआ eV (इलेक्ट्रान-वोल्ट) वह ऊर्जा है जो एक वोल्ट ($=10^9$ विभव के वैद्युत चुंबकीय मात्रकों) विभवनिपात में से होकर जाने वाले इलेक्ट्रानीय आवेश e ($=1.6 \times 10^{-20}$ आवेश के वैद्युत चुंबकीय मात्रक) को प्राप्त होती है। अतएव एक eV (इलेक्ट्रान-वोल्ट) $=1.6 \times 10^{-12}$ अर्ग।

प्रोटान की संहति है $m_p = 1.65 \times 10^{-24}$ ग्राम। अतएव अल्फाकण की संहति हुई $m_\alpha = 6.6 \times 10^{-24}$ ग्राम। पदचोक्त की आवश्यकता, इसलिए है कि E_α पहले eV में व्यक्त की गयी और फिर अर्ग में परिवर्तित की गयी, और E_α से वेग v_α को निकालना है। इस प्रकार से प्राप्त हुआ v_α का मान के चिरसम्मत रूप को ठीक ठहराता है और दिखलाता है कि समी० (4.11) का आपेक्षिकता-शोधन उपेक्षणीय है।

१.१५. द्वितीय समी० (3.27) में $V_0 = 0$ रख लीजिए और, कहिए कि $v_0 = 1$, ताकि मारे हुए कण की टक्कर के बाद की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} M V^2$ को तुरत ही $x = \frac{M}{m}$ के फलनवत् परिकलित कर सकें। विशेष बात यह है कि $x = 1$ के लिए वह महत्तम निकलती है तथा $x = 206$ के लिए छोटी-सी ही—महत्तम मान की केवल १.९ प्रतिशत अर्थात् १.९/१०० मात्र।

इस प्रकार के विचारों से चलते हुए फर्मी ने १९३५ में “उष्मीय” न्यूट्रानों के उत्पादन की अपनी विधि निकाली, अर्थात् एक-समान वेग के मद्ग न्यूट्रान बृद्ध जो बारंबार टक्करों द्वारा पैरेफिन में समायी उष्मीय ऊर्जा वाले प्रोटानों के साथ सामता में पहुँच गये हैं।

१.१६. E के निर्देशांक है—

$$(1a) \quad x = ML = a \cos u \\ = SL - SM = r \cos \phi - \epsilon a,$$

$$(1b) \quad y = EL = r \sin \phi = b \sin u.$$

दीर्घवृत्त का r, ϕ में ध्रुवी समीकरण इस रूप में लिखिए—

$$(1) \quad r = \epsilon r \cos \phi + p, \quad p = a(1 - \epsilon^2).$$

इसमें (1a) से $r \cos \phi$ का मान प्रतिस्थापित कर प्राप्त कीजिए

$$(2) \quad r = \epsilon(a \cos u + \epsilon a) + a(1 - \epsilon^2) = a(1 + \epsilon \cos u)$$

इस समी० (2) का अवकलन प्रदान करता है

$$(3) \quad dr = -\epsilon a \sin u du$$

समी० (1) का अवकलन देता है

$$\epsilon \sin \phi d\phi = -p \frac{dr}{r^2}.$$

इससे प्राप्त होता है

$$(4) \quad \frac{-p}{\epsilon \sin \phi} r = r^2 \dot{\phi} = C,$$

जहाँ C क्षेत्रफलीय वेगोंक है। समीकरणों (1b) और (3) से समी० (4) यों रूपांतरित हो जाता है

$$\frac{pa}{b} \dot{u} = C.$$

अंततः (2) से r को प्रतिस्थापित कर लीजिए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण की प्राप्ति हो जाय—

$$(5) \quad (1 + \epsilon \cos u) du = n dt, \quad (6) \quad n = \frac{Cb}{pa^2}$$

इस (5) का समाकलन प्रदान करता है

$$u - \epsilon \sin u = nt.$$

यहाँ समाकलनोंक लुप्त हो जाता है क्योंकि हमने मान लिया था कि समय को इस प्रकार मापेंगे कि $u=0$ के लिए $t=0$ । राशि nt को माध्य अनमली कहते हैं और, खगोल विज्ञान में अन्य अनमलियों की भाँति, वह अभिमानु से मापी जाती है। नाम इस बात से निकला कि समी० (6.9) द्वारा ऊपर दिये हुए (6) का दक्षिणांग

$\frac{2\pi}{T}$ में रूपांतरित हो जाता है।

२

२.१ प्रश्न के प्रथम प्रतिबंध द्वारा समीकरण

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \delta \psi$$

को ऐसी स्थिति में पहुँचाए कि दक्षिणांश के लिए निम्नलिखित की प्राप्ति हो

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} a \cos \psi + \frac{\partial f}{\partial y} a \sin \psi + \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \delta \phi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \delta \psi.$$

अब $\delta \phi$ तथा $\delta \psi$ को अलग-अलग $= 0$ रख सकते हैं। अतएव

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0;$$

तथा

$$(3) \quad a \frac{\partial f}{\partial x} \cos \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \sin \psi + \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0.$$

पिछला समीकरण सब ψ यों के लिए वैध है और इसलिए ψ के लिए अवकलित किया जा सकता है। समी० (२) की सहायता से यह प्रदान करता है—

$$(4) \quad -a \frac{\partial f}{\partial x} \sin \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \cos \psi = 0;$$

तथा, ψ के लिए एक और अवकलन के बाद,

$$(5) \quad a \frac{\partial f}{\partial x} \cos \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \sin \psi = 0.$$

अब (४) और (५) से निकलता है

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

तो (३) के अनुसार,

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0.$$

भी होना चाहिए। समीकरण बृंद (२), (६) और (७) दिखाते हैं कि x, y, ϕ तथा ψ पर निर्भर करता हुआ कोई प्रतिबंध $f=0$ होता ही नहीं, अर्थात् यह कि हमारा निकाय अपूर्णपदीय है। यह उपपत्ति G. Hamel, (हामल) की "Elementare Mechanik" (प्रारम्भिक यांत्रिकी) 2nd Ed., Leipzig 1922 की है।

२.२. इजन का "कम चित्र" खींच लीजिए अर्थात् ० से π तक के क्रैंक-कोणों के भुजाओं पर L -वक्र तथा IV -रेखा। लक्ष्य कीजिए कि L -वक्र और भुजाओं के बीच का क्षेत्रफल एवं IV -रेखा तथा भुजाओं के बीच का क्षेत्रफल, ये दोनों क्षेत्रफल बराबर होंगे। इसमें L_0 और IV के बीच एक संवध की प्राप्ति होती है। महत्तम और अल्पतम कोणीय वेग, ω_{max} तथा ω_{min} से संबंधित कोण, ϕ_2 तथा ϕ_1 , रेखाचित्र में L -तथा IV -वक्रों के प्रतिच्छेद-बिंदु हैं;

$$\sin \phi_1 = \sin \phi_2 = \frac{2}{\pi}; \quad \phi_2 = \pi - \phi_1; \quad \phi_1 = 39^\circ 33' = 0.69 \text{ रेडियन। कोणों } \phi_2$$

और ϕ_1 के बीच गतिपालक चक्र की गतिज ऊर्जा निर्धारित कीजिए और उसे I, ω_m तथा δ के पदों में व्यक्त कीजिए। उसी अंतर्गल के लिए लिखा हुआ ऊर्जा समीकरण आकाशित I का मान इस रूप में, करता है—

$$I = \frac{W}{\delta \omega_m^2} (\pi \cos \phi_1 - \pi + 2\phi_1) = \frac{0.66}{\delta \omega_m^2} W.$$

यदि

$$N = \frac{W\omega}{75} \text{ HP (अश्व शक्ति) तथा } n = \frac{60}{2\pi} \omega \text{ r.p.m. र.प.म.—घूर्णन}$$

प्रति सेकंड) तो, मात्रकों की व्यावहारिक पद्धति में, प्राप्त होता है:

$$I \cong 43,400 \frac{N}{n^2} \text{ kg.m.sec}^2.$$

(किलोग्राम-मीटर-सेकंड²)।

२.३. पृथिवी की गिर्या के मान के लिए प्रश्न १.९ देखिए। दिन के दैर्घ्य के संध्यात्मक परिकलन में $(8\pi)^{\frac{1}{2}} = 5$ रख लीजिए।

२.४. (क) यदि तुलादंड को अपने स्थान में स्थिर समझ लें तो चरखी (घिरनी) के आभासी घूर्णन $\delta\phi$ में केवल गुरुत्व तथा चरखी पर के अवस्थिति-बलों के बीच की साम्यावस्था का ही विचार करने की आवश्यकता है (एंड समीकरण)। इस प्रकार बाटों के त्वरण \ddot{x} की प्राप्ति होती है जो g का एक छोटा सा अंश मात्र निकलता है।

(ख) तुला दंड के एक आभासी घूर्णन को ऊपर दिये हुए से जोड़ दीजिए। यहाँ अवस्थितिव बलों के तुलादंड के आलव के प्रति के घूर्णों का प्रवेश कराना पड़ता है। तो ज्ञात होता है कि साम्य नहीं रहता। जब तक बाट p गिरता रहता है तुला दंड का पलड़े की ओर नीचे को विक्षेप होता है। भाराधिक्य के मानांकन में तुलादंड की लंबाई की अपेक्षा में घिरनी (चरखी) के व्यास की उपेक्षा कर सकते हैं। उसी सन्निकटन का उपयोग करते हुए एक अन्य प्रक्रम यह होगा कि पलड़े पर के बाट की तुलना तुलादंड के दूसरे सिरे पर के बाटों और अवस्थितिव बलों का रित बोझ से की जाय।

२.५. नत समतल का समीकरण यह लीजिए—

$$(1) \quad F(z, x, t) = z - ax - \phi(t) = 0.$$

यह $a = \tan \alpha$ नत समतल का क्षैतिज समतल से नियत नति-कोण α को निर्धारित करता है; $\phi(t)$ उसका z -अक्ष से प्रतिच्छेद है जो समय के साथ बदलता रहता है। लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरण (12.9a) प्रदान करते हैं—

$$(2) \quad \ddot{x} = -\lambda a, \quad z = \lambda - g.$$

λ को निर्धारित करने के लिए, (1) को t के लिए दो बार अवकलित कीजिए जिससे प्राप्त होता है—

$$(3) \quad \ddot{z} - a\ddot{x} = \ddot{\phi}(t).$$

(2) का (3) में प्रतिस्थापन λ प्रदान करता है और अब (2) का समाकलन सहज ही किया जा सकता है। आदि प्रतिबंधों के ये होते हुए कि $t=0$ पर $\dot{x} = \dot{z} = 0$, $x = x_0$, $z = z_0$, प्राप्त होते हैं

$$x = x_0 - \frac{a}{1+a^2} \left(\phi(t) - \phi(0) - \dot{\phi}(0)t + g \frac{t^2}{2} \right),$$

$$z = z_0 + \frac{1}{1+a^2} \left(\phi(t) - \phi(0) - \dot{\phi}(0)t - g a^2 \frac{t^2}{2} \right)$$

इनसे $\ddot{\phi} = +g$ के लिए प्राप्त करते हैं—

$$x = x_0 - g \frac{t^2}{2} \sin 2\alpha, \quad z = z_0 + g \frac{t^2}{2} \cos 2\alpha;$$

तथा, $\ddot{\phi} = -g$ के लिए,

$$x = x_0, \quad z = z_0 - g \frac{t^2}{2},$$

जेंगे कि स्वतंत्र पतन में। $\lambda=0$ केवल अंतिम अनुमान में; अन्यथा λ स्थान करते हुए धिज के प्रतिकूल एक दाब की भांति काम में जाता है और इसलिए कर्म करना है।

यह समस्या दालाबेर-सिद्धांत द्वारा, λ का प्रवेश कराये बिना ही, हल की जा सकती है। कारण कि समय का परिणामन नहीं करना है (देखिए पृ० ९२), आभासी विस्थापनों के लिए ऊपर दिये (I) से प्राप्त करते हैं कि $\delta_z = d\delta_x$ को दालाबेर सिद्धांत से यह परिणाम निकलता है कि—

$$\ddot{x} + (g + \ddot{z})d = 0.$$

(3) के साथ इस समीकरण द्वारा \ddot{x} और \ddot{z} को सीधे ही सीधे परिकलित कर सकते हैं। यह उदाहरण निर्दिष्ट करना है कि व्यापक समीकरणों की अपेक्षा दालाबेर-सिद्धांत द्वारा अधिकतर सीधे-सीधे और अधिकतर सहजतया समस्याएँ हल की जा सकती हैं। परंतु, दूसरी ओर, पूर्वोक्त (व्यापक समीकरण) का यह लाभ है कि नियंत्रण बलों का मात्रात्मकतया निर्धारण हो जाता है।

२६. प्रकरण II के (I) में किसी बाह्य ऐठ के प्रभाव के अधीन घूर्णन करते हुए निकाम के त्वरण समीकरण को व्युत्पन्न करने के लिए दालाबेर सिद्धांत का उपयोग किया गया था। वहाँ घूर्णन अक्ष के प्रति एक आभासी घूर्णन $\delta\phi$ का प्रवेश कराया था। उस अक्ष को यहाँ अपना x -अक्ष लेंगे। केवल स्पर्शीय अवस्थितित्व बल ही प्रासंगिक थे क्योंकि अभिलंब अर्थात् अपकेन्द्र बल घूर्णन $\delta\phi$ में कोई कर्म न करते थे।

यहाँ ये बल चाहिए जो किसी एक-समान घूर्णन में धुराधारों A और B पर पड़ते हैं, या, उनके स्थान, वहाँ की प्रतिक्रियाएँ A और B। यहाँ केवल अपकेन्द्र बलों से ही मतलब है, स्पर्शीय अवस्थितित्व-बल एक-समान घूर्णन में नहीं आते। यदि आभासी स्थानांतरणों δy , δz का प्रवेश करावे तो आभासी कर्म δy और δz तथा एक-एक सहति अल्पांशों पर आरोपित अपकेन्द्र बलों के y - और z - घटकों के योग का गुणनफल हो जाता है। ये बल हैं—

$$dm y \omega^2, dm z \omega^2,$$

एक समाकलन संपूर्ण सहति m की साधारण झूलनगतिक के अवस्थितित्वीय घटकद्वय Y और Z प्रदान करता है जिन्हें सहति केन्द्र पर अनुप्रयुक्त समझना होगा।

तदनन्तर y - तथा z - अक्षों के प्रति के आभासी घूर्णनों, क्रमात्, $\delta\phi_y$ और $\delta\phi_z$, का प्रवेश कराते हैं। इनमें किया गया आभासी कर्म

$$-\delta\phi_y \int dm \, xz\omega^2 \text{ तथा } \delta\phi_z \int dm \, xy\omega^2$$

द्वारा दिया जायगा। वे निम्नलिखित ऐंठों के समान हैं—

$$L_y = -I_{xz}\omega^2 \text{ तथा } L_z = I_{xy}\omega^2.$$

धुराधार प्रतिक्रियाओं A और B के निर्धारण के लिए, xyz निर्देशांक प्रणाली का मूल-बिंदु, कहिए कि, धुराधार A पर स्थापित कीजिए, दोनों धुराधारों के बीच की दूरी को l और संहति केंद्र के y - तथा z - दिशाओं के निर्देशांकों को η तथा ζ कहिए। तो चार अज्ञातों, A_y, A_z, B_y, B_z को जानने के लिए दो घटक समीकरणों,

$$(1) \quad \begin{aligned} A_y + B_y &= -m\eta\omega^2, \\ A_z + B_z &= -m\zeta\omega^2 \end{aligned}$$

तथा दो घूर्णन समीकरणों

$$(2) \quad \begin{aligned} lB_z &= -I_{xz}\omega^2, \\ lB_y &= -I_{xy}\omega^2, \end{aligned}$$

की प्राप्ति होती है।

स्पष्ट होगा कि इंजीनियरी के दृष्टिकोण से धुराधारों में आवश्यकतः परिणाम करती हुई ये प्रतिक्रियाएँ बांछित नहीं हो सकती। उन्हें हटाने के लिए केवल यही नहीं आवश्यक है कि संहति-केंद्र घूर्णनाक्ष पर स्थित हो, अर्थात् समी० (1) में $\eta = \zeta = 0$; वरन् यह भी कि घूर्णनाक्ष संहति-वितरण का मुख्याक्ष हो अर्थात् समी० (2) में $I_{xz} = I_{xy}$, इस संबंध में देखिए चतुर्थ अध्याय, २२वाँ प्रकरण, समी० (15a) के पास। इस दूसरे प्रतिबंध का परिपूर्णन उतने ही महत्त्व का है जितना कि पहले का परिपूर्णन। दोनों प्रतिबंधों के परिपूर्णन को घूर्णनयुक्त पिंड का “संतुलन” कहते हैं।

२.७. समझिए कि रज्जु (डोरी) में तनाव S और किसी दिये हुए क्षण में उसके खुल गये हुए भाग की लंबाई z है। तो स्थिति (m) के लिए,

$$I\dot{\omega} = Sr, \quad S = m(g - \ddot{z})$$

जहाँ \dot{z} तथा \ddot{z} घनात्मक हैं। $\dot{z} = r\omega$ के कारण,

$$(1) \quad \ddot{z} = r\dot{\omega} = \frac{Sr^2}{I},$$

और

$$(2) \quad S = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{I}},$$

स्थिति (ए) में —

घूर्णन ω उसी दिशा में रहता है। रज्जु के तनाव की ऐंठ ω के विरुद्ध काम करती है। \dot{z} ऋणात्मक हो जाता है और प्राप्त करते हैं—

$$(3) \quad \dot{z} = -r\omega, \quad \ddot{z} = -r\dot{\omega} = +\frac{Sr^2}{I},$$

तथा

$$(4) \quad S = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

दोनों स्थितियों (क) तथा (ख) में रज्जु-तनाव वही है और समय में नियत रहता है। घूर्णनयुक्त पिंड के भार से वह कम है।

(क) और (ख) के बीच के सक्रमण अवस्थान में हाथ पर लक्षणीय कर्पण का अनुभव होता है जो धनात्मक सवेग $m\dot{z}$ से ऋणात्मक हो जाने के सगत है। इस अंतराल में S समी० (2) में दिये हुए से अधिक हो जाता है।

२.८. समीकरण (18.7) के अनुसार कण के गोल-पृष्ठ को छोड़ देने का प्रतिबंध यह है कि—

$$\text{या तो } \lambda = 0 \text{ या } R_n = 0,$$

जिस कारण (18.6) से

$$(1) \quad mg\frac{z}{l} = -\frac{m}{l}(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}).$$

अब, गोले पर प्रत्येक पय के लिए

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = 0$$

अर्थात्,

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -v^2;$$

जिस कारण, (1) के स्थान में हम लिख सकते हैं

$$(2) \quad \frac{mgz}{l} = \frac{mv^2}{l}.$$

दक्षिण पादों पर के अपकेन्द्र बल के बराबर नहीं, क्योंकि प्रस्तुत स्थिति में पर भूरेखा नहीं है। प्रकरण, ४० के मन्था प्रमेय से सहमत होते हुए भी वह इस अपकेन्द्र-बल के गोलीय पृष्ठ के अभिलंब पर प्रक्षेप के बराबर है।

ऊर्जा-समीकरण से

$$(3) \quad v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0).$$

अतएव समी० (2) आदि मानों v_0, z_0 के पदों में यों लिखा जा सकता है—

$$(4) \quad 3z = 2z_0 + \frac{v_0^2}{g} = 2(z_0 + h_0),$$

जहाँ $h_0 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$ = वेग v_0 से संगत स्वतंत्र पतन की ऊँचाई।

३

३.१. प्रायः ऊर्ध्वाधरतया लटकते हुए लोलक के निर्देशांक x तथा y प्रथम कोटि की अल्प राशियाँ होंगे और z तब द्वितीय कोटि की अल्प राशियों तक $-l$ के बराबर होगा। इस कारण (18.2) का तीसरा समीकरण, द्वितीय कोटि की राशियों तक, निम्नलिखित का प्रदान करता है—

$$(1) \quad \lambda = -\frac{mg}{l};$$

और (18.2) के प्रथम दो समीकरणों द्वारा, समस्या १.१३ की भाँति, नीचे दी हुई वृत्तीय आवृत्ति की एक सरल आवर्त दीर्घवृत्तीय गति का निर्धारण करते हैं। वृत्तीय आवृत्ति है—

$$(2) \quad \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

दीर्घवृत्तीय गति के क्षेत्रफलीय वेगांक C के लिए निम्नलिखित होगा—

$$(3) \quad C = \frac{2\pi ab}{T} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} ab \rightarrow 0;$$

और ऊर्जांक E के लिए (आदि दत्ता, $\theta_0 = \epsilon, \dot{\theta}_0 = 0$),

$$(4) \quad E = T + V = mgl \left(-1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right).$$

तो $u = \eta - 1$ के साथ (18.11) से प्राप्त होता है

$$U = -\frac{4g}{l} \left(\eta - \frac{\epsilon^2}{2} \right) \eta - \frac{C^2}{l^4} = \frac{4g}{l} \left(\eta_1 - \eta \right) \left(\eta - \eta_2 \right).$$

जहाँ

$$\eta_{1,2} = \frac{\epsilon^2}{4} \pm \left(\frac{\epsilon^4}{16} - \frac{C^2}{4gl^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

तो अब हम (18.15) से प्राप्त करते हैं—

$$(5) \quad 2\pi + \Delta\phi = \frac{C}{l(lg)^{\frac{1}{2}}} \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\eta[(\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

समी० (46.11) के नमूने का एक प्रतिस्थापन (5) के समाकल को निम्न-लिखित सुज्ञात समाकल में रूपांतरित कर देता है—

$$\int_0^\pi \frac{dv}{A + B \cos v} = \frac{\pi}{(A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}}},$$

जहाँ

$$A = \frac{\epsilon^2}{4}; B = \left(\frac{\epsilon^4}{16} - \frac{C^2}{4gl^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

तो अब (5) प्रदान करता है कि $\Delta\phi = 0$ और यही सिद्ध करना था।

३.२. समस्या का प्रथम दृढ़-कथन, $|C|$ के समीकरण (19.10) का ω के लिए अवकलन द्वारा, तुरंत ही सिद्ध कर दिया जा सकता है। द्वितीय दृढ़ कथन भी उसी प्रकार $|C|$ को ω के लिए अवकलन करने से सिद्ध किया जाता है।

३.३. अवमदन-एठ तथा प्रत्यानयन-एठ के समानुपातीयता-गुणनखंडों को क्रमात् $2\rho I$ तथा $\omega_0^2 I$ से सूचित कीजिए। तो समी० (19.9) को थोड़े से भेदों के साथ गैल्वानोमापी के गति-समीकरण की भांति प्राप्त करते हैं। भेद यह है कि दक्षिणाग अब एक नियतांक C हो जाता है और संकेतन में x के स्थान α हो जाता है। निम्नलिखित व्यापक साधन

$$\alpha = C + e^{-\rho t} [a \cos[(\omega_0^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} t] + b \sin[(\omega_0^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} t]]$$

के नियतांकों a तथा b को इन प्रतिवधों के अनुकूल कर लीजिए कि $t=0$ पर $\alpha = \dot{\alpha} = 0$ एवं नियतांक C को इस प्रतिवध के अनुकूल कि जैसे $t \rightarrow \infty$ वैसे $\alpha \rightarrow \alpha_\infty$

स्थिति (क) में कम होते हुए दोलनों वाली एक क्षणभंगुर गति की प्राप्ति होती है और स्थिति (ग) में, अंतिम स्थान की ओर एकैक दिगमामी एक क्षणकालिक गति। स्थिति (ख) को (क) किया (ग) को समाप्त स्थिति समझना चाहिए। उसके लिए एक दीर्घकालिक पद की प्राप्ति होती है जिसमें t गुणनखंडवत् आता है।

३४. समस्या के (क) भाग में दालीवर सिद्धांत ($x, y =$ दोलायमान संहति-बिंदु के निर्देशांक, y ऊपर की ओर घनात्मक) की अभियाचना है कि—

$$(1) \quad x\delta x + (\dot{y} + g)\delta y = 0.$$

नियंत्रण-समीकरण निम्नलिखित है—

$$(2) \quad (x - \xi)^2 + y^2 = l^2$$

इसका परिणामन (t , और इसलिए ξ भी, स्थिर रखते हुए) देता है

$$(3) \quad (x - \xi)\delta x + y\delta y = 0$$

(1) तथा (3) के संयोग का परिणाम होता है

$$(4) \quad y\ddot{x} - (x - \xi)(\dot{y} + g) = 0.$$

(2) का t के लिए दो बार अवकलन x तथा y का द्वितीय समीकरण प्रदान करता है। यह (4) के साथ, समस्या का यथार्थ अवकल समीकरण प्रस्तुत करता है।

छोटे-छोटे कंपनों की स्थिति को जाते समय स्मरण रखना चाहिए कि $(x - \xi)$ प्रथम कोटि की अल्प राशि है जिस कारण, (2) के अनुसार, अल्प राशियों की द्वितीय कोटि तक $y = -l$ और तब \dot{y} तथा \ddot{y} द्वितीय कोटि की अल्पराशियाँ होंगी। अतएव (4) निम्नलिखित हो जाता है—

$$(5) \quad l\ddot{x} + (x - \xi)g = 0.$$

इस $x - \xi$ को u के बराबर रख, विपरीत लोलक समीकरण की प्राप्ति होती है—

$$(6) \quad \ddot{u} + \frac{g}{l}u = -\ddot{\xi},$$

जो दिखलाता है कि u $\ddot{\xi}$ चालन बल की भाँति काम करता है। समाकलन पृ० १३६ की भाँति किया जाता है। अवलंबन बिंदु तथा, सहति बिंदु की गतियों के बीच का कला-संबन्ध, जिस पर समस्या की मूल रचना में जोर दिया गया था, आकृति ३१ (पृ० १३७) के अनुरूप है। शिक्षाप्रद होगा कि एक प्रयोग किया जाय जिसमें एक डोरी के निचले सिरे पर कोई बाट बँधा हो और जिसका उपरला सिरा हाथ में लिया हुआ इधर-उधर क्षैतिजतया चलाया जाय। जब हाथ जल्दी-

जल्दी चलाते हैं (अनुनाद की स्थिति से ऊपर) तब दोनों बिंदुओं की काला-विरुद्ध गति बिल्कुल साफ दिख जाती है।

लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरणों वाली विधि का उपयोग करते हुए, y के लिए लाग्रान्ज-समीकरणों से ज्ञात होता है कि द्वितीय कोटि की अल्प राशियों तक $\lambda = -\frac{g}{l}$ और x -समीकरण से समी० (5) प्राप्त होता है।

समस्या के (ख) भाग में समी० (1) चँव रहता है। प्रतिबंध (2) निम्न-लिखित हो जाता है—

$$(7) \quad x^2 + (y - \eta)^2 = l^2.$$

इसका परिणाम, (4) के स्थानमें निम्नलिखित प्रदान करता है—

$$(8) \quad (y - \eta)\ddot{x} - x(\ddot{y} + g) = 0.$$

यदि x को प्रथम कोटि की अल्पराशि की भाँति ले लें तो (7) से, द्वितीय कोटि की अल्प राशियों तक, प्राप्त होता है—

$$(9) \quad y - \eta = -l, \quad \ddot{y} = \ddot{\eta}.$$

इससे (8) हो जाता है—

$$(10) \quad \ddot{x} + \frac{\ddot{\eta} + g}{l} x = 0.$$

लाग्रान्ज के प्रथम प्रकार के समीकरणों से भी यही परिणाम प्राप्त होता है, क्योंकि y -समीकरण निम्नलिखित मूल्य प्रदान करता है—

$$(11) \quad \lambda = -\frac{\ddot{\eta} + g}{l}, \quad "$$

बसते कि मन्निकटन (9) का उपयोग किया जाय जिससे कि x -समीकरण (10) के सर्वसम हो जाता है।

यदि अवलंबन बिंदु ऊपर को $+g$ के नियत (निश्चर) त्वरण से उठाया जाय तो परिणाम निकलता है कि गुरुत्व बल दूना हो गया ज्ञात होता है। यदि यह बिंदु नीचे को $-g$ से चलाया जाय तो गुरुत्व बल निरस्त हुआ जान पड़ता है। यह गुरुत्व तथा त्वरण के बीच एक तुल्यता की ओर लक्ष्य करता है, जिसने ही, गुरुत्वीय तथा अव-स्थितित्वीय सहितियों की समता (पृ० २४) के साथ, आइन्सटाइन के गुरुत्वाकर्षण-वाद की नींव डाली थी।

समस्याओं को हल करने के लिए संकेत

३.५ बिंदुओं C तथा D पर तनावों की साम्यावस्था (अवस्थानावी, क्योंकि तार भारहीन है!) अभियाचना करती है कि—

$$(3) \quad S_1 \frac{x_1 - x_3}{l_1} = S \frac{x_3}{a} + S \frac{x_2 - x_4}{a},$$

$$S_2 \frac{x_2 - x_4}{l_2} = S \frac{x_4}{a} + S \frac{x_4 - x_3}{a}$$

जिस कारण, समस्या में दिये समी० (1) से, और

$$\sigma_1 = \frac{m_1 g}{S} \frac{a}{l_1} \quad \text{तथा} \quad \sigma_2 = \frac{m_2 g}{S} \frac{a}{l_2}$$

के साथ, प्राप्त करते हैं—

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_1 x_1 &= (2 + \sigma_1) x_3 - x_4, \\ \sigma_2 x_2 &= (2 + \sigma_2) x_4 - x_3. \end{aligned}$$

यह पूर्वकल्पित है कि युग्मन दुबल है, जिस कारण σ_1 तथा σ_2 अल्प सहाय्य हैं और (4) के दक्षिणागो में जगहें काट सकते हैं। तो x_3, x_4 के लिए हल करने से प्राप्त होता है—

$$(5) \quad x_3 = \frac{2}{3} \sigma_1 x_1 + \frac{1}{3} \sigma_2 x_2,$$

$$x_4 = \frac{2}{3} \sigma_2 x_2 + \frac{1}{3} \sigma_1 x_1;$$

और (2) में प्रतिस्थापन प्रदान करता है—

$$(6) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{g}{l_1} (1 - \sigma_1) x_1 &= \frac{1}{3} \frac{g}{l_1} (\sigma_2 x_2 - \sigma_1 x_1), \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l_2} (1 - \sigma_2) x_2 &= \frac{1}{3} \frac{g}{l_2} (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2). \end{aligned}$$

इन युगपत् अवकल समीकरणों के साथ ठीक (20.10) की भाँति का उपचार करना होगा। प्रस्तुत समस्या के लिए, उसमें प्रवेक्षित राशियों $\omega_1, \omega_2, k_1, k_2$ का मतलब उपर दिये हुए समी० (6) से तुलना करने पर जाना जा सकता है।

३.६ m का M पर प्रभाव $k(X-x)$ द्वारा तथा M का m पर $k(x-X)$ द्वारा निरूपित है। X तथा x के लिए इस प्रकार निकले हुए दो युगपत् अवकल समीकरणों में $X=0$ रख दीजिए। देखेंगे कि आकाशित प्रतिबंध—कि केवल m ही

दोलन में भाग ले—अनुनाद की अभिव्यचना प्रदान करता है कि निकाय (m, k) के निजी दोलन की वृत्तीय आवृत्ति बाह्य बल की वृत्तीय आवृत्ति ω के बराबर हो।

इंजीनियरी के कामों में इस प्रकार की व्यवस्था का “दोलन-शामक” की भाँति व्यवहार किया जाता है। इस प्रकार से उगता उपयोग फ्रेंक ईपा में किया जा सकता है जहाँ गति-मालक चक्र निश्चर कोणीय वेग ω से घूम रहा हो। वहाँ शामक परिणमनीय घूर्णन योग्य एक युक्ति होती है। वह फ्रेंक के साथ युग्मित होती है और उसका काम फ्रेंक के दोलनों का अवशोषण कर लेना होता है। ऐसी स्थिति में प्रस्तुत समस्या के निर्देशांक x का स्थान घूर्णन किया हुआ कोण ले लेता है।

४

४.१ समतलीय सहति वितरण के अवस्थिति घूर्णों का महत्त्व प्रत्यास्थता वाद (इस माला की द्वितीय पुस्तक) में दंडों की ऐलन तथा उनके झुकने में है। $r^2 = x^2 + y^2$ होने के कारण,

$$I_p = \int r^2 dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_x + I_y.$$

होता है। प्रत्यास्थता संबंधी प्रश्नों में दंड की अनुप्रस्थ काट पर संहति को एकसमान-तया, घनत्व एक के साथ, वितरित हुआ समझना होता है जिस कारण $dm = dS =$ क्षेत्रफल का अल्पांश। तो त्रिज्या a तथा क्षेत्रफल $S = \pi a^2$ वाले वृत्ताकार मंडलक के लिए प्राप्त होता है—

$$I_p = \int r^2 dS = 2\pi \int_0^a r^2 dr = \frac{1}{2} S a^2$$

और इस लिए

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} S a^2.$$

४.२ यहाँ तीनों मुख्य अवस्थितित्व घूर्णों के परिमाणों का अनुपात अंत तक कुछ भी रख लेते हैं। इस प्रकार तीनों स्थितियाँ बस एक ही परिकल्पना के अंतर्गत हो जाती हैं जिनमें A ही सबसे बड़ा, सबसे छोटा और मँसोला मुख्य अवस्थितित्व घूर्ण रहता है।

४.३ आवेग^१ Z गेंद (त्रिज्या a ,) को दोनों प्रकार के संवेग, स्थानांतरणीय एवं घूर्णनीय, प्रदान करता है। इस प्रकार

$$(1) \quad Mv = Z,$$

तथा

$$(2) \quad I\omega = Zh,$$

जहाँ h केन्द्र से ऊपर की ऊँचाई है जहाँ पर क्षैतिजतया पकड़ा हुआ क्यू गेंद को मारता है। ω का अक्ष माध्यिका समतल से लंबवत् है। निम्नतम बिंदु का परिमापी^२ वेग u माध्यिका समतल में होता है और $a\omega$ के बराबर होगा। यह बात न केवल $t=0$ (संपात के समय) पर वरन् $t>0$ पर भी रहती है।

(11.12a) के अनुसार $I = \frac{2}{5}Ma^2$ है, $t=0$ के लिए समी० (2) तथा (1) से

$$(3) \quad \frac{2}{5} Mau = Zh = Mvh$$

देखिए कि u को v से प्रतिकूल दिशा में धनात्मक लिया है। ऊँचे निशानों के लिए $h > \frac{2}{5}a$ और गेंद तथा कपड़े के बीच का स्खलन वेग $u-v$ शून्य से अधिक तथा v के प्रतिकूल है। अतएव घर्षण v की रेखा में और μMg के परिमाण का है। केन्द्र के प्रति का उसका घूर्णन μMga घूर्णन ω के प्रतिकूल काम करता है।

नीचे निशानों के लिए घर्षण इससे प्रतिकूल प्रकार से निर्देशित होता है। व्यापकता उपरला चिह्न ऊँचे निशाने के लिए, निचला नीचे निशाने के लिए समझ सकते हैं और $t>0$ के लिए लिख सकते हैं

$$(4) \quad \dot{v} = \pm \mu g, \quad \text{तथा}$$

$$(5) \quad \dot{u} = \pm \frac{5}{2} \mu g$$

ग्राफ (लेखा चित्र) द्वारा बिंदु v व u के भुजाओं^३ पर u तथा v को कोटयांकों की भाँति खींचिए। दोनों ऋजुरेखाओं द्वारा निरूपित होंगे जो, ऊँचे निशानों की तथा नीचे निशानों की भी स्थिति में, परस्पर प्रतिच्छेद करेंगे।

1. आवेग impulse, संवेग moment; वेग velocity.

2. Peripherical 3. Abscissa

प्रतिच्छेद-बिंदु $u=v$ पर शुद्ध लुंठन होता है। यहाँ से u तथा v सघाती रहते हुए एक क्षैतिज ऋजु रेखा में जाते हैं। प्रतिच्छेद का भुजांक है—

$$(6) \quad r = \pm \frac{5h-2a}{7a} \cdot \frac{Z}{\mu g M}.$$

देखिए कि नीचे निशाने के लिए प्रथम भिन्नाज ऋणात्मक है क्योंकि h होता है $-a$ तथा $\frac{3}{2}a$ के बीच में; अतएव यहाँ के लिए दक्षिणांश का ऋणात्मक चिह्न केवल औपचारिक है। ऊँचे और नीचे निशानों के लिए वेग का आधिक्य या न्यूनत्व क्रमात् $\Delta v = \pm \mu g r$ द्वारा दिया जाता है। शुद्ध लुंठन का अंतिम वेग

$$v + \Delta v = \frac{5}{7} \cdot \frac{h+a}{a} \cdot \frac{Z}{M}$$

हो जाता है, अर्थात् सघात-बिंदु के कपड़े के ऊपर की ऊँचाई, $h+a$, के समानुपाती।

पिच्छू निशाने का का सिद्धांत। कालांतर $t < r$ में, जिसमें $u > v$ है, ऊँचे पर मारा हुआ गेंद एक अन्य गेंद से मध्यवर्ती टक्कर में मिलता है। समझिए कि संघात-क्षण पर u और v के मान u_0 और v_0 है। तो v_0 दूसरे गेंद को हस्तांतरित हो जाता है। (4) के अनुसार तब प्रथम गेंद $v=0$ से त्वरित होता है; (5) से उसका u वेग u_0 से नीचे को जाता है। एक नया लेखाचित्र (ग्राफ) दिखलाता है कि एक ऐसा प्रतिच्छेदन है जिस पर शुद्ध लुंठन होने लगता है। प्रतिच्छेद बिंदु के भुजांक तथा शुद्ध लुंठन वेग क्रमात्, निम्नलिखित हैं—

$$(7) \quad r_1 = \frac{3}{7} \frac{u_0}{\mu g}, \quad v_1 = \mu g r_1 = \frac{2}{7} u_0.$$

छाँच निशाने का सिद्धांत। फिर, चलाया हुआ गेंद कालांतर $t < r$ में दूसरे गेंद से टकराता है, परंतु अब $u < v$ है। पहले से ही मान लेंगे कि निशाना बहुत ही नीचा है। इसके लिए, वास्तव में, u ऋणात्मक है अर्थात् उसकी दिशा वही है जो v की है। समझिए कि संघात क्षण से जरा-सा पहले u और v के मान u_0 और v_0 है। फिर दूसरे गेंद को संचारित हो जाता है। (4) से, प्रथम गेंद ऋणात्मक भाव में $v=0$ से त्वरित होता है अर्थात् वह पोछे को जाता है। ममी (5) बताता है कि u अपने ऋणात्मक आदि के वेग u_0 से घनात्मक वेगों की ओर बढ़ता है, अर्थात् उसका

निरपेक्ष मान घटता है। तथा u की अनुपेक्षाएँ प्रतिच्छेद करती हैं (नया रेखांकन); प्रतिच्छेद बिंदु का भुजाक तथा मुड़ लुठन का वेग अब निम्नलिखित हो जाते हैं—

$$(8) \quad r_2 = \frac{2}{7} \frac{|u_0|}{\mu g}, \quad |v_2| = \frac{2}{7} |u_0|.$$

४.४ अब वयू को ४.३ की भाँति क्षैतिज नहीं रखते, बरन् क्षैतिज समतल से वह एक कोण बनाता है। प्रत्यक्ष है कि अब वयू गेंद के ऊपरी गोलार्द्ध के किसी बिंदु पर लगता है जैसे कि पहले के “ऊँचे निशानों” में। आवेग के क्षैतिज घटक की दिशा में x -अक्ष रखिए और z -अक्ष को उर्ध्वाधर की ओर। तो आवेग Z के घटक होंगे $(Z_x, 0, Z_z)$; और, गेंद के केंद्र (जो x, y, z प्रणाली का मूल-बिंदु भी है) के प्रति की आवेगी-एँठ N के घटक होंगे—

$$N_x = yZ_z, \quad N_y = zZ_x - xZ_z, \quad N_z = -yZ_x.$$

यहाँ x, y, z वयू तथा गेंद के संघात-बिंदु के निर्देशांक हैं। इन N_x, N_y से निम्नलिखित कोणीय वेग प्राप्त होते हैं—

$$\omega_x = \frac{5}{2} \frac{N_z}{Ma^2}, \quad \omega_y = \frac{5}{2} \frac{N_y}{Ma^2}.$$

गेंद के सबसे निचले बिंदु P पर संगी परिमापी वेग ये होंगे।

$$(1) \quad u_x = -a\omega_y, \quad u_y = +a\omega_x.$$

N_z तथा ω_x से हमें मतलब नहीं; वे P पर कोई स्खलन नहीं उत्पन्न करते, केवल मात्र एक “छेदक” घर्षण, जिसकी उपेक्षा कर देंगे। समझिए कि कपड़े पर स्खलन गति के घटक हैं—

$$(2) \quad v_x - u_x = -\rho \cos \alpha, \quad v_y - u_y = -\rho \sin \alpha.$$

वह एक घर्षण R का उत्पादन करती है जो x -अक्ष से एक कोण $\pi + \alpha$ बनाता है और जिसका मान $\mu g M$ है। समय $t > 0$ के लिए स्थानांतरण तथा घूर्णन पर उसका प्रभाव निम्नलिखित से निर्धारित होता है—

$$M\dot{v}_x = R_x, \quad M\dot{v}_y = R_y;$$

$$I\dot{\omega}_x = aR_y, \quad I\dot{\omega}_y = -aR_x.$$

इसका परिणाम होता है कि—

$$(3) \quad \dot{v}_x = -\mu g \cos \alpha, \quad \dot{v}_y = -\mu g \sin \alpha;$$

और, (1) तथा (2) के प्रभाव से,

$$(4) \quad \ddot{u}_y = -\frac{5}{2} \mu g \sin \alpha, \quad \ddot{u}_z = -\frac{5}{2} \mu g \cos \alpha;$$

तथा

$$(5) \quad \dot{v}_x - \dot{u}_x = -\frac{d}{dt}(\rho \cos \alpha) = -\frac{7}{2} \mu g \cos \alpha,$$

$$\dot{v}_y - \dot{u}_y = -\frac{d}{dt}(\rho \sin \alpha) = -\frac{7}{2} \mu g \sin \alpha.$$

समीकरणों (5) के अंतिम दो अंगों में α तथा ρ के लिए, साधन निम्नलिखित प्रदान करता है —

(क) $\alpha = 0$. घर्षण की दिशा नियत रहती है, उगका परिमाण भी नियत रहने के कारण, बिंदु P का क्षैतिज तल समतल में पथ परवलय^१ होगा। परवलय का अक्षा स्थूलनीय गति की आदि दिशा α से समांतर है, जिसे Z तथा N के घटकों से निर्धारित कर सकते हैं।

$$(ख) \quad \dot{\rho} = -\frac{7}{2} \mu g; \text{ समय } t = \tau = \frac{2}{7} \frac{\rho_0}{\mu g}$$

पर $\rho = 0$, यह ρ_0 स्थूलनीय वेग का आदि-परिमाण है जो भी उसी भांति Z तथा N से निर्धारित किया जा सकता है। समय के T से अधिक होने पर (अर्थात् $t < \tau$ के लिए) स्थूलन एवं घर्षण सदा के लिए शून्य होंगे। वेद परवलय को स्पर्श करती हुई एक ऋजुरेखा पर जाता है।

५

५.१ स्थिर समतल की अपेक्षा घूर्णनयुक्त समतल जिस कोण से घूमा है उस तात्क्षणिक कोण को ϕ लीजिए। तो हम रख लेते हैं कि—

$$(1) \quad x + iy = (\xi + i\eta)e^{i\phi}.$$

t के लिए इसके दो अवकलन, $\phi = \omega$ के साथ, प्रदान करते हैं—

$$(2) \quad \ddot{x} + i\ddot{y} = \{\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} + 2i\omega(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) + i\dot{\omega}(\xi + i\eta) - \omega^2(\xi + i\eta)\}e^{i\phi}.$$

यह $\xi + i\eta$ घूर्णनयुक्त समतल से प्रेषित (सम्बन्ध) सदिश है; $\dot{\xi} + i\dot{\eta} = \dot{r}$ उसी समतल से प्रेषित उसका वेग; इत्यादि। कारण कि—

$i(\dot{x} + i\dot{y}) = (\dot{x} + i\dot{y})e^{i\omega t}$ पश्चोक्त (समतल) से लंबवत् एक सदिश है, इसलिए लिख सकते हैं कि—

$$(3) \quad \begin{aligned} 2i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) &= 2\omega \mathbf{x} \mathbf{r}, \\ i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) &= \omega \mathbf{x} \mathbf{r}; \end{aligned}$$

जहाँ, निस्संदेह, ω सम्मिश्र समतल के अभिलंब की ओर निर्देशित है। जैसे पृ० २२२ पर, $(\dot{x} + i\dot{y})$ को स्थिर समतल से प्रेरित वेग ($\dot{\mathbf{w}}$) कहिए। परंतु घूर्णनयुक्त समतल संबंधी समय-अवकलजों के लिए उपरि लेख्य के बिंदुओं वाला संकेतन वही सवेगों, जैसा कि ऊपर दिये हुए समीकरण (३) में लिखा गया था। तो समी० (२) निम्नलिखित में, (२९.४) के अनुरूप, रूपांतरित हो जाता है—

$$(4) \quad \dot{\mathbf{w}} = \{\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \mathbf{x} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\omega} \mathbf{x} \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}\} e^{i\phi}$$

यदि $\mathbf{F} = F_x + iF_y$ स्थिर समतल को अभिदेशित बल है तथा $\Phi = F_x + iF_y$, घूर्णनयुक्त समतल को अभिदेशित बल, तो (१) से प्राप्त होता है

$$\mathbf{F} = \Phi e^{i\phi},$$

जिस कारण

$$(5) \quad \Phi = F e^{-i\phi}$$

तो (४) तथा (५) के प्रकाश में हम $m\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}$ से प्राप्त करते हैं कि

$$(6) \quad m \{\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \mathbf{x} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\omega} \mathbf{x} \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}\} = \Phi.$$

इस समीकरण द्वारा समस्या में आकांक्षित अतिरिक्त बलों का निर्धारण कर लिया। विशेष बात यह है कि बायीं ओर के द्वितीय पद में करिओलिस् (coriolis) बल पहचाना जा सकता है।

हमने यह समस्या जान बूझकर सम्मिश्रण संकेतन की सहायता से हल की है, इस बात पर जोर देने के लिए कि द्वि-विमतीय सदिशों को सम्मिश्र परिणम्यों द्वारा ही सबसे भली-भाँति निरूपित कर सकते हैं।

५.२ जिस समतल में ऋजुरेखा घूर्णन करती है उसे हम xy -समतल निर्वाचित करेंगे, x -अक्ष को क्षैतिज तथा y -अक्ष को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर। ऋजुरेखा x -अक्ष से जो कोण बनाती है उसे $\phi = \omega t$ लेंगे। यह समस्या पहले वाली (५.१)

ही हो जायगी यदि पूर्णतया \mathcal{H} क्षेत्रों को एक उष्मापत्र, \mathcal{H} -समन्तल में स्थित मान लें। तब इन \mathcal{H} -समन्तल को नियत कोणीय वेग ω में $x-y$ समन्तल में घूर्णन करना होगा। मुद्रितानुसार \mathcal{H} क्षेत्र पूर्णतया \mathcal{H} क्षेत्रों को घूर्णन करने के लिए उन पर \mathcal{H} -क्षेत्र को दिशा में एक नियंत्रण बल लगाना होगा। तो जब बाल बल Φ दो बलों का योग होगा, एक तो वही मुख्य बल m और और दूसरा यह नियंत्रण बल जिसे mb कहेंगे। प्रश्न ५.१ के समी० (१) में, मुख्य बल का Φ का जमादान होगा $-img e^{-i\phi}$ । दोनों के योग में प्राप्त होता है

$$\Phi = \Phi_0 + i\Phi_1 \quad \eta = -mg \sin \omega t - img \cos \omega t + imh.$$

इससे पहले के प्रश्न के समी० (६) में $r = \xi$ रखा गाने हैं और, वही के (३) के प्रभाव में, $2\omega \times \xi = 2i\omega \xi$; जसिच $\omega = 0$ रखा देना होगा। तो प्राप्त होता है—

$$(1) \quad \ddot{\xi} + 2i\omega \dot{\xi} + \omega^2 \xi = -mg \sin \omega t + i(b - g \cos \omega t).$$

इसका वास्तविक भाग देता है—

$$(2) \quad \ddot{\xi} - \omega^2 \xi = -g \sin \omega t.$$

यह एक अवकल समीकरण है जिसका हल है—

$$(3) \quad r = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

यदि (१) के काल्पनिक भाग को शून्य के बराबर रखा दे तो नियंत्रण बल, मुख्य तथा कोरिओलिस बल के बीच के प्रश्न में दिया हुआ निम्नलिखित संबंध प्राप्त हो जाता है—

$$(4) \quad b = g \cos \omega t + 2\omega \dot{\xi}.$$

५.३ (क) समझिए कि xy -समन्तल में O का स्थान $x_0 + iy_0$ निर्धारित करता है। तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 &= (u + iv) e^{i\phi} \\ \ddot{x}_0 + i\ddot{y}_0 &= \left\{ u + i\dot{v} + i\omega(u + iv) \right\} e^{i\phi} \end{aligned}$$

अब xy -समन्तल में G का स्थान $x + iy$ द्वारा निर्धारित कराइए तो

$i(\dot{x} + i\dot{y}) = (\dot{x} + i\dot{y})e^{i\frac{\pi}{2}}$ पदचोक्त (समतल) से ल है, इसलिए लिख सकते हैं कि—

$$2i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = 2\omega \mathbf{x} \mathbf{r},$$

$$(3) \quad i\dot{\omega}(\dot{x} + i\dot{y}) = \dot{\omega} \mathbf{x} \mathbf{r};$$

जहाँ, निस्संदेह, ω सम्मिश्र समतल के अभिलंब की ओर निर्देशित है पर, $(\dot{x} + i\dot{y})$ को स्थिर समतल से प्रेक्षित वेग ($\dot{\mathbf{w}}$) कहिए। समतल संबंधी समय-अवकलनों के लिए उपरि लेख्य के बिंदुओं वा संवेगों, जैसा कि ऊपर दिये हुए समीकरण (3) में लिखा गया था। निम्नलिखित में, (29.4) के अनुरूप, रूपांतरित हो जाता है—

$$(4) \quad \dot{\mathbf{w}} = \{\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \mathbf{x} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\omega} \mathbf{x} \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}\} e^{i\phi}$$

यदि $\mathbf{F} = F_x + iF_y$ स्थिर समतल को अभिदेशित बल है तथा Φ घूर्णनयुक्त समतल को अभिदेशित बल, तो (1) से प्राप्त होता

$$\mathbf{F} = \Phi e^{i\phi},$$

जिस कारण

$$(5) \quad \Phi = F e^{-i\phi}$$

तो (4) तथा (5) के प्रकाश में हम $m\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}$ से प्राप्त करते हैं कि

$$(6) \quad m \{\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \mathbf{x} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\omega} \mathbf{x} \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}\} = \Phi.$$

इस समीकरण द्वारा समस्या में आकांक्षित अतिरिक्त बलों का निर्धारण विशेष बात यह है कि बायीं ओर के द्वितीय पद में करिओलिस् (C) पहचाना जा सकता है।

हमने यह समस्या जान बूझकर सम्मिश्रण संकेतन की सहायता : इस बात पर जोर देने के लिए कि द्वि-विमतीय सदिशों को सम्मिश्र पं ही सबसे भली-भाँति निरूपित कर सकते हैं।

५.२ जिस समतल में चन्द्ररेखा घूर्णन करती है उसे हम xy -समतल करेंगे, x -अक्ष को क्षैतिज तथा y -अक्ष को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर x -अक्ष से जो कोण बनाती है उसे $\phi = \omega t$ लेंगे। यह समस्या पहले वा

$$(1) \quad \begin{aligned} x+iy &= x_0+iy_0+ae^{i\phi}, \\ \dot{x}+i\dot{y} &= \{u+iv+i\omega a\} e^{i\phi}, \end{aligned}$$

$$(2) \quad i\ddot{y} = \{ \dot{u}+i\dot{v}+i\omega a+i\omega(u+iv)-\omega^2 a \} e^{i\phi}.$$

xy -समतल में बाह्य बल R के अनुरूप निम्नलिखित सम्बन्ध राशि है—

$$(2') \quad F = R i e^{i\phi}.$$

समीकरणों (2) तथा (2') से द्वितीय नियम, कि

$$\ddot{x}+i\ddot{y} = \frac{F}{M},$$

निम्नलिखित समीकरण को पहुँचाता है—

$$\ddot{u}+i\dot{v}+i\omega a+i\omega(u+iv)-\omega^2 a = i \frac{R}{M},$$

या, घटकों में विच्छिन्न,

$$(3) \quad \ddot{u}-\omega v-\omega^2 a=0,$$

तथा

$$(4) \quad \dot{v}+\omega a+\omega u = \frac{R}{M},$$

इसके अतिरिक्त हम, कोणीय सवेग के नियम से, प्राप्त करते हैं

$$(5) \quad I\dot{\omega} = -Ra.$$

(ख) प्रतिबधों $v=0$, $\dot{v}=0$ के कारण समी० (3) तथा (4) का निम्नलिखित सरल रूप हो जाता है—

$$(3') \quad \ddot{u}-\omega^2 a=0$$

और

$$(4') \quad \omega a+\omega u = \frac{R}{M}.$$

(4') और (5) से R का निरसन हमें देता है—

$$(6) \quad \ddot{u}a\left(1+\frac{I}{Ma^2}\right)+\omega u=0.$$

अब रख लीजिए कि $I=Mb^2$ (यह b घूर्णन-त्रिज्या है) और

$$(7) \quad k^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1.$$

ये (6) को

$$(6') \quad k^2 \dot{\omega} a + \omega u = 0$$

में रूपांतरित कर देते हैं। युगपत् समीकरणों (3') तथा (6') के समाकलन से R का निर्धारण (4') या (5) में हो जाता है।

(ग) समीकरणों (3') तथा (6') में u का निरसन प्रदान करता है

$$(8) \quad k^2 \frac{d}{dt} \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\omega^2$$

$\frac{\dot{\omega}}{\omega}$ से गुणा करने पर यह समीकरण समाकलनीय हो जाता है और प्रस्तुत करता है—

$$(9) \quad k^2 \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)^2 = k^2 c^2 - \omega^2, \quad \text{तथा} \quad (9') \quad k \dot{\omega} = \omega (k^2 c^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}$$

जहाँ c एक समाकलनांक है। यदि

$$(10) \quad \omega = kc \cos \psi$$

रख लें तो वगंमूल में भी छुटकारा मिल जाता है। वगंमूल के चिह्न के उपयुक्त निर्वाचन से (9') निम्नलिखित हो जाता है—

$$(10') \quad \dot{\psi} = c \cos \psi$$

$$\text{या} \quad c \, dt = \frac{d\psi}{\cos \psi},$$

और

$$(11) \quad c \, t = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}.$$

इस प्रकार ψ को t के फलन की भाँति निर्धारित कर लिया। अब हम सभी राशियों को ψ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं; (10) से ω ; (6') तथा (4') से u और R ; यों—

$$(12) \quad u = ak^2 c \sin \psi \quad \text{तथा} \quad (12') \quad R = \frac{M}{2} k (k^2 - 1) c^2 \sin 2\psi.$$

यह समाकलन को पूरा कर देता है।

$\omega = \dot{\phi}$ होने के कारण, (10) तथा (10') की तुलना अंततः यह संबंध प्रदान करती है कि $\dot{\psi} = \frac{\dot{\phi}}{k}$. अतएव हमारा सहायक कोण $\dot{\psi}$ घूर्णन कोण $\dot{\phi}$ के समानुपाती है, अर्थात्

$$(13) \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\phi}}{k} ,$$

क्योंकि x -अक्ष की स्वेच्छ दिशा के उपयुक्त निर्वाचन से समाकलनाक शून्य किया जा सकता है।

(घ) समी० (1') से, $v=0$ के लिए,

$$|\dot{x} + i\dot{y}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2 + \omega^2 a^2$$

अतएव

$$(14) \quad \begin{aligned} T &= \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\omega^2 = \frac{M}{2}(u^2 + \omega^2 a^2) + \frac{M}{2}(k^2 - 1)a^2\omega^2 \\ &= \frac{M}{2}(u^2 + k^2\omega^2 a^2). \end{aligned}$$

(10) तथा (12) से यह निम्नलिखित के समान है—

$$(15) \quad T = \frac{M}{2} a^2 k^4 c^2 (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = \text{नियत} .$$

(च) समीकरणों (1) तथा (12) से

$$\dot{x}_0 = a k^2 c \sin \psi \cos \phi, \quad \dot{y}_0 = a k^2 c \sin \psi \sin \phi,$$

अतएव, (10') तथा (13) के प्रभाव से,

$$(16) \quad \frac{dx_0}{d\phi} = a k \tan \psi \cos \phi, \quad \frac{dy_0}{d\phi} = a k \tan \psi \sin \phi .$$

समी० (11) बताता है कि—

$$\psi = 0 \text{ के लिए } t = 0;$$

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad t = \pm \infty .$$

संपूर्ण प्रक्षेप-पथ

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2} \text{ तथा } -k\frac{\pi}{2} < \phi < +k\frac{\pi}{2}$$

के बीच रहता है। $t=0$, पर एक निश्चिताग्र^१ होता है; क्योंकि $\psi=0$, $\phi=0$ के साथ (16) के अनुसार,

$$\frac{dx_0}{d\phi} = \frac{dy_0}{d\phi} = \frac{d^2y_0}{d\phi^2} = 0,$$

परन्तु साथ ही,

$$\frac{d^2x_0}{d\phi^2} \text{ तथा } \frac{d^3y_0}{d\phi^3} \neq 0.$$

निश्चिताग्र की दोनों शाखाओं पर की स्पर्श रेखाएँ x -अक्ष के समांतर हैं।

$t=\pm\infty$ के लिए पथ अनतस्पर्शीय हो जाता है, क्योंकि ϕ स्थावर हो जाता है, जैसा कि इससे प्रकट है कि समी० (16) से, विलकुल व्यापकतया

$$\frac{dx_0}{d\phi} = \frac{dy_0}{d\phi} = \pm\infty$$

इसके अतिरिक्त, समी० (16) देता है

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \tan \phi = \pm \tan k \frac{\pi}{2}.$$

अतएव अनतस्पर्शी x -अक्ष के समित्तया स्थित है, उससे कोण $\pm k \frac{\pi}{2}$ बनाते हुए,

जैसा कि $k=1, \frac{3}{2}, 2, 3$ के लिए आकृति ५७ दिखलाती है।

६

६.१. यदि z को गिरने की दिशा में अर्थात् नीचे की ओर धनात्मक लें तो $V=-mgz$. आदि-स्थान ($t=0$ पर $z=0$) अत-स्थान ($t=t$ पर $z=z_1$) से ऊपर है।

(क) $z=\frac{1}{2}gt^2$ के लिए हम प्राप्त करते हैं—

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} (gt)^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right] dt = \frac{1}{3} mg^2 t_1^3.$$

(ख) स्थिति $z=ct$ के लिए, c का निर्वाचन इस प्रकार करना होगा कि $t=t_1$ के लिए

$$z = z_1 = g \frac{t_1^2}{2} \text{ अतएव } t = \frac{gt_1}{2}.$$

इस मान के साथ हम ज्ञात करते हैं कि—

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{gt_1}{2} \right)^2 + mg \frac{gt_1}{2} t \right] dt = \frac{3}{8} mg^2 t_1^3.$$

दूसरी ओर, $z = at^3$ के लिए $a = \frac{1}{2} \frac{g}{t_1}$;

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{3g}{2t_1} \right)^2 t^4 + mg \frac{g}{2t_1} t^3 \right] dt = \frac{7}{20} mg^2 t_1^3.$$

जहाँ कि हैमिल्टन-सिद्धांत में अत्यणु परिमाणों से ही विभिन्न पथों की तुलना करते हैं, यहाँ q, \dot{q} (जो प्रस्तुत स्थिति में z, \dot{z} हैं) के कला-आकाश में (ख) के प्रक्षेप-पथ वास्तविक गति (क) से परिमित परिमाणों से विभिन्न होते हैं। फिर भी, हैमिल्टन समाकल का मान (क) के लिए (ख) की अपेक्षा अब भी कम ही है, क्योंकि—

$$\frac{3}{8} < \frac{7}{20} \text{ और } \frac{3}{8} < \frac{7}{20}.$$

यहाँ यह बात पथ के किन्हीं ही दैर्घ्यों के लिए भी ठीक है, यद्यपि यह आवश्यक नहीं कि व्यापक कामदा यही हो (सि० पृ० २८१)

६.२. जैसे कि प्रश्न ५.१ में, घूर्णनयुक्त समतल में स्थित निर्देशांकों ξ तथा η को लीजिए और इस समतल की अपेक्षा नापे हुए वेग को $u = (\dot{\xi}, \dot{\eta})$ होने दीजिए। तो स्थिर समतल से सम्बन्ध वेग होगा

$$w = u + v, \quad v = \omega \times r.$$

[मिलाइए, उदाहरण के लिए, पृ० १८६ पर दी हुई सारणी की प्रथम पक्ति]। घटकों में विखंडन प्रदान करता है—

$$\omega \xi = \dot{\xi} - \omega \eta, \quad \omega \eta = \dot{\eta} + \omega \xi,$$

अतएव

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2) = m \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$= m \dot{\theta} \left(-\frac{g}{L} \sin \theta \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = -m g \sin \theta \dot{\theta}$$

प्रश्न ५.१ के समी० (६) में जोड़कर देखा है कि यदि θ को 0 से π तक बढ़ाया जाय तो $\dot{\theta}$ का मान 0 से π तक बढ़ता है।

प्रश्न ५.२ में उल्लिखित सूत्रों से यह सिद्ध किया जा सकता है कि $\dot{\theta}$ का मान 0 से π तक बढ़ता है।

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2) = m \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \right) = m \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

समस्याओं के हल के लिए प्रश्न ५.२ के समी० (३) से सर्वप्रथम यह सिद्ध किया जाय कि $\dot{\theta}$ का मान 0 से π तक बढ़ता है। प्रश्न ५.२ में उल्लिखित सूत्रों से यह सिद्ध किया जा सकता है कि $\dot{\theta}$ का मान 0 से π तक बढ़ता है।

५.३. प्रश्न के समी० (४) में जोड़कर देखा है कि यदि θ को 0 से π तक बढ़ाया जाय तो $\dot{\theta}$ का मान 0 से π तक बढ़ता है।

$$\left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \eta \text{ तथा } -\frac{\eta}{R} \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \xi \text{ हैं।}$$

कोष्टक { } वाले गुणसंज्ञ से गुणा करने के बाद, t के लिए उनके अवकलन से, वे ξ , η , ξ या उनके अवकलनों के द्वितीय या उच्चतर कोटि के पद प्रदान करेंगे। अवकलित समीकरणों (5) तथा (6) के बारे में कह देना चाहिए कि द्वितीय घात के पदों जैसे कि ξ'' , ξ' , ξ , आदि अवश्य छोड़ दिये गये हैं। यह देखने योग्य बात है कि इस छूट से पृथिवी की भ्रज्या, R , परिणामों से निकल जाती है। पूर्ण समी० (6) में, लिख दिये गये पद के अतिरिक्त, ω^2 में भी एक पद की प्राप्ति होगी, जो है

$$R \sin \theta \cos \theta \omega^2,$$

और जो प्रत्यक्षतः सामान्य अपकेंद्र बल के ξ -घटक को निरूपित करता है। संगत ξ -घटक $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ में आवेगा। परंतु इन पदों को छोड़ देना होगा क्योंकि वे पहले से ही प्रभावकारी गुरुत्वीय त्वरण g , समी० (30.1) में सम्मिलित कर लिये गये हैं।

फूको-लोलक के सम्बन्ध में प्रत्यक्षतः लाग्रेंज-समीकरणों के सामान्य रूप (34.6) का नहीं, बल्कि मिश्रित प्रकार के समीकरण (34.11) का, उससे नियंत्रण समीकरण (31.1) को युग्मित करते हुए, उपयोग करना होगा।

एक बात और देखिए कि (1) तथा (2) में दी हुई η और ϕ_0 की परिभाषा के कारण यह समस्या उनमें हो जाती है जो समय पर निर्भर करती हैं जिसका विवेचन पू० २९५ पर हुआ था।

६.४. संहति का केंद्र सिलिंडर के अक्ष के लंबवत् एक समतल में एक "कुतरा हुआ" वृत्तजात रचना है। घूर्णन कोण ϕ के पदों में उसके परामितीय समीकरण "साधारण" वृत्तजात के समी० (17.1) से ही, इस (17.1) के a को उचित स्थानों पर s द्वारा प्रतिस्थापित करने पर, प्राप्त किये जाते हैं। यों

$$\xi = a\phi - s \sin \phi, \quad \xi' = (a - s \cos \phi) \phi';$$

$$\eta = a - s \cos \phi, \quad \eta' = s \sin \phi \phi';$$

(क) यदि संहति-केंद्रको अभिदेश बिंदु O के लें तो हम प्राप्त करते हैं—

$$T_{\text{transl}} = T_{\text{स्वान्तरणीय}} = \frac{m}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) \\ = \frac{m}{2} (a^2 + s^2 - 2as \cos \phi) \dot{\phi}^2, \\ T_{\text{rot}} = T_{\text{घूर्णनीय}} = \frac{I}{2} \dot{\phi}^2, \quad T_m = 0;$$

$$V = mg \dot{\eta} = mg(a - s \cos \phi)$$

देखिए कि $\omega = \dot{\phi}$ प्रारंभ में मिलिंडर का अपने नमिनि अक्ष के प्रति का कोणीय वेग है, परंतु, (23.8) के अनुसार वही संहतिकेंद्र से जाते हुए ममांतर अक्ष के प्रति का कोणीय वेग भी है।

यदि $I = mb^2$ ($b =$ घूर्णन त्रिज्या) रख लें और $c^2 = a^2 + s^2 + b^2$, तो

$$(1) \quad L = T_{\text{transl}} + T_{\text{rot}} - V = \frac{m}{2} (c^2 - 2as \cos \phi) \dot{\phi}^2 - mg(a - s \cos \phi)$$

तथा

$$\frac{1}{m} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (c^2 - 2as \cos \phi) \ddot{\phi} + 2as \sin \phi \dot{\phi}^2,$$

एवं

$$\frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial \phi} = as \sin \phi \dot{\phi}^2 - g s \sin \phi.$$

अतएव गतिसमीकरण होगा—

$$(2) \quad (c^2 - 2as \cos \phi) \ddot{\phi} + as \sin \phi \dot{\phi}^2 + g s \sin \phi = 0.$$

(ख) यदि यह निर्वाचित कर ले कि संहति केंद्र से जाती हुई अनुप्रस्थ काट का केंद्र अभिदेश बिंदु O है तो पश्चोक्त (संहति-केंद्र) $a\dot{\phi}$ वेग से क्षैतिजतया चलता है। $I' = I + ms^2$ (मिलाइए, 16.8) के साथ अब प्राप्त होता है—

$$T_{\text{transl}} = \frac{m}{2} a^2 \dot{\phi}^2, \quad T_{\text{rot}} = \frac{I'}{2} \dot{\phi}^2, \quad V, \text{ ऊपर ही की भांति।}$$

परन्तु अब T_m शून्य नहीं है वरन् समी० (22.II) से निम्नलिखित से दिया जाता है—

$$T_m = -ma\dot{\phi}^2 s \cos \phi.$$

परिणामवश

$$(3) \quad L = T_{\text{transl}} + T_{\text{rot}} + T_m - V = \frac{m}{2} (c^2 - 2as \cos \phi) \dot{\phi}^2 - mg(a - s \cos \phi).$$

यह (I) से सहमत है, जिस कारण हम (2) को ही एक बार फिर गतिसमीकरण प्राप्त करते हैं। $\phi = 0$ के प्रति के छोटे-छोटे दोलों के लिए वह प्रदान करता है—

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l_1} \phi = 0, \quad l_1 = \frac{c^2 - 2as}{s} = \frac{(a-s) + b^2}{s} \dots \dots \text{स्यायित्व।}$$

इसके विपरीत, $\phi = \pi$ के प्रति के अल्प दोलों के लिए, $\psi = \pi + \phi$ के साथ,

$$\ddot{\psi} - \frac{g}{l_2} \psi = 0, \quad l_2 = \frac{c^2 + 2as}{s} = \frac{(a+s)^2 + b^2}{s} \dots \dots \text{अस्यायित्व।}$$

६५ (क) कोणीय वेगों के बीच के संबंध—इन संबंधों का व्युत्पादन सरलतम हो जाता है यदि यह स्मरण रखें कि उन स्थानों पर जहाँ कोरदार योक्त्रों (ω) को एक ओर तो योक्त्र (ω_1) से और दूसरी ओर योक्त्र (ω_2) से फँसाया हुआ है, वहाँ परिमायी वेगों को किसी भी क्षण पर, अवश्यमेव बराबर होना चाहिए। योक्त्र (■) धुरी A के चारों ओर कोणीय वेग ω से घूर्णन करते हैं। इसके अतिरिक्त, यह धुरी, (ω) के साथ, (Ω), (ω_1) तथा (ω_2) के सावें ज्यामितीय अक्ष के चारों ओर कोणीय वेग Ω से घूर्णन करती है। यदि कोरदार योक्त्रों (ω), (ω_1) तथा (ω_2) की माध्य त्रिज्याएँ r , r_1 , r_2 हों तो स्पर्श बिंदु ($\omega \omega_1$) पर $r\omega + r_1\Omega = r_1\omega_1$ तथा स्पर्श बिंदु ($\omega_1 \omega_2$) पर निम्नलिखित होना चाहिए—
 $-r\omega + r_2\Omega = r_2\omega_2$

यदि $r_1 = r_2$ हो तो इससे निम्नलिखित संबंधों की प्राप्ति होती है

$$(I) \quad 2\Omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$2\omega = \frac{r_2}{r} (\omega_1 - \omega_2).$$

निःसंदेह, ये संबंध आभासी घूर्णनों का प्रवेश कराकर भी व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

(ए) ऐंठों के बीच के संबंध । L के आनामी कर्न को नद्वै L_1 तथा L_2 के आनामी कर्नों के योग के बराबर होना चाहिए, अर्थात्

$$L \Omega \delta t = L_1 \omega_1 \delta t + L_2 \omega_2 \delta t$$

अथ (1) की सहायता से Ω को ω_1 और ω_2 के पदों में प्रतिस्थापित कर लेते हैं और निम्नलिखित पर पहुँचते हैं—

$$\left(\frac{L}{2} - L_1\right)\omega_1 + \left(\frac{L}{2} - L_2\right)\omega_2 = 0$$

किन्हीं भी अर्थात् स्वेच्छ ω_1 , ω_2 के लिए यह केन्द्र तभी गमन है जब कि

$$(2) \quad \frac{1}{2} L = L_1 = L_2.$$

तो देखते हैं कि इंजन की चालन ऐंठ एक समान परिमाणों में पिछड़े गति में प्रत्येक को हमेशा हस्तांतरित होनी रहनी है, कोणीय वेगों ω_1 तथा ω_2 के मान कुछ भी क्यों न हों।

(ग) निकाय का गतिसमीकरण—यहाँ लाग्रान्ज के द्वितीय प्रकार के समीकरणों का उपयोग सरलतम होगा। हमें प्राप्त है कि

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I \Omega^2 + I' \Omega^2).$$

अब ω और Ω को हम ω_1 तथा ω_2 के पदों में उनके पदपुंजों द्वारा प्रतिस्थापित कर लेते हैं तथा निम्नलिखित सक्षिप्तिकाओं का प्रवेश कराते हैं—

$$L_{11} = I_1 + \frac{I'}{4} + \frac{I}{4} \frac{r_1^2}{r^2},$$

$$L_{22} = I_2 + \frac{I'}{4} + \frac{I}{4} \frac{r_2^2}{r^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{I'}{4} - \frac{I}{4} \frac{r_1^2}{r^2}.$$

तो लाग्रान्ज समीकरण ये हो जाते हैं—

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (L_{11} \omega_1 + L_{12} \omega_2) = \frac{L}{2} - W_1,$$

$$\frac{d}{dt} (L_{21} \omega_1 + L_{22} \omega_2) = \frac{L}{2} - W_2.$$

ये W_1 तथा W_2 दो पिछले पहियों पर आरोपित प्रतिरोधक ऐंठे हैं। उनका जन्म भूमि के घर्पण में होता है। यदि चाहें तो उनमें अन्य प्रतिरोधों (वायु आदि) को भी सम्मिलित कर सकते हैं।

यदि L , W_1 तथा W_2 समय के फलनों की भाँति दिये हुए हों तो (3) के वामागों के कोष्ठको को दक्षिणागों के समय-समाकलों की भाँति परिकल्पित कर सकते हैं, जिस कारण ω_1 और ω_2 समय के ज्ञात फलन हो जाते हैं।

यदि समय पर औसत लगाया जाय तो (3) के दक्षिणाग शून्य के बराबर हो जाते हैं, अतएव ω_1 तथा ω_2 निश्चर हैं। परन्तु यदि एक पहिये पर आरोपित घर्पण कम हो जाय, जैसा कि, उदाहरणतः, होता है। यदि पहिया किसी उभाड़ पर हो कर जाने के कारण सड़क को छूता हुआ नहीं रहता और क्षणभर के लिए वायु में घूमता रहता है ($W=0$), तो यह पहिया तो त्वरित हो जाता है, परन्तु दूसरा अवत्वरित।

(घ) वैद्युतगतिकी से सादृश्य। समीकरणों (3) को ऐसे लिखा है कि वे प्रेरणतया युग्मित दो (विद्युत्) धाराओं के बीच मियक्रिया का स्मरण कराते हैं (देखिए पृ० ३०७ पर बोल्टजमान (Boltzmann) के बारे में कही हुई बातें)। यदि L_{ij} ओं को दो परिपथों के बीच के प्रेरण गुणांकों से समीकृत कर लें, तथा ω_1 और ω_2 को उनमें बहती हुई धाराओं से, तो (3) के वामाग वैद्युत-गतिकीय प्रेरण प्रभाव हो जाते हैं। $\frac{1}{2} L$ परिपथों पर आरोपित "प्रभावित वि बा व" के संगत हैं। एवं

$$T = \frac{1}{2} L_{11} \omega_1^2 + L_{12} \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{2} L_{22} \omega_2^2$$

संपूर्ण चुंबकीय क्षेत्र ऊर्जा है। पृ० २६६ के अनुसार, उन निकायों को चक्रीय कहते हैं जिनके लाप्रांजीयो में केवल समय के विचार से निर्देशकों के अवकलज होते हैं (यहाँ

$\omega_1 = \dot{\phi}_1$, $\omega_2 = \dot{\phi}_2$)। अतएव वे स्थावर विद्युत् धाराओं के यांत्रिकीय सदृश-वस्तु प्रस्तुत करते हैं। वैषम्यकारक यंत्रचना एवं स-समिति लट्टू, दोनों द्विगुणित चक्रीय निकाय हैं।

1. Decelerated
2. Impressed E. M. F.
3. Doubly cyclic

पारिभाषिक शब्दावली

हिन्दी-अंग्रेजी

अकन पद्धति, संकेतन notation	अक्षांश-कोटि co-latitude
अंकितक/लैबल label	अचर/अचर-गति invariable
अत मागरीय/पनडुब्बी submarine (सयमरोन)	अचर/नियत/नियतांक constant
अंतरप्रवेश interpenetration	अजायबघर, संग्रहालय museum
अंतरवर्ती, मझोला intermediate	अतिचालकता super conductivity
अंतराल interval	अतिपरवलय hyperbola
अतरिधीय Meteorological	अतिपरवलयिक ज्या (अतिज्या) hyperbolic sine (sine h)
अतर्भाग core	अतिपृष्ठ super surface
अतर्वस्तु content (s)	अतिप्रत्यास्थ super elastic
अंश, भाग के विचार से numerator	अदिश scalar
—, कोटि/घात degree	अधिकतम, महत्तम maximum
अंशदान contribution	अधिकेय range
अक्ष axis	अधिमान्य-अध्ययन प्रणाली preferable course
—, आकृति a. of figure	अध्यारोपण superposition
—, घूर्णन a. of rotation	अनंत infinite
—ध्रुवीय polar a.	अनन्त दूरी, अनन्त राशि infinity
—, निरक्षीय equatorial a.	अनन्त सूक्ष्म infinitesimal
—, निर्देशांक a. of coordinates	अनन्त स्पर्शतः asymptotically
अक्ष-विचलन nutation	अनन्त स्पर्शी asymptote
अक्षांश latitude	अनन्त स्पर्शिय asymptotic
—, भौगोलिक geographical l.	

अनावर्ती aperiodic	अपकेन्द्र centrifuge
अनुगमक cogredient (co+latin; gredi, to walk; hence=sub- ject to the same linear trans- formation)	अपचय, लघुगणकीय decrement, logarithmic
अनुज्ञेय permissible, allowable	अपभानु aphelion
अनुदैर्घ्य longitudinal	अपरिणम्य invariant
अनुनाद resonance	अपसरण divergence
अनुपरिणम्य co-variant	अपसारण expulsion
अनुपात ratio	अपूर्णपदीय non-holonomic
अनुप्रयोग application	अपूर्व बिन्दु singular point
अनुप्रस्थ transverse	अभिकथित alleged
अनुमान assumption	अभिकेन्द्र centripetal
अनुरूप analogous	अभिदेश reference
अनुरूप, सगत corresponding	अभिप्रयाण, देशान्तरगमन migration
अनुरूपता agreement	अभिभानु perihelion
अनुरेखण trace	अभिमुख/विरुद्ध opposite
अनुलोमानुपाती directly propor- tional	—, विकर्णतः diagonally opposite
अनुशसित recommended	—, व्यासतः (व्यासाभिमुख) diametrically opp.
अनुशीलन, अभ्यास exercise	अभियाचना demand, requirement
अनुष्ठान formation	अभिलम्ब normal (noun) 1. c. n. to a surface.
अनुसंधान investigation	अभिव्यक्ति manifestation
अनुसंधानक investigator	अभिसारी श्रेणी converging series
अनुसूची scheme	अभ्यर्पित assigned
अन्योन्य प्रेरण प्रभाव mutual induc- tive effect	अभ्यास, अनुशीलन exercise
अन्वालोप envelope	अभ्रष्ट non-degenerate
अपकेन्द्र centrifugal	अमूर्त/निगूढ़ abstract
—नियंत्रक c. governor	अरेखिकता non-linearity
	अर्ग erg
	[ग्रीक शब्द (ergon) (कर्म) से—

कर्म का मात्रक]
 अर्धनिर्देश, परिभाषा, व्याख्या
 definition
 अर्द्धगोल hemisphere
 अल्पतम, न्यूनतम minimum
 अन्तर्गत element
 -, रेखा line c
 अल्फा कण alpha (α) particle
 अवकल differential
 - आंशिक partial d
 -गणित, चलन कलन differential
 calculus
 अवकलज derivative
 अवकलन differentiation
 अवतरण deceleration
 अवमर्दन damping
 अवलम्बन suspension
 अवशोषण absorption
 अवस्थान अवस्थिति position
 अवस्थिति situation
 अवस्थितिव inertia
 -, घूर्ण moment of i
 अविनाशनीय inextensible
 अविनाशक, अविनाशी, संरक्षक
 गार्भित conservative
 (एक प्रेमा सम्बन्धित)
 अविनाशिक, अविनाशिता, संरक्षक
 conservation
 अवस्थाहीन lossless
 असमिति (समितिहीन) asymmetry

cal, unsymmetrical
 अनर्गलन, विनाशी non-conserva-
 tive
 अनसंगत अनहार्मोनिक
 आंशिक partial
 आकर्षण attraction
 आकार size
 आकाश space
 आकुचन contraction
 आक्षेप भंग - ocular aberrat
 आत्म प्रेरण self-inductance
 आधार base, bases
 आधारिक basic
 आध्यात्मिक theological
 आनुभवी empirical
 आनुवंशिक attendant
 आपतकोण angle of incidence
 आदेशित (सापेक्ष) relative
 आदेशिततासाध relative to
 आदेशिततासाध relative to theory
 आभासी virtual
 आयत rectangular
 आयतन, समतल, घूर्णक volume
 आयतारण (समकोणिक, समबाहु)
 rectangular
 आयन ion
 आयाम amplitude
 आशुतेज वेग velocity of light
 आयुश्च विक्रम
 आयुश्च विक्रम

आलेखन plot (graphs)	dulum
आलोक यंत्र optical instrument	उत्तोलक lever
आलोकिकी optics	उत्थानक यंत्र elevator
किरण तथा तरंग ray and waves	उत्पत्ति origin
आलोकीयतया optically	उत्प्लावकता buoyancy
आवर्त, आवर्ती periodic	उत्सर्जन emission
आवर्तकाल period	उद्गम origin, source
आवर्तत्व मापांक modulus of peri- odity	उपकरण apparatus
आविष्कार discovery	उपकरणिका, औजार instrument
आवृत्ति frequency	उपगोल spheroid
आवेग impulse	—, उच्चाक्ष prolate s.
आवेगी impulsive	—, निम्नाक्ष oblate s.
आवेश charge	उपचार (विकृति) treatment
आश्लेषक oscillating	उपजाता inventor
आश्चर्य कार्य feat	उपनीत cited
इंजीनियरी engineering	उपपत्ति, प्रमाण proof
इकाई, मात्रक unit	उपप्रमेय corollary
इग्नास्ट (रेचक, शून्य कारक) exhaust	उपयुक्ततम optimum
इलेक्ट्रान electron	उपविभाजन sub-division
ईट Block	उभाड़ protuberance
ईजाद invention	उल्का meteor
ईषा shaft	उष्मा, ऊष्मा heat
—, नौदक propeller s.	—, गतिकी thermodynamics
उच्चावचन fluctuation	उष्मीय thermal
उतराई (अवरोह) descent	ऊर्जा energy
उत्केन्द्र, उत्केन्द्रीय eccentric	ऊर्ध्वाधर vertical
उत्क्रम inverse	ऋजुरेखीय rectilinear
उत्क्रमनीय लोलक reversible pen- dulum	एकत्रण (समाहरण, सांद्रण) concentration
	एकैवदिशायामी monotonic

कोट्यंक ordinate

कोण angle

—, आपतन, आपात a. of incidence

—, दिगश azimuth a.

—, न्यून acute a.

कोणीय angular

—, सवेग angular momentum

क्यू cue

(निशाना लगाने का डंडा, पकड़ने की ओर से मोटा, दूसरी ओर पतला, कुठित नोकदार, जिससे गेंद मारा जाता है।)

क्रमचय permutation

क्रम विनिमयशील commutative

क्रांतिक, गुणदोष-विवेचक critical

क्रातिवृत्त eccliptic

क्रास हेड cross head

(इतस्तत्. गति को वृत्ताकार गति में परिवर्तन करने की व्यवस्था)

क्रिया action

—, का क्वांटम quantum of a.

—, परिणम्य (क्रिया परिणम्य) action-variable

—, फलन, लघुतम least, action function

क्रियाशील active

क्रेकं crank

(धुरे का मुड़ा हुआ भाग, इतस्तत्. गति को वृत्तीय में परिवर्तन करने के लिए)

क्लैप जकड़ clamp

क्वांटम (मात्रिका?) quantum

शक्तता power (of instruments)

क्षय dissipation

क्षयशील dissipative

क्षुरधार knife edge

क्षेत्र field, sphere

—, सदिश vector f.

क्षेत्रकलन quadrature

क्षेत्रफलीय वेग areal velocity

क्षेत्रीय फलन field function

क्षैतिज horizontal

खंड resolved part

प्रकरण section

खंड, निर्देशित directed segment

खगोल the heavens

खगोलज्ञ astronomer

खगोल विद्या, खगोल-विज्ञान astronomy

खगोलीय celestial

—, पिंड c. body.

—यांत्रिकी c. mechanics

खानि mine

खेलकूद athletics

गठन, रूप form

गठन, अग-संस्थान निर्माण, रचना structure

गणित, अवकल, चलन-कलन differential calculus

गणित, सदिश बीज vector algebra

—, समाकलन = चलाशि कलन, Inte-

gral calculus	गोचर-घटना, दृग्विषय phenomenon
गणितीय Mathematical	गोल, गोला sphere
गति motion	गोलक bob
गतिकी, गति-विज्ञान Dynamics	गोलाकार spherical
—, चल kinematics	गोलार्ध hemisphere (earth's)
गति-पालक चक्र flying wheel	गौरव (भौल, चट्टा, वाट) weight
गवेषण research	ग्रह परिवार Planetary system
—, निवध, पत्र, रचना या लेख, r. paper	ग्राफ, रेखाचित्र graph
गश्त cycle	घटक component
गुडमीय संकेतन Gaussian notation	घटिका-प्रतिकूल anti clockwise
गि (जि) बल	घनता, घनत्व density
(छल्लो आदि युक्त लटकाने की एक युक्ति) gimbal	घनात्मक cubical
गुणदोष-विशेषक critical	घर्षणीय बल frictional force
गुणक multiplier	घात power, order
गुणज multiple	घातीय exponential
गुण धर्म property	घातीयतात्मक of exponential character
गुणन multiplication	घिरनी, चरखी pulley
गुणन सङ्ग factor	घिरनी, रस्सी, काँटा-साधन the block and tackle
गुणन फल product	घुटनों के वृत्त knee circles
गुणांक co-efficient	घू-प-म (घूर्णन प्रति मिनट) R. P. M.
गुणात्मक qualitative	= rotation per minute
गुणोत्तर माध्य geometric mean	घूमनेवाली यंत्रिका turn table
—, श्रेणी series, geometric progression	घूर्ण moment
गुरुत्व gravity	घूर्णक rotary
—, केन्द्र centre of g.	घूर्णन rotation, gyration
गुरुत्वाकर्षण gravitation.	—, चाल rotational speed
गुरुत्वाकर्षी, गुरुत्वीय gravitational	—, त्रिज्या radius of gyration
गैल्वानोमापी galvanometer	घूर्णाक्ष दिक्सूचक gyro compass

-स्वामी gyroscope	ematics
-स्वाभाववाद gyroscopic theory	-, जाकाय में k. in space
-स्वामी कारक gyro stabilizer	चलन चलन = अवकल गणित differ-
पूर्णभ momentoid	ential calculus
पूर्णच दोषं वृत्तज momental ellip-	चलनशीलता movability, mobility
soid	चल-संहति moving mass
घेरा (चलय) ring	चलात्मक kinematic
चन्द्रोद, चान्द्र lunar	घाप arc
-मातवृन्द lunar nodes	घापकलन rectification
-गुरु सरण lunar precession	चार्ज charge
चक्र cycle	चाल speed
चक्रीय cyclic	चालन, चलानेवाला (ली) driving
-, एक mono-cyclic	-ऐठ d. torque
-निकाय c. system	-बल d. force
-निकाय, द्विगुणित doubly cyclic	-यंत्र रचना d. mechanism
system	-, वैद्युत electric drive
-, निर्वेशांक (परिणम्य) c. coordi-	चित्र कर्म work diagram
nates (variables)	चिरसम्मत classical
-, बहु polycyclic	चुम्बक magnet
चतु.सदिश four-vector	चुम्बकत्व, भू terrestrial magne-
चतुर्वर्णयिन quaternion	tism
चपेट लगाना (उंगली अँगूठे को मिलाकर	छद्म सम पुरःसरण pseudo-regular
एक से) flip	procession
घरखी, घिरनी pulley	छिड़काव गाड़ी sprinkler wagon
घरमसीमांत limiting	छिड़काव यंत्र, घास सीचने का lawn-
-, सीमा extreme limit	sprinkler
घरराशि (परिणम्य) variable	छिद्रक boring, borer
घर राशियों का पृथक्करण separation	जकड़, क्लैप clamp
of variables	जगत् रेखाश world line element
-चल गतिकी (शुद्ध गतिक) kine-	जनन generation

जनित्र generator	—, अनुसूची t scheme
जलवाष्प water vapour	—, कर्षण strain t.
जहाज का पेटा hull	—कलन गणित t. calculus
जातिनाम generic name	—, प्रतिबल stress t
जाल grid	—, समित symmetrical t
जिबल, गिबल gimbals	टेनिस की धापी tennis racket
जिज्ञानु, अनुसंधानक investigator	ट्राइपस tripods
जिमनेस्टिक gymnastic	ठेल thrust
—, उपकरणाय apparatus gymnastic	डाइन dyne
जीवित प्राणी living being	(यूनानी भाषा में 'बल' अर्थवाले शब्द
जुट set	डाइनमम dynamus में, स० ग०
ज्या sine	म० पद्धति में बल का मापक)
—, कोटि cosine	डाट plug
ज्यामितीय geometrical	डिफरेंशियल (वैषम्यकारक) मोटर-
—, प्रक्षेप पथ g. trajectory	गाडी का differential of an
ज्या-वक्राय sinusoidal	automobile
ज्वारभाटा tide	डोरी, रज्जु string
झटका jolt	डोल प्रयोग, न्यूटन का Newtons' pail
झाड़ फानूस chandelier	experiment
झिनगा caterpillar	ढग mode
झिल्ली membrane	ढोल drum
झुकाव inclination	तनाव tension
झूलन, झूला swing, swinging	तरंग wave
टकी, स्थायीकारक stabilising tank	—, अग्र (तरंगग्र) w. front
टक्कर collision	—, पृष्ठ w. surface
—, अति प्रत्यास्थ superelastic c.	—, यांत्रिकी w. mechanics
—, अप्रत्यास्थ inelastic c.	तरल fluid
टर्बाइन turbine	तर्कसंगत logical
टिकिया, मंडलक disc	तर्जनी forefinger
टेंसर (तानक ?) tensor	तल surface

—, सम plane	दंतुर पहिया=योक्त्र (विपरीत
—,स्पर्श सम tangent plane	दिशाओं में घूमनेवाला परस्पर
तागा, धागा thread	संबंधित पहिया.) gear
ताप temperature	दक्षिणावर्त(र्त) right handed
ताल rhythm	दशा परिणम्य state variable
तालवद्ध rhythmic	दाना bead
तिरछा oblique	दाब pressure
तिरछीन skew	—, अभिलम्ब normal p.
तिर्यक्गतिक loxodromic	—, की ऊँचाई p. head
तुला balance	—, गत्यात्मक dynamic p.
तुला दंड b. beam	—, प्रवणता p. gradient
तुल्य, तुल्यात्मक equivalent	—, भाप steam p.
तुल्यकालिक isochronous	दाबमापी manometer
—,आचरण, निर्दोषतया rigorously	दिक्सूचक compass
isochronous character	—, घूर्णाक्ष gyro c.
तील, भार, वट्टा वाट weight	दिगन्त azimuth
त्रिक triplet	दिन (नाक्षत्र) sidereal day
त्रिकोणमितोयात्मक of trigonome-	दिशा (दिक्) निर्देशन (बतलाना)
trical character	direction
त्रिज्य radial	दिष्ट [=दिशैव] धारा direct current
त्रिज्या radius	दीर्घकालिक secular
—, घूर्णन r. of gyration	दीर्घवृत्त ellipse
—, वक्रता r. of curvature	—, का चाप कलन rectification of c.
त्रिभुज, त्रिकोण triangle	—, 'वामन' dwarfed c.
त्रुटि का कारण source of error	दीर्घवृत्तज ellipsoid
त्वरण acceleration	—, अभ्रष्ट nondegenerated c
—, अभिकेन्द्र centrepetal accelera-	—, परिक्रमण c. of revolution
tion	[परिक्रमण दीर्घ वृत्तज=उपगोल जिसे
दंड beam	भी देखिए]
दंडिका rod	दीर्घवृत्तीयता ellipticity

दीर्घीकरण elongation
 दुविधा (मदिग्धता) ambiguity
 दृग्विषय=गोचर=घटना phenomenon
 दृढ़ rigid.
 दृढ़ पिंड rigid body
 —, का गति विज्ञान dynamics of r.
 —, को स्थितिको statics of r.
 दैशिक कोटिज्या direction cosine
 दैशिक परामिति direction parameter
 दोलन oscillation
 —, अनन्त सूक्ष्म infinitesimal o.
 —, अनावर्ती aperiodic o.
 —, अवमदित damped o.
 —, आवर्तकाल period of o.
 (दोलन काल)
 —, घूर्णक rotary o.
 —, तुल्यकालिक isochronous o.
 —, पहिया (घड़ी का) balance wheel (of watch)
 —, प्रणोदित forced o.
 —, मूच्छनागत modulated o.
 —, युग्मित coupled o.
 —, लुठिनी rolling o.
 —, लेखी oscillograph (instrument)
 —, लेख्य oscillograph (the graph)
 —, लोलकीय pendulum o.
 —, शकवाकार (शाकव) conical o.

— शामक o quencher
 दोलनशील oscillatory
 दोलायमान oscillating
 —, नपिल कमानी o helical spring
 दोहरा योग double sum
 दौरान (मार्ग, अध्ययनप्रणाली) course
 द्रव fluid
 द्रव्य matter
 द्रव्यात्मक material
 —, युक्ति m device
 द्रष्टा, प्रेक्षक observer
 द्रुततमपातवक brachystochrone
 द्रोणिका trough
 द्विखंडक bisector
 द्विघातीय समीकरण quadratic equation
 द्विदिक् क्रियाशील double acting
 द्विपदो binomial
 द्विमूत्री bifilar
 धक्का push
 धागा thread
 धातुशोधन metallurgy
 धारणा=भावना concept
 धारा current
 —, दिष्ट (दिर्शक, एक दिज) direct c.
 धारात्मक rheonomous प्रतिवध ।
 —, प्रतिक्रिया bearing reaction

धुरी axle	निपात, विभव potential drop
ध्रुववृत्त meridian	निम्नतम अवस्था=भूमि दशा ground state
ध्रुवीय polar	
—, उच्चावचन p. fluctuation.	—, आवृत्ति fundamental frequency
—, सदिश p. vector	
ध्रुवपथ polhode	—, दशा fundamental state
—, (पिंड शकु) p. (body cone)	निम्नाक्ष, दे० उपगोल
ध्वनि sound	नियन्त्रक governor
ध्वानिकी acoustics	—, अपकेन्द्र centrifugal g.
नत समतल inclined plane	नियन्त्रण constraint
नति inclination	—, अपूर्णपदीय nonholonomic c.
नमूना sample	—, पूर्णपदीय holonomic c.
नम्य=लचीला flexible	—, समय निर्भर, time dependent
नाभि, फोकस focus	—, स्वतन्त्र time independent
नाभिक nucleus	नियत fixed
नाभिकीय nuclear	नियत=अचर constant
—, विभंजन n. disintegration	नियतांक constant
निकला हुआ किनारा flange	नियम law
निकाय=समुदाय system	नियमित regulated
(पद्धति=प्रणाली)	निरक्ष (भूमध्यरेखा) equator
—, अविनाशी (संरक्षित) conservative s.	निरक्षीय equatorial
—, क्षयशील dissipative s.	निरपेक्ष absolute
—, चक्रीय cyclic s.	निरसन elimination
निक्षेप parenthesis	निरस्त करना eliminate, annul
निगमन deduction	निरस्त करना=काटना cancel
निगूढ़ abstract	निराकरण cancellation, elimination
निजी (अपनी) proper	निरूपण representation
नित्य वृत्त hip circle	निरोध restriction
निर्दशन demonstration	निर्देशन direction

निर्देशांक coordinate	देखा दृश्य) bird's eye-view
—, कार्तीय cartesian c.	पट्टा (पट्टी) rule, plat form
—, गोलीय spherical c.	—, घूर्णन युक्त rotating platform
—, चक्रीय cyclic c.	—, सर्पी slide rule
—, ध्रुवीय polar c.	पटल lamina
—, नैज intrinsic c.	पटलीय laminar
—, पूर्णपदीय holonomic c.	पट्टिका plate
—, लवकोणीय orthogonal c.	पट्टी strip
—, स्थान position c.	पतन fall
—, स्वेच्छ arbitrary c.	पथ path
—, वक्रिय curvilinear c.	—, का परिगमन, प्रक्षेप variation of trajectory
निशिताग्र cusp	—, चिह्न track
निश्चर, अपरिणम्य, invariable, invariant	—, नियनक बल guiding force
निश्चरता (अपरिणम्यता) की अभि- याचना invariance requirement	— नियनक पट्टी guiding rails
निषिद्ध forbidden	—, नियनन guiding
निष्पन्द node (vibration) [node (astronomy)=पात]	—नियनित, पथ प्रदर्शित guided
नैज intrinsic	—, निर्दिष्ट prescribed p.
नोक point [point is ordinarily बिन्दु]	—, परबलविक parabolic p.
नोदक propeller	—, प्रक्षेप, दे० प्रक्षेप पथ
नोदित propelled	पद term
न्यास data	पदनुज (अ्यजन) expression
पग (वरतन आदि के निकले हुए फिनारे) flange	पदनि, प्रणाली system
पक्ष (भूमिकरण) side	[परिवार, निरुद्ध, ननुदय, ननुद इनके लिए भी system]
पक्षान्तरण transpose, transposition	—, अक्षर या नोटेशन notation
पक्षोद्गष्टि, बिहगम-दृष्टि (ऊपर ने	—, अभिदेश reference s.
	—, गुरुत्वाकर्षी gravitational s.
	—, निरुद्ध absolute s.
	—, न० क० न० [नोट, निर्देशन,

सेकंड] m. k. s. s.	परिणम्य, क्रिया action variable
—, स० ग्र० स० [सेटीमीटर, ग्राम, सेकंड] c. g. s. s.	परिणाम, फल, उत्पत्ति result
पनडुब्बी=अतःसागरीय सवमरीन submarine	परिणामगत, परिणामिक resulting
परम (निरपेक्ष) absolute	परिणामो resultant
परमाणवीय atomic	परिधि circumference
—, उत्पत्ति a. origin	परिपथ circuit
—, भौतिकी a. physics	—, गौण secondary c.
परमाणु-भार atomic weight	—, प्राथमिक (प्रारम्भिक) primary c.
परमाणु atom	—, युग्मित coupled c.
—, वाद atomic theory	परिभाषा, व्याख्या, अर्थनिर्देश defini- tion
परवलय parabola	परिभाषी बल peripheral force
परवलयिक parabolic	—, वेग p. velocity
परस्पर प्रभाव interplay	[from परिमा for circumference]
परामिति (याँ) parameter (s)	परिमित finite
—, दैशिक direction p.	परिरक्षित preserved
परामितीय parametric	परिरूप design
—, निरूपण p. representation	परिवर्तन दर, समय के विचार से time rate of change
परावर्तन reflection	परिवार system
परिकलक calculator	—, ग्रह planetary s.
परिकलन calculation	—, सौर solar s.
परिकल्पना hypothesis	पर्यवलोकन=सर्वेक्षण survey
परिक्रमण revolution	पलड़ा scale pan, pan of balance
परिगणन enumeration	पश्चर्वर्तिता=पश्चता=पश्चता lag
परिणमन variation	पश्चत्तरण recession
—, कलन calculus of v.	पहिया wheel
—, दीर्घकालिक secular v.	—, घूर्णनयुक्त rotating w.
परिणम्य variant	—, दोलन balance w.
परिणम्य चर राशि variable	—, प्रतिक्रियाकारित जल reaction

water w.

—, भिन्न दिशाओं में घूमनेवाला gear

—, लुठन युक्त अर्थात् घलता rotating w

पाठ्यांक reading

पात node

[क्षेत्र या क्रान्ति वृत्त या दो वृहद् का परिच्छेद]

—, चन्द्रोदय lunar node

—, रेखा (पातों को मिलाने की रेखा)
line of node

पारस्परिक व्युत्क्रम mutual reciprocal

पारस्परिकता reciprocity

पारिभाषिकी terminology

पार्थिव terrestrial

पार्श्वगमन side stepping

पार्श्वता side (पक्ष और भुजा के लिए भी)

पिजरा cage (घूर्णाक्ष स्थायी के लिए)

पिंड body

—, दृढ़ rigid b.

—, शंकु b. cone

पिटोट नल pitot tube

पिन, क्रैंक की crank pin

पिस्टन piston

—, दंड p. rod

पुनरुक्ति tautology

पुनरसरण precession

—, चन्द्रोदय lunar p.

—, छद्म-सम pseudo regular p.

—, विषुवों का p. of the equinoxes

—, सम regular p.

पुश्ता truss

पूरक कोटिपूरक complementary

पूरा सार sum total

पूर्णपदीय holonomic

—नियन्त्रण h. constraint

—प्रतिबंध h. condition.

पृथक्करण, पार्थक्य separation

—नियतांक = constant

—, परिणम्यों का s. of variables

पृष्ठ-तल surface

पृष्ठांश surface element

पृष्ठों की परम्परा system of surfaces

पेच विस्थापन screw displacement

पैदल चलनेवाला pedestrian

पैराफिन प्रकाश paraffin light

प्रकाशिकी=आलोकिकी optics

प्रकृत normal

प्रकृति nature

प्रक्रम procedure

प्रक्रिया process

—, परमाणवीय atomic process

—, सीमान्त limiting process

प्रक्षेप projection

प्रक्षेपपथ trajectory

—, की वक्रता curvature of traj.

—, लम्बकोणीय orthogonal traj.

प्रक्षेप्यों का विज्ञान ballistics or the

science of ballistic

प्रधारण propagation	प्रत्यवस्थान restitution
प्रणाली, पद्धति system	प्रत्यानयन restoring
प्रणाली, बेतार की तार wireless telegraphy	—, ऐंठ <i>r. torque</i>
प्रणोदित forced	—, बल <i>r. force</i>
प्रतिकम्पन counter vibration	प्रत्यावर्तक alternator
प्रतिकर्षण repulsion	प्रत्यावर्ती धारा alternating current
प्रतिकार compensation	प्रत्यास्य elastic
प्रतिकेंद्रज involute	प्रत्यास्यता elasticity
प्रतिक्रिया reaction	—, वाद theory of elasticity
प्रतिक्षेप recoil	प्रदेशन prescription
प्रतिगमक contra gradient	प्रधार jet
प्रतिघूर्णन counter rotation	प्रभावित वि० वा० व० impressed c. m. f.
प्रतिच्छेद inter section	प्रभेदित distinguished
प्रतिपरिणम्य contravariant	प्रमेय theorem
प्रतिबन्ध condition	प्रयोग experiment
—, अपूर्णपदीय non-holonomic c.	प्रयोगात्मक, प्रायोगिक (व्यावहारिक के लिए भी) experimental, practical
प्रतिबल stress	प्रवणता gradient
प्रतिमान model	प्रवाहण transport
प्रतियुक्ति counter measure	प्रवीक्षा, पूर्वभावना, पूर्वज्ञान anticipation
प्रतिरूप counter part	प्रसरण expansion
प्रतिरूप picture	प्राथमिक primary
प्रतिरूपक typical	प्रामाणिक, मानक standard
प्रतिरोध resistance	प्रिज्म (समपाद्वर्ग) prism
—, वायव air resistance	प्रेरण induction
प्रतिलोम, विलोम inverse	—प्रभाव, अन्योन्य mutual inductive efforts
प्रतिलोमन, प्रतिलोमीकरण inversion	प्रोटोन proton
प्रतिसममित antisymmetric	
प्रतिसमान्तर antiparallel	
प्रतिस्थापन substitution	

फंदा loop	→, प्रत्यानयन restoring f.
फल, उत्पत्ति, परिणाम result	→, स्थायी positions f.
फलन function	→, युग्म couple f.
→, क्षेत्र field f.	→, बहुपदों polynomial
→, दीर्घवृत्तीय elliptical f.	युग्मा polymer
→, रूपभेद दिया हुआ modified f.	चतुर्दिगीतीय poly dimensional
→, रेखिक सदिश linear vector f.	यदुस्तरात manifold
→, लघुतम दिया least action f.	ब. लक्षणमा extremum
→, लक्षणिक characteristic f.	क्रि. ('रन्ध्र' में देना)
→, लाग्रान्ज का (लाग्रान्जीय) Lagran- ges f.	बोना algebraically
बधन binding	बोनात वक्र transcendental curve
बटिया (पत्थर का छोटा टुकड़ा) pebble	बेमेल detuned
बट्टा, बोट (तौल, भार, गंवर) weight	बैरोमीटर=वायुदाब मापी barometer
बलवृन्द forces	बायगम्य perceptible
→, अनुप्रयुक्त applied f.	ब्रह्माण्ड विज्ञान cosmology
→, अनुरूप analogous f.	बगल व टैकल (चिन्नी-रस्सी-काटा, माधन) Block & tackle
→, अपकेन्द्र centrifugal f.	भाग, विभाजन division
→, अभिकेन्द्र centripetal f.	भागफल quotient
→, अभिलम्ब normal f.	भाज्य dividend
→, अवस्थितत्व inertial f.	भाप का इंजन steam engine
→, आवेगी impulsive f.	भिन्न (राशि), उचित proper fraction
→, खोया हुआ lost f.	भिन्नाग numerator
→, गतिकी kinetics	भुजाक abscissa
→, गुरुत्वाकर्षण gravitational f.	भुजाक्ष axis of abscissa
→, चालन driving f.	भूकम्पलेख्य seismograph
→, पथनियंत्रक guiding f.	भूगणित, भूमापविद्या geodesy
→, परिमायी peripheral	भूचुम्बकत्व terrestrial magnetism
	भूमण्डल globe
	भूमध्यरेखा equator

भूरेखी geodesic	—, विषमदिक् unisotropic m.
भौतिकीज्ञ physicist	माध्यिका medium
भौतिकी physics	माध्यिकायी समतल medium plane
—, क्वांटम quantum p.	मान value
—, चिरसम्मत classical p.	मानक, प्रामाणिक standard
—, नाभिकीय nuclear p.	मानांकन, कूतना valuation
—, परमाणवीय atomic p.	माप estimation
—, प्रयोगात्मक experimental p.	मापक्रम, मापनी measure, scale
—, सैद्धान्तिक theoretical p.	मापन measurement
भौतिकी रसायन विज्ञान physical chemistry	मापांक modulus
भूमि दशा ground state	मार्ग, दौरान, अध्ययन-प्रणाली course
भ्रमि spin	मार्ग पर चलानेवाली यंत्र रचना steering mechanism
भ्रमिक लट्ठू spinning top	मिश्रक्रिया inter-action
—, का बाद theory of a spinning top	मिश्रपरिवर्तन=मिश्रविनिमय inter-change
मण्डलक, टिकिया disc	मिलन, रैखिक अल्पाक्षों का union of linear elements
मदन retardation	मिलाना(यथा सुरमिलाना)=सम-स्वरण tuning
मणिभ crystal	मिले हुए न होना out of tune
मापक, इकाई unit	मीमासक teleological
—, काल time-unit	—, गुण t. character
—, गोल u. sphere	मुद्रा coin
—, त्रिज्या u. radius	मूर्च्छना modulation
—, वृत्त u. circle	—, गत modulated
—, सहति u. mass	मूल, मौलिक fundamental, original
मात्रात्मक quantitative	—, बिन्दु original co-ordinates
माध्य mean	—, वर्ग square root
माध्यम medium	मोचन (मुक्ति प्रदान) liberation
—, समांग, विषमांग homogeneous, heterogeneous (inhomogeneous)	
—, समदिक् isotropic m.	

मोटरकार, मोटरगाडी automobile
 —, का वैपम्य कारक differential of
 an automobile
 यन्त्रजात machinery
 यन्त्ररचना mechanism
 यथातथ precise
 यथायंता accuracy
 यांत्रिक mechanical
 यांत्रिकी mechanics
 —, क्वाण्टम quantum m.
 —, खगोलीय celestial m.
 —, चिरसम्मत classical m
 —, प्रयोगात्मक experimental m.
 —, सैद्धान्तिक theoretical m.
 याथातथ्य precision
 युक्ति device
 —, द्रव्यात्मक material d.
 युक्लिडीय, आकाश Euclidean space
 युगपत् simultaneous
 युग्म couple
 —, घूर्णन rotational m
 —घूर्णाक्षस्थापी gyroscopic c.
 युग्मक (युग्मन) coupling
 —मचिका c. stage
 —यन्त्ररचना c. mechanism
 युग्मनगुणाक coupling co-efficient
 —, त्वरण तथा वेग acceleration
 and mobility c.
 —, स्थिति position c.
 युग्मी, युग्मित coupled

योजन, दतुर चक्र (विपरीत दिशाओं
 में चलनेवाले पहिये) gear
 योगन summation
 योगात्मक additive
 योजना plan
 रटजन, राजन rontgen
 रवरेखा rhomb line
 रचना, निर्माण construction
 रज्जु= डोरी string, rope
 रम्मा नारो या सन का बना cable
 रिच wrench
 रूपभेद modification
 रूपरचना configuration
 रूपान्तरण transformation
 —, स्पर्शात्मक contact t.
 रेखन, रेखाचित्रण drawing
 रेखाग्र longitude
 —, खगोलीय celestial l.
 रेखाकृति diagram
 रेखाचित्र graph
 रेखान्वित spaded
 रेखीय, रैखिक linear
 रेचक (शून्यकारक) exhaust
 रेडियन radian
 रेडियो-तरंग radio-waves
 रेलगाडी का इजन locomotive
 रेलगाडी, वैद्युत electric tram
 रैखिक linear
 लम्ब perpendicular
 लम्बकोणिक, लम्बकोणीय orthogonal

medium	निवेचन discussion
विखंडन resolution (of forces)	विश्लेषण analysis
विघटन decomposition	विषमदिक् anisotropic
विचलन deviation	विषमगता inhomogenous
विचित्रालय, अजायबघर museum	विषमगता inhomogeneity
वितरण distribution	विषुव बिन्दु equatorial point
—, भार d. of weight	विस्थापन displacement
वितान गणित extension analysis	विस्थिति, काल्पनिक, सकटकाल cri-
विद्यापीठ, विश्वविद्यालय university	३१५
विद्युत्-पथ electric path	विस्फोटन explosion
विद्युत् वाहन बल electro motive force	वृत्त circle
विद्युत्-बल या शक्ति electric power	—, खंड segment
विनिश्चायक decisive	वृत्तजान cycloid
विनिर्दिष्ट करना specify	वृत्तीय आवृत्ति circular frequency
विपर्ययतः antonymously	वेग velocity
विभजन disintegration	वेगरेख hodograph
विभव potential	वैद्युत् गतिकी, वैद्युत गति विज्ञान elec- tro-dynamics
विमान aeroplane	वैद्युत चालन electric drive
विमिति dimension	वैद्युत धारितायी प्रभाव electric capacitative effects
विराम rest	वैद्युत् स्थैतिकी electro-statics
विरूपित deformed	वैध valid
विरूप्य deformable	वैधिक canonical
विलोम, प्रतिलोम inverse	—, तथा सयुग्मी canonically conju- gate
विवरणिका report	वोल्ट volt
विवर्तन diffraction	व्यञ्जन, व्यञ्जक, पदपुञ्ज expression
वि० वा० व० E. M. F. impressed E. A. F.	व्यतिकरण interference
विविक्त discrete	व्यवस्थापन, सूचीकरण formulation
विवृति, उपचार, treatment	

व्यस्तक्रम inverse order
 व्यापकीकरण generalisation
 व्यापकीकृत generalised
 व्यावहारिक, प्रयोगात्मक, प्रायोगिक
 practical
 व्यासाभिमुख diagonally opposite
 व्यासिद्ध resolved
 व्युत्क्रम (गणित), पारस्परिक reci-
 procal
 व्युत्पत्ति, व्युत्पादन derivation
 शंकवीय, शंकवाकार conical
 शकु cone
 —आकाश conical space
 —, काट, शंकव c section
 शसिका, टिप्पणी remark
 शक्ति power (dynamics)
 —, वाहकतार power line
 शर्त, प्रतिबन्ध condition
 शंकव conic section (figure)
 शामक, दोलन oscillation quencher
 शिक्षात्मक, शिक्षा सास्त्रानुसार did-
 actic
 शिखर अनुनाद resonance peak
 शिल्पिक technical
 शिल्प any manual or mechani-
 cal art
 शीर्षकोण vertex
 शून्यप्राय vanishing
 शून्य बिन्दु zero point
 शून्य होना vanish

शेषपूर्ति, सपूरक supplementary
 श्रेणी=माला series
 —, अभिसारी converging series
 —, गुणोत्तर Geometric series
 —, घात power series
 षट्क sextet
 षड्भुजोय hexagonal
 सकर (स्वर) beats
 सकेत symbol
 सकेतक (प्रतीक) symbol
 सकेतन=अंकन पद्धति notation
 संकेतांक index number
 संक्रमण transition
 —अवस्थान transitional stage
 संगत=अनुरूप compatible, consis-
 tant, corresponding
 संगामी concurrent
 संगी, समागमी associated
 संघटन composition
 संघनन condensation
 संघात impact
 संचय combination
 संचलन movement
 संचारित transmitted
 संतुलन balancing
 संतुलित equilibrated
 संतृप्त saturated
 संतोलक equilibrant
 सधि (मेल) reconciliation
 सधि (नारीरिक जोड़) joint

रीक्षा scrutiny
 त coincidence
 डन compression
 रक, पूरक, शेषपूर्ति supplement
 धक दण्ड connecting rod
 मंत, ससमिति symmetrical
 मति symmetry
 हीन, असमिति unsymmetrical
 क्त composite, joint, com-
 bined
 गुमी conjugate
 ग, मय combination
 रोजन combination, composi-
 tion
 रक्षक, सरक्षित conservative
 रक्षण, अविनाशित्व conservation
 हन (मवहनकारित) convective
 हति mass
 चर (परिणमनशील) variable
 mass
 चल moving mass
 मात्रक unit mass
 रीतर socket
 षापन verification
 र्देक, सदिश vector
 , सवेगी ऐठ impulsive torque v.
 , फलन रैखिक linear v. function
 , बीजगणित v. algebra
 दृश वस्तु analogue
 न्निकट approximate

समंजन adjustment
 समकाल चक्र tanta chronc
 समकोण right angle
 समकोणीय, समकोणिक rectangular
 समतल plane
 —, अपरिणमनीय invariable plane
 समदिक् isotropic
 समधर्मी analogous
 समपार्श्व prism
 समवर्ग square
 समय time
 — अवकलन t. derivative
 — निरपेक्ष absolute time
 — निर्भर t. dependent
 — समाकल t integral
 —, स्वतन्त्र t independent
 समरूप similar
 समरेख co-linear
 समवाय group
 सम-बाहु equilateral
 समसंस्थ homologous
 समस्या problem
 सम-स्वरण tuning
 समस्वरित, मिलाया हुआ tuned
 समाग (general) समघात (expre-
 ssion) homogeneous
 समान्तर चतुर्भुज parallelogram
 समान्तर फलक parallelo piped
 समार्द, आयतन (पुस्तक भी) volume
 समाकल integral

—, ऊर्जा का i. of energy	सर्व समिका identity
—, कला phase i.	सर्वांग समता congruence
—, दीर्घवृत्तीय elliptical i.	सर्वेक्षण, पर्यवलोकन survey
समाकलन integration	सहस्रण्ड (सहगुणनसण्ड) cofactor
समाकल्य integrand	सहायमी=सर्गी associated
समानकोणिक equiangular	सहायक auxiliary
समानुपातीय गुणनसण्ड factor of proportionate digits	सांख्यिकीय statistical
समाहृत=सोद्व=एकत्रीकृत concentrated	साकार concrete
समीकरण equation	साधन subject
—, चलात्मक kinematic e.	साधन appliance
—, चिरसम्मत रूप का e. of classical form	साधन solution
—, दीर्घकालिक secular e.	साध्य proposition
—, दीर्घवृत्तज का e. of ellipsoid	सापेक्ष, आपेक्षिक relative
—, परामित्तीय parametric e.	सामर्थ्य तुल्यता equipollence
—, पूरक complimentary e.	साम्भावस्था equilibrium
—, वर्गात्मक quadratic e.	सारणिक determinant
समुच्चयन consolidation	सारणी table
समुद्री तार cable	सार्व common
सम्मिश्र complex	सार्वत्रिक universal
—, चर राशि (परिणम्य) c. variable	सार्वदेशिक सैनिक राजसेवा universal military service
—, सकेतन c, notation	सर्वराष्ट्रीय आयोग international commission
—, समतल c. plane	साहुल सूत्र plumb line
सरलावर्त simple harmonic	सिद्धान्त principle
सर्पिल कमानी spiral spring	सीमान्त boundary
सर्पी sliding	सीमान्त=सीमायो=चरम limiting
सर्पी पटरी, स्लाइड रूल slide rule	सीस, सीसा (धातु) lead
सर्वसम identical	सुग्राही sensitive
	सुव्यक्त explicit

सूक्ष्ममापी micrometer	स्थितिज ऊर्जा, देमिंग ऊर्जा
सूत्र formula	स्थिरमान की दशा steady state
सूत्रीकरण, व्यवस्थापन formulate	स्थूल लेख, स्थूल वर्णन sketch
सेतु bridge	स्थैतिक static
सैद्धान्तिक theoretical	स्थैतिकी statics
सौन्दर्यबोध मंत्र aesthetic	—, निर्माण नमूने की structural s
सौर परिवार solar system	—संघन electro statics
स्कीइंग [लकड़ी का लम्बा पट्टा एक- एक पैर के नीचे बांधकर बर्फ पर सरकना] skiing	स्नेहन lubrication
स्कीइंग [‘धारदार जूतों’ पर बर्फ पर सरकना] skating	स्पर्श रेखा tangent
स्खलन slipping	स्पर्श रेखा tangency
स्तम्भ, स्थान dead positive	स्पर्शीय (स्पर्शान्तरण) स्पर्शान्तरण con- tact transformation
स्तर level	स्वतन्त्रता मन्त्रा degrees of freedom
स्थानव्युत्ति perturbation	स्वत चालित automatic
स्थानभ्रंश dislocation	स्वतन्त्र (—न्यायमिद्ध) axioms
स्थानान्तरण translation	स्वीकृत postulate
स्थानात्मक spatial	स्वेच्छ, कोई भी, कुछ भी arbitrary
स्थायर stationary	हर denominator
स्थिति case	हल, साधन solution
स्थिति, स्थान, अवस्थान position	हस्तान्तरण transference
	हीलियम helium
	हुप hoop

अंग्रेजी-हिन्दी

abscissa भुजांक	antisymmetric प्रति समित
absolute (sense of limiting) चरम, परम	antonymously विपर्ययतः
absolute (sense, not relative) निरपेक्ष	aperiodic अनावर्त
absorption अवशोषण	aphelion उच्च बिन्दु (अपभानु)
acceleration त्वरण	apparatus उपकरण
accuracy यथार्थता	appliance साधन
acoustics ध्वानिकी	application अनुप्रयोग
acting forces आरोपित बल	arbitrary स्वेच्छ, कुछ भी, कोई भी इ०
action क्रिया	arc चाप
adjustable समंजनीय	area क्षेत्रफल
algebraically बीजतः	argument (trigonometry) आयामांक
alpha (α) particle अल्फाकण	arm भुजा, बाहु
alternator प्रत्यावर्तक	associated संगी, सहगामी
amplitude आयाम	assumption अनुमान
analogous अनुरूप, सहधर्मी	astronomy खगोल विज्ञान, -, विद्या
analogue सदृश वस्तु	asymptote अनतस्पर्शी
analysis विश्लेषण	atomic परमाणवीय, परमाणव
anharmonic असरलावर्त	automatic (mechanical) यंत्रवत्
anisotropic विषमदिक्	automatic (self acting) स्वत.चालित
anomaly कौणिकांतर	automobile मोटरकार (गाडी)
anticlockwise वामावर्त	auxiliary सहायक
antiparallel प्रति-समांतर	axiom स्वयंतथ्य, स्वयसिद्ध
	axis अक्ष

axle धुरी	गणित, चलन-कलन
axle bearing धुराधार	calculus, integral कलन गणित,
azimuth दिग्म	चलराशि कलन
balance तुला	calculus of variations परिणमन कलन
balance wheel दोलन पहिया	can nical चैविक
balancing संतुलन	capacitive (electrical effect)
ballistics प्रक्षेप्य विज्ञान	(चैतुन) धारिनायोः प्रभाव
barometer बैरोमीटर, वायुदाबमापी	capillarity कैपिलरि
base आधार	causal कारणारमरु
beam दंड	celestial गगनोलोच
beats (स्वर) मकर	centrifugal अपकेन्द्र
bevel, bevelled कोर मारा हुजा	centripetal अभिकेन्द्र
bifilar द्विमूत्री	charge आवेश, चार्ज
binomial द्विपदी	circle वृत्त
bisector द्विसंढक	circuit परिपथ
block ईंट, टिल्ली, ब्लाक	circumference परिधि
block & tackle घिरनी-रस्मी-फाटा	clamp क्लैप, जकड
-साधन	classical चिरमम्मत
bob मोलरु	coefficient गुणांक
body पिंड	cofactor सह (गुणन) खंड
boring छिद्रक	cogradient अनुगमक
boundary सीमा, सीमांत	coincidence संपात
brachistrone द्रुततमपात वक्र	colatitude अक्षाज कोटि
bridge सेतु, पुल	collinear समरेख
buoyancy उत्प्लावकता	collision टक्कर
cable केबल, समुद्री तार, सन या तारों	combination सघय, संयोग
का रस्सा	commutative क्रम विनिमय
calculation परिकलन	compass दिक् सूची
calculus कलन, कलन गणित	compensated प्रतिकारित
calculus, differential अवकलन	complement, complimentary

कोटिपूरक, पूरक	cosmology ब्रह्मांड-विज्ञान
complex सम्मिश्र	couple युग्म
component घटक	coupling युग्मन
composition संघटन	covariant सहचर, अनुपरिणम्य
compound योगिक	crank क्रैंक
compression संपीडन	critical क्रांतिक, गुणदोष-विवेचक
concentration समाहरण, सांद्रण	cross head क्रॉस हैड
concurrent संगामी	cross-section अनुप्रस्थ काट
condensation सघनन	crosswise कर्चीवत्
condition प्रतिबंध, दत्त	crystal क्रिस्टल, स्फटिक, मणिभ
cone शंकु	cue(billiards) क्यू
configuration रूपरचना	current, direct दिष्ट धारा
congruence सर्वांग समता	curvature वक्रता
conical शाकव, शक्वाकार	curve वक्र
conics, conic sections, शाकव	cusps निशिताग्र
conjugate संयुग्मी	cycle चक्र
conservation अविनाशित्व, संरक्षण	cycloid वृत्तजात
constant नियत, निश्चर, नियताक	cylinder सिलिंडर
constraint नियंत्रण	damping अवमदन
contact स्पर्श, संपर्क	data दत्त, न्यास
contragradient प्रतिगमक	dead position स्तंभ स्थान
contravariant प्रतिपरिणम्य	deceleration अवत्वरण
convective संवहनकारित	decomposition विघटन
converging अभिसारी	decrement अपचय
converse विलोम	definition परिभाषा, व्याख्या, अर्थ-
coordinate निर्देशांक	निर्देश
corollary उपप्रमेय	deflection विक्षेप
corpuscular कणिका	deformation विकृति
cos कोज्या	deformable विरूप्य
cosine कोटिज्या.	degeneracy अप्रष्टता

degree अंश (भाग), कोटि, घात
(राशि, समीकरण)

degree of freedom स्वतंत्रता मंत्र्याएँ

demonstration निदर्शन

denominator हर

derivation व्युत्पत्ति, व्युत्पादन

derivative अवकलज

determinant सारणिक

detuned ब्रेमेल

develop विस्तार करना, विकसित
करना

deviation विचलन

device युक्ति

diagonal विकर्ण

diagram रेखाचित्र

diameter व्यास

differential (automobile) वैपम्यवास
डिफरेंशियल

differential (mathematics) अवकल

differentiation अवकलन

diffraction विवर्तन

dimension विमिति

direction (guiding) निर्देशन

direction (space) दिशा

disc (k) मंडलक टिकिया

discovery आविष्कार

disintegration विभजन

dislocation स्थानभ्रम

dispersive विक्षेपक

displacement विस्थापन

dissipation क्षय

distribution वितरण

diverge अग्नरण करना

division भाग, भाजन

drawing रेखन

dynamic गन्धात्मक, चलात्मक

dynamics गतिविज्ञान, गतिकी

dyne डाइन

eccentricity उत्केन्द्रता

ecliptic क्रांतिवृत्त

effort आयास

elastic प्रत्यास्थ

elasticity प्रत्यास्थता

electrodynamics वैद्युत गतिकी

electromagnetic वैद्युत् चुम्बकीय

electro motive force विद्युत्

वाहक बल

electron इलेक्ट्रान

element अल्पांश

elevator उत्थानक यंत्र

elimination निरसन

ellipse दीर्घवृत्त

ellipsoid दीर्घवृत्तज

ellipticity दीर्घवृत्तीयता

elongation दीर्घीकरण

embankment बाँध, बंध

E. M. F. वि० वा० ब०

emission उत्सर्जन

empirical आनुभविक

energy ऊर्जा

engineering इजीनियरी	factor गुणनखंड
enumeration परिगणन	feat आश्चर्य कार्य
envelope अन्वालोप	field क्षेत्र
equation समीकरण	finite परिमित
equator निरक्ष, भूमध्यरेखा	fixed नियत, स्थिर
equatorial निरक्षीय	flange निकला हुआ किनारा, पख
equiangular समान कोणिक	flexible नम्य, लचीला
equilateral समबाहु	flip चपेट लगाना (अगुली या अगूठे द्वारा)
equilibrant सतोलक	fluctuation उच्चावचन
equilibrated सतुलित	fluid तरल
equilibrium साम्यावस्था	fly wheel गति-पालक चक्र
equinoctial point विषुव-बिन्दु	focus फोकस, नाभि
equinox विषुव	force बल
equipollence सामर्थ्य तुल्यता	forced प्रणोदित
equivalence तुल्यता	fore finger तर्जनी
equivalent तुल्य, तुल्यात्मक	formal औपचारिक
erg अर्ग	formalism अनुष्ठान
erosion काट	formula सूत्र
evolute केन्द्रज	fraction भिन्न
exercise अभ्यास, अनुशीलन	frame ढाँचा
exhaust इग्नाइट, रेचक, क्षुण्णकारक	free स्वतन्त्र
expansion प्रसार	freedom, degree of, स्वतंत्रता संख्या
experiment प्रयोग	frequency आवृत्ति
explosion विस्फोटन	friction घर्षण
exponential घातीय	fulcrum आलव
expression व्यंजन, पदपुञ्ज	function फलन
extension analysis वितान गणित	fundamental मौलिक, निम्नतम
extrapolation बहिर्वेगन	galvanometer गैल्वानोमीपी, विद्युत् धारामापी
extreme चरम सीमा	
extremum बाह्यतमी	

gear योत्र, घंशुर घाक, विषरोन दिगा-

आं में घलनेवाले पहिये

general व्यापक

generator जनित्र

generic name ज्ञानि नाम

geodesic भूरेखा

geodesy भूगणित, भूमाप विज्ञा

geographic भौगोलिक

geoid न्यान

geometric ज्यामितीय

geometric series गुणेतार श्रेणी

gimbals (त्रि)मूल, (छल्ले जादि

युक्त लटताने की एक युक्ति
विशेष)

global भूमंडलीय

governor नियंत्रक

gradient प्रवणता

graph ग्राह, लेखाचित्र

gravitation गुरुत्वाकर्षण

gravity गुरुत्व

grid जाल

ground भूमि, निम्नतम

group समवाय

guide पथ (गति) नियंत्रक युक्ति

guideways नियंत्रक पथ

gymnastics जिम्नैस्टिक

gyration घूर्णन

gyrocompass घूर्णाक्ष दिक्सूचक

gyroscope घूर्णाक्ष स्थायी

gyrostabilizer घूर्णाक्ष स्थायीकार .

harmonic (simple h) सरलायत

helium हेलियम

hexagon षडभुज

hip circles निनभ्य वृत्त

hodograph वेगान्तरा

holonomic पूर्णादीय

homogeneous समान

homologous समगम्य

hoop रूष

horizontal क्षैतिज

hull जहाज का पेटा

hydrodynamics तरल गतिकी

hyperbola अति परवलय

hyper surface अतिपृष्ठ

hypothesis परिकल्पना

identity सर्वगमिका

impact गघात

import आयात

impressed c. m f. प्रभावित
वि० वा० व०

impulse जावेग

incidence आपात

inclined plane नत समतल

indeterminate अनिर्धारणीय

index संकेतांक, वर्णानुक्रमणिका

induction प्रेरण

induction, mutual अन्योन्य प्ररण

induction, self आत्म प्ररण

inertia अवस्थितित्व

inertia, moment of अवस्थितित्व-

घूर्ण
 inextensible अविनश्यनीय
 infinite अनन्त
 infinitesimal अनन्त सूक्ष्म
 infinity अनन्त दूरी
 inhomogeneous विषम
 integral समाकल
 integral number पूर्ण संख्या
 integrand समाकल्य
 integration समाकलन
 intensity तीव्रता
 interaction मियक्रिया
 interchange मियविनिमय
 inference व्यतिकरण
 immediate अंतरवर्ती, मझोला
 may परस्पर प्रभाव
 reaction प्रतिच्छेद
 interval (of space) अंतराल
 interval (of time) कालांतर
 interval नैज
 interval अक्षर, अक्षर राशि
 interval अपरिणम्य
 interval ईजाद
 interval मजाता, उद्भावक
 interval लोम, विलोम
 interval तेलोमन
 interval अनसंधान
 interval अनुसंधानक, जिज्ञासु
 interval नैज

isochronism तुल्य कालिकता
 isochronous तुल्यकालिक
 isotropic समदिक्
 jet प्रधार
 joint (combined) मयुक्त
 joint (of body) संधि
 jolt झटका
 justification समर्थन, ठीक ठहराना
 kinematic चलात्मक
 kinematics चलगतिकी
 kinetic चलात्मक, गत्यात्मक, गतिज
 kinetics चलगतिकी
 knife edge क्षुराधार
 latitude अक्षांश
 label लेबल, अंकितक
 lag पश्चिक्ता, पश्चवर्त्तिता
 lamina पटल
 law नियम
 lead (metal) सीस, सीसा
 level, energy ऊर्जा, स्तर
 limit सीमा
 limiting सीमांत, सीमायी
 lineal, linear रेखिक, रेखीय
 link कड़ी
 lithium लिथियम
 live सजीव (प्रत्यक्ष), जीवित
 load बोझ
 logarithm लघुगणक
 longitude रेखांश
 longitudinal अनुदैर्घ्य

ohmic ओमीय	pebble बटिया
opposite अभिमुख, विरुद्ध	pendulum लोलक
optical आलोकीय, प्रकाशीय	perfect निर्दोष, यथार्थ
optics आलोकिकी, प्रकाशिकी	perihelion नीचविंदु (अभिभानु)
optimum उपयुक्ततम	period (periodic time) आवर्तकाल
orbit कक्षा	permutation क्रमचय
order कोटि	peripheral परिमापी
origin उत्पत्ति, उद्गम, मूल	perpendicular लंब, लंबवत्
orthogonal लवकोणीय keeping for rectangular, समकोणीय	perturbation स्थानच्युति
oscillating दोलायमान	phase कला
oscillation दोलन	phase difference कलांतर
oscillatory दोलनशील	phenomenon गोचर, घटना, दृग्बिषय
oscillograph (the instrument) दोलन लेखी	philosophy ज्ञान, दर्शनशास्त्र
oscillograph (the graph) दोलन लेख्य ।	physicist भौतिकीज्ञ
osculating आश्लेषक	physics भौतिकी
pan (of balance) पलड़ा	piston पिस्टन
parabola परवलय	pivot कीलक
parabolic परवलयिक	plane समतल
paraffin पॅरेफिन	planet ग्रह
parallel समांतर	plate पट्टिका
parallel, antiparallelogram प्रति समांतर समांतर चतुर्भुज	platform पट्टा, प्लैटफार्म
parallelopiped समांतर फलक	plot आलेखन
parameter परामिति	plug डाट
particle कण	plumb line साहुल मूत्र
path पथ	point बिंदु
peak शिखर	polar ध्रुवीय
	polhode ध्रूपथ
	polygon बहुभुज

ohmic ओमीय	pebble पटिया
opposite अभिमुख, विरुद्ध	pendulum लोलक
optical आलोकिक, प्रकाशीय	perfect निर्दोष, यथार्थ
optics आलोकिकी, प्रकाशिकी	perihelion नीर्चविंदु (अभिमानु)
optimum उपयुक्ततम	period (periodic time) आवर्तकाल
orbit कक्षा	काल
order कोटि	permutation क्रमचय
origin उत्पत्ति, उद्गम, मूल	peripheral परिमापी
orthogonal लवकोणीय keeping	perpendicular लव, लंबवत्
for rectangular, समकोणीय	perturbation स्थानच्युति
oscillating दोलायमान	phase कला
oscillation दोलन	phase difference कलांतर
oscillatory दोलनशील	
oscillograph (the instrument)	phenomenon गोचर, घटना, दृग्बिषय
दोलन लेखी	philosophy ज्ञान, दर्शनशास्त्र
oscillograph (the graph) दोलन	physicist भौतिकीज्ञ
लेख्य ।	physics भौतिकी
osculating आश्लेषक	piston पिस्टन
pan (of balance) पलड़ा	pivot कीलक
parabola परवलय	plane समतल
parabolic परवलयिक	planet ग्रह
paraffin पॅरेफिन	plate पट्टिका
parallel समांतर	platform पटरा, प्लैटफार्म
parallel, antiparallelogram प्रति	plot आलेखन
समांतर समांतर धनुर्भज	plug डाट
parallelopiped समांतर फलक	plumb line साहुल सूत्र
parameter परामिति	point बिंदु
particle कण	polar ध्रुवीय
path पथ	polhode ध्रूपथ
peak शिखर	polygon बहुभुज

अन्योन्य (number) व्युत्क्रमण	restriction निरोध
reciprocating (engine) परिपाटीसे	result फल, उपपत्ति, परिणाम
पिस्टनों के इतस्ततः गामी	resultant परिणामी
recoil प्रतिक्षेप	resulting परिणामिक, परिणामगत
rectangle आयत	retardation मंदन
rectilinear (figure) आयताकार	reverse उत्क्रम
rectangular समकोण for	reversible उत्क्रमणीय
orthogonal, लंबकोणिक	revolution परिक्रमण
rectification चापकलन	revolving door घूमनेवाला दरवाजा
rectilinear ऋजुरेखीय	rheonomous धारात्मक
reduction लघुकरण	rhumb line रव रेखा (जहाज मार्ग रेखा)
reference अभिदेश	rhythm ताल
reflection परावर्तन	rhythmic तालबद्ध
refraction वर्तन	right angle समकोण
regular सम	rigid दृढ़
relative आपेक्षिक, सापेक्ष	ring वलय, घेरा
relativity आपेक्षिकता	rocket रॉकेट (हवाई वाण)
relativistic आपेक्षिकतात्मक	rolling लुठन, लुढ़कना, लुढ़नयुक्त, लुढ़कता
representation निरूपण	rotating घूर्णनयुक्त
repulsion प्रतिकर्षण	rotation घूर्णन
requirement अभियाचना, मांग	row पंक्ति
research गवेषणा	r. p. m. (rotations per minute) घू० प० म० (घूर्णन प्रतिमिनट)
resistance (electrical) प्रतिरोध,	rule कायदा
(general) रोध	runners लंबे पट्टे (टिन्त पर जड़ी एवं सरकती है)
resolution विसंडन	saturated संतृप्त
resolved part खंड	scalar बदिश
resonance अनुनाद	
rest विराम	
restitution प्रत्यवस्थान	
restoring प्रत्यापन	

अन्योन्य (number) व्युत्क्रमण	restriction निरोध
reciprocating (engine) परिपाटीसे	result फल, उपपत्ति, परिणाम
पिस्टनों के इतस्ततः गामी	resultant परिणामी
recoil प्रतिक्रोश	resulting परिणामिक, परिणामगत
rectangle आयत	retardation मंदन
rectilinear (figure) आयताकार	reverse उत्क्रम
rectangular समकोण for	reversible उत्क्रमणीय
orthogonal, लंबकोणिक	revolution परिक्रमण
rectification चापकलन	revolving door घूमनेवाला दरवाजा
rectilinear ऋजुरेखीय	rheonomous धारात्मक
reduction लघुकरण	rhumb line रंब रेखा (जहाज मार्ग
reference अभिदेश	रेखा)
reflection परावर्तन	rhythm ताल
refraction वर्तन	rhythmic तालबद्ध
regular सम	right angle समकोण
relative आपेक्षिक, सापेक्ष	rigid दृढ़
relativity आपेक्षिकता	ring बलय, घेरा
relativistic आपेक्षिकतात्मक	rocket रॉकेट (हवाई वाण)
representation निरूपण	rolling लुठन, लुठकता, लुठनयुक्त,
repulsion प्रतिकर्षण	लुठकता
requirement अभिव्यञ्जना, मांग	rotating घूर्णनयुक्त
research गवेषणा	rotation घूर्णन
resistance (electrical) प्रतिरोध,	row पंक्ति
(general) रोध	r. p. m. (rotations per minute)
resolution विलंबन	घू० प० म० (घूर्णन प्रतिमिन्नट)
resolved part खंड	rule कायदा
resonance अनुनाद	runners लंबे पट्टे (दिन पर जड़ी
rest विराम	एवं सरकती है)
restitution प्रत्यवस्थान	saturated संतृप्त
restoring प्रत्याप्तयन	scalar अदिश

standard प्रामाणिक, मानक	support आधार
stationary स्थावर	surface पृष्ठ
statistic (cal) सांख्यिकीय	survey पर्यवलोकन, सर्वेक्षण
static स्थैतिक	suspension अवलंबन
statics स्थैतिकी	sweep out बहारना
steady स्थिर भावे की	swing झूलन, झूला
steel फौलाद	symbol प्रतीक, संकेतक
steering मार्ग पर चलाना	symmetric (cal) समित, ससमिति
stiffness कड़ापन	symmetry संमिति
strain कर्ष	system (method or way) पद्धति,
street car ट्रामगाडी	(number of things) निकाय,
strength प्रबलता	समुदाय (solar-) परिवार
stress प्रतिबल	tangency स्पर्शता
string डोरी, रज्जु	tangent स्पर्श रेखा
strip पट्टी	rank टंकी
stroke प्रहार	tautochrone समकालवक्र
subject विषय, साधन	tautology पुनरुक्ति
submarine अतःसागरीय, पनडुब्बी,	technical शिल्पिक
सबमरीन	teleological सीमांशक
subscript निम्नलिखन	temperature ताप
substitution प्रतिस्थापन	temporal कालात्मक
suffix अनुलिखन	tennis racket टेनिस की धापी
summation योगन	tension तनाव
superconductivity अति-	tensor टेन्सर
चालकता	term पद
superelastic अतिप्रत्यास्थ	terminology पारिभाषिकी
superposition अधिष्ठापन	terrestrial पार्थिव
superscript उपरिलिखन	terrestrial magnetism भूचुंबकत्व
supplement (angle) संपूरक कोण	text मूल रचना (लेखीय)
(subject matter) शेषपुष्टि	theological आध्यात्मिक

wheel पहिया

“wobbling” लड़खड़ाना

work कार्य, कर्म

world line जगत् रेखा

wrench रिच

yo-yo यो-यो (एक खिलौना)

१ माहिरी के मिश्रण और उद्देश्य	१००
२ भूमि रसायन	१०००
३ अन्धता माहिरी का महिरी इतिहास	५००
४ माहिरी	११००
५ भारत का आदिम भूगर्भ शास्त्र	१०००
६ अन्धता उद्देश्य का विभाग	८००
७ भारतीय कर्म-उद्देश्य	११००
८ इतिहास-दीर्घ	१२००
९ पञ्चमाला विभाग	९००
१० गुणगुण से भारतीय माहिरी	१५००
११ गार और मनुष्य	५५०
१२ पृथ्वी की भाषा	८००
१३ कापेटाकारों	५५०
१४ विनोदना नीति	९५०

(सन् १९६०-६१)

१ अन्धता और माहिरी	३५०
२ आनुवंशिक का वृद्धि इतिहास	११००
३ भारतीय माहिरी द्वितीय मस्करण	८००
४ आनुवंशिक का अभिजात	८००
५ पामन नर का विभाग	८५०
६ इतिहास का उद्देश्य	५००
७ आन्ध्र भारत से रसायन का विभाग	१४००
८ इतिहास गुण का माहिरी विभाग	८५०
९ गहन से	५००
१० इन्धन मन्त्र का मुद्रा	१०००
११ काष्ठ परिवर्तन	१०००

(सन् १९५९-६०)

१ उद्देश्य-दीर्घ शास्त्र	१६००
२ पानि, वीर्य और भविष्य	८००
३ भस्म का महीन मिश्रण	६५०
४ भूमिमाय	१०००
५ उद्देश्य और रसायन	७००
६ विमान और वैमानिकी	४५०
७ इन्धन विभाग	२५०
८ मनमानम माहिरी का इतिहास (द्वितीय मस्करण)	४००
९ साद और उर्वरक	१०००
१० कापविज्ञान	६००
११ पतन की परिभाषा	७००
१२ अरस्तु	३५०

रद जोशी

जन्म : 21 मई 1931, उज्जैन (म० प्र०)

शिक्षण : यहाँ वहाँ, पता नहीं कहाँ-कहाँ। अन्त में होल्कर
हाविद्यालय इन्दौर से बी०ए०।

शुरु में कहानियाँ, फिर जुड़ी पत्रकारिता, व्यंग्य लेखन,
पाल में सरकारी नौकरी कुछ सालों और अब पिछले पन्द्रह वर्षों
स्वतन्त्र लेखन।

पहली किताब—'परिक्रमा'। फिर 'किसी बहाने', 'जीप पर
मार इल्लियाँ', 'तिलस्म', 'रहा किनारे बैठ', 'दूसरी सतह' और
'छले दिनों'।



नाटकों का चस्का। 'अंधों का हाथो' और 'एक था गधा उफ़ा
नादाद खा' नाटकों के प्रदर्शन सर्वत्र हुए।
फिलहाल बंबई में रहते हैं।

प्रिलोचन :

जन्म : 20 अगस्त 1917, बिरानोन्डी, कटकरास्टी, मुम्बानपुर, उ० प्र० ।

शिक्षा : बी० ए० तथा एम० ए० (पूर्वाह्न) अग्रेजी साहित्य में ।

आज, जनवाता, समाज, प्रदीप, विश्वरेखा, हंस और कहानी आदि पत्रिकाओं और समाचार पत्रों का सह-सम्पादन कर चुके हैं ।

1952-53 में गरीबराय नेमनल इन्टर कावेज जैनपुर में अग्रेजी के प्रवक्ता ।

1970-72 के दौरान दिवंगी छात्रों को हिन्दी, मरुत और उर्दू की शिक्षा ।

कुछ वर्ष उर्दू विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय की द्वैभाषिक कौम (उर्दू-हिन्दी) परिमोजना में कार्य ।

सम्प्रति . अध्यक्ष मुक्तिबोध पीठ, सागर विश्वविद्यालय, सागर (म० प्र०) ।

प्रकाशित कृतियाँ : घरती (कविता संग्रह 1945, दूसरा संस्करण . 1977)

गुलाब और बुलबुल (गद्य और कथाएँ 1955)

दिग्गज (संक्षिप्त . 1957)

ताप के ताप हुए दिन (कविता संग्रह . 1980)

शब्द (कविता संग्रह . 1980)

उस जनपद का कवि हूँ (कविता संग्रह . 1981)

अरधान (कविता संग्रह . 1984)

पता : सी-50, गोरनगर, सागर विश्वविद्यालय, सागर—470003



डा० रमेशचन्द्र कपूर

आपका जन्म २२ दिसम्बर १९२७ को हुआ। सन् १९४६ में आपने प्रयाग विश्वविद्यालय से प्रथम श्रेणी में एम०एस-सी० किया। १९४८ में आपने डी० फिल० और १९५७ में डी० एस-सी० की उपाधि प्राप्त की। सन् १९४७ से ही आप प्रयाग विश्वविद्यालय में रसायन विज्ञान का प्राध्यापन करते रहे हैं।

आप भारत, अमेरिका तथा इंग्लैंड की कितनी ही प्रसिद्ध वैज्ञानिक सस्याओं के सदस्य हैं और आपने उच्च वैज्ञानिक विषयों पर दर्जनों महत्वपूर्ण प्रबन्ध लिखे हैं, जो देश विदेश की प्रमुख वैज्ञानिक पत्रिकाओं में प्रकाशित हो चुके हैं।

हिन्दी-समिति-ग्रन्थमाला—५७

परमाणु-विखण्डन

लेखक

डा० रमेशचन्द्र कपूर,

इलाहाबाद विश्वविद्यालय

हिन्दी-समिति-ग्रन्थमाला—५७

परमाणु-विखण्डन

लेखक

डा० रमेशचन्द्र कपूर,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय

हिन्दी समिति
सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश